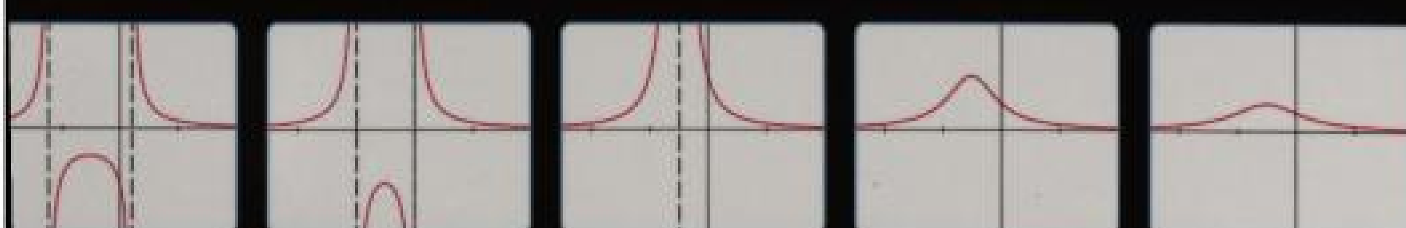
ANALYSE

CONCEPTS ET CONTEXTES

Volume 1. Fonctions d'une variable

STEWART

Traduction de la 1re édition par Micheline Citta-Vanthemsche



de boeck

ANALYSE

CONCEPTS ET CONTEXTES

Volume 1. Fonctions d'une variable

Chez le même éditeur
Extrait du catalogue

Mathématiques

DUPONT P., *Exercices de mathématiques. Volume 1. Algèbre et géométrie*

DUPONT P., *Exercices de mathématiques. Volume 2. Analyse*

LAY D. C., *Algèbre linéaire. Théorie, exercices et applications*

STEWART J., *Analyse. Concepts et contextes. Volume 1. Fonctions d'une variable*

STEWART J., *Analyse. Concepts et contextes. Volume 2. Fonctions de plusieurs variables*

SWOKOWSKI E.W., *Analyse*

ANALYSE

CONCEPTS ET CONTEXTES

Volume 1. Fonctions d'une variable

• James STEWART •

McMaster University

Traduction de la 1re édition par Micheline Citta-Vanthemsche
(Facultés universitaires Saint-Louis, Bruxelles)

de boeck

Ouvrage original :
Calculus. Concepts and Contexts by J. Stewart

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboeck.com**

1re édition
2e tirage 2004

Imprimé en Espagne

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : avril 2001
Bibliothèque Royale Albert Ier, Bruxelles : 2001/0074/84

ISBN 2-7445-0118-2

À Geoff, Brad, Anna et Jon.
À Debbie, Lorraine, Alan et Matt.
Aux amis disparus.

Préface de la traductrice

Traduire et adapter au monde francophone le *Calculus, Concepts and Contexts* de J. Stewart furent pour moi un réel plaisir. Tant la mathématicienne que l'enseignante de mathématiques y ont trouvé leur compte : j'ai ainsi pu observer de très près avec quel soin les concepts étaient introduits et énoncés, avec quelle patience leurs diverses facettes étaient mises en lumière pour que l'apprenant ait le temps de s'en forger une première image mentale. Comme enseignante, je partage entièrement les choix de l'auteur quant à l'exploration numérique et graphique des concepts avant que ne « tombe », beaucoup moins lourdement alors, leur définition formelle.

Dès la première section du premier chapitre, en mettant en avant le rôle de modélisation des fonctions, le ton est donné : les concepts seront plongés dans des contextes. Certains d'entre eux réapparaissent d'ailleurs plus loin « au service » de plusieurs concepts, dont ils éclairent parfois l'origine, parfois le fonctionnement et toujours le sens. J'acquiesce.

L'histoire des mathématiques est présente dans les Sujets de rédaction proposés et dans les brèves notices des marges relatives à quelques grands mathématiciens. Il n'est plus nécessaire aujourd'hui de souligner les points d'appui que l'enseignement des mathématiques peut trouver dans l'histoire, même si le chemin fut long depuis le temps où cet enseignement se réduisait à des théories intemporelles, achevées et définitives. Je me réjouis à la place des étudiants d'aujourd'hui.

La généralisation des logiciels de calcul symbolique et des outils graphiques, en facilitant l'expérimentation, l'exploration et la conjecture, a bouleversé l'enseignement de l'analyse. Cet ouvrage en tient compte largement, tant dans la manière de présenter les concepts que dans les types d'exercices proposés. Les questions résolues et à résoudre en sont d'autant plus intéressantes.

Enfin, rares sont les ouvrages qui mettent autant l'accent sur les aspects méthodologiques. Étudier des mathématiques, c'est accroître ses connaissances mais c'est aussi progresser dans ses façons de raisonner, de se poser des questions, de penser tout court. J'envie le lecteur ainsi aidé à prendre conscience de la manière dont il construit et s'approprie son savoir.

Je remercie les Éditions De Boeck Université, et particulièrement Messieurs Michel Jezierski et Michel Blaimont qui m'ont accompagnée tout au long de ce travail. Je tiens aussi à souligner la collaboration efficace avec Monsieur Pierre Bar pour l'expertise et la minutie dans la mise en page toujours délicate en mathématiques.

Enfin, je tiens à adresser un merci très affectueux à Marco pour sa patience sans faille, son aide ponctuelle et son vif intérêt pour ce travail.

Micheline Citta-Vanthemsche

Avant-propos

Aux États-Unis, les départements de mathématiques sont engagés dans un débat sur la réforme du calcul différentiel et intégral. Celui-ci s'inscrit bien sûr dans le débat ininterrompu qui a commencé il y a 300 ans, lorsque le premier manuel d'analyse fut publié. On raconte que des départements se sont scindés entre partisans et détracteurs de la réforme, qui refuseraient même de se parler.

Qu'est-ce qui déclenche de telles passions ? Que veulent dire exactement ceux qui se déclarent en faveur de la réforme ? D'avoir écouté beaucoup d'enseignants et lu les réponses à des centaines d'enquêtes, j'ai appris que tout le monde ne donne pas le même sens aux mêmes mots. Certaines personnes ont pris position de façon passionnée ; elles sont d'accord sur le fond, mais les enseignants sont diamétralement opposés sur d'autres. Jetons un coup d'oeil sur certains éléments clés de la réforme.

D'après certaines enquêtes, il semble que ce soit l'introduction des outils de calcul et autres outils graphiques qui soit le point crucial. Ceux d'entre nous qui ont regardé leurs étudiants travailler avec des calculatrices graphiques et des ordinateurs savent à quel point cela peut vivifier le travail. Ils ont lu sur les visages l'attention que ces outils provoquent et l'attitude d'apprenant actif qu'ils donnent. Or, ces machines sont aussi employées dans beaucoup d'écoles où l'enseignement est resté traditionnel. Par exemple, beaucoup de manuels d'analyse traditionnels (y compris le mien *Calculus, troisième édition*) en font un large usage. De plus, je connais quelques cours d'analyse très favorable à la réforme qui n'en font pas usage. Aussi, même si la question des outils techniques est à discuter en rapport avec les objectifs de la réforme, je ne crois pas qu'en eux-mêmes ils soient caractéristiques de la réforme.

Nombreux sont ceux qui citent la *Règle des trois* comme un principe clé : « les sujets doivent être présentés géométriquement, numériquement et algébriquement ». Cela vient du fait que, par le passé, le point de vue algébrique dominait au détriment des points de vue numérique et graphique. Plus récemment, la règle des trois est devenue la *Règle des quatre*, mettant en avant l'aspect verbal ou descriptif. Mais à nouveau, je crois que mon livre traditionnel *Calculus, troisième édition* inclut la visualisation et la règle des trois. Je suis donc d'avis que la règle des trois (ou des quatre), pour importante qu'elle soit, ne constitue pas à elle seule le point crucial de la réforme.

D'autres encore pensent que l'attention accrue aux applications est un élément clé et que les enseignants ont maintenant plus de liberté pour choisir les applications qui les attirent le plus. Même si cet aspect est vrai, il est tout aussi important dans un cours traditionnel.

Dès lors, en quoi *consiste* la réforme ? En un mot : les *concepts*. On oublie parfois que le mouvement actuel est sorti de la Conférence de Tulane en janvier 1986. Je crois que le mobile principal de la réforme est ce que la conférence a énoncé dans sa première recommandation :

Gros plan sur la compréhension des concepts.

Les outils techniques, la règle des quatre et les autres aspects de la réforme ont permis aux enseignants d'utiliser de nouveaux outils et de nouvelles méthodes pour améliorer le raisonnement et les aptitudes conceptuelles. Visualisation, expérimentation numérique et graphique et autres approches ont modifié fondamentalement la manière d'enseigner le raisonnement conceptuel.

Je crois que presque tous, du partisan le plus dur de la réforme jusqu'au traditionnaliste loyal, appuyent l'objectif central de se focaliser sur la compréhension des concepts. Pourquoi alors y a-t-il d'aussi vives discussions dans les départements de mathématiques ? L'explication se trouve dans la manière d'atteindre cet objectif. Si on veut sérieusement mettre l'accent sur la compréhension des concepts, on doit attendre des facultés et des étudiants qu'ils donnent des explications claires sur ce que les symboles signifient et sur pourquoi les choses fonctionnent comme elles fonctionnent. Et cela n'arrivera pas à moins de prendre le temps de travailler patiemment avec les étudiants. On doit nécessairement ralentir, présenter plusieurs approches et ne pas foncer à travers la matière au moment d'introduire un nouveau concept. En conséquence, certains sujets traditionnels moins conceptuels ne seront plus couverts dans beaucoup de cours. Et c'est là que commencent les heurts.

La plupart des cours récents ont grandement réduit l'exposé des techniques d'intégration et j'approuve. (Ce manuel n'a pas de chapitre consacré aux méthodes d'intégration ; l'intégration par parties et par substitution figure au chapitre 5 et la décomposition en éléments simples dans l'annexe F.) J'ai également rationnalisé la description d'autres sujets afin de libérer du temps à consacrer à la compréhension des concepts. Par contre, je n'ai pas été aussi loin que certains autres livres, adhérents de la réforme, qui ont supprimé certains sujets traditionnels. En particulier, j'ai décidé de maintenir les problèmes de taux liés, la Règle de l'Hospital et les séries numériques. En écrivant ce livre, je suis parti du principe qu'il était possible de réaliser la compréhension des concepts tout en maintenant les meilleures traditions du calcul différentiel et intégral traditionnel. J'espère que ce livre servira de support à un éventail plus large d'approches de l'enseignement de l'analyse et contribuera à améliorer la compréhension des concepts chez les étudiants dans le cadre de divers collèges et universités.

Des particularités

Des exercices sur les concepts

Le rôle principal des exercices proposés est de renforcer la compréhension des concepts. À cette fin, j'ai conçu différents types de problèmes. Certaines sections d'exercices commencent par demander d'expliquer la signification des concepts de base de la section. (Voyez par exemple les deux premiers exercices des sections 2.2, 2.4, 2.5, 5.3 et 8.2.) Dans le même esprit, les révisions commencent par un Contrôle des concepts et une liste de Vrai-Faux. D'autres exercices testent la compréhension des concepts sur des représentations graphiques (voyez les exercices 1-3 dans la section 2.7 et les exercices 29-36 dans la section 2.8). Un autre type d'exercice consiste à vérifier la compréhension des concepts à travers des descriptions verbales (voyez l'exercice 8 dans la section 2.4 ; l'exercice 46 dans la section 2.8 ; les exercices 5, 9 et 10 dans la section 2.10 ; l'exercice 53 dans la section 5.9). J'apprécie particulièrement les problèmes qui conjuguent les approches graphiques, numériques et algébriques et les comparent (voyez l'exercice 30 dans la section 2.5, l'exercice 39 dans la section 3.1 et l'exercice 2 dans la section 7.6).

Pages 109, 128, 140, 380, 577
Pages 156, 170
Pages 129, 171, 180, 437
Pages 141, 200, 544

Des données issues de la réalité

Mes assistants et moi-même avons passé beaucoup de temps à consulter des bibliothèques, à contacter des sociétés et des organismes gouvernementaux, à chercher sur l'Internet des données intéressantes en vue d'introduire, de soutenir et d'illustrer des concepts du calcul différentiel et intégral. C'est ainsi que beaucoup d'exemples et d'exercices impliquent des fonctions définies par de telles données numériques ou graphiques. Voyez, par exemple, les figures 1, 11 et 12 dans la section 1.1 (sismogramme d'un tremblement de terre), la

Pages 12.16

Pages 379, 360 381

figure 5 dans la section 5.3 (puissance électrique fournie à San Francisco), l'exercice 10 dans la section 5.1 (vitesse de la navette spatiale *Endeavour*) et l'exercice 56 de la section 5.3 (indice des prix à la consommation).

De véritables projets

Page 526

Page 237

Page 157

Page 414

Une façon d'impliquer les étudiants et d'en faire des apprenants actifs est de les mettre au travail (éventuellement en groupe) sur des projets plus importants qui, une fois traités, leur donnent un sentiment d'immense satisfaction. Les *projets appliqués* comprennent des applications qui parlent à l'imagination des étudiants. Le sujet appliqué qui termine la section 7.4 demande si une balle lancée en l'air prend plus de temps pour atteindre sa hauteur maximale ou pour retourner à sa hauteur initiale. (La réponse pourrait vous surprendre.) Les *sujets d'étude* impliquent de la technique ; le sujet proposé à la fin de la section 3.5 montre comment utiliser des courbes de Bézier pour dessiner les formes employées dans le tracé des lettres par une imprimante laser. Les *sujets de rédaction* demandent aux étudiants de comparer les méthodes d'aujourd'hui avec celles des pionniers du calcul différentiel et intégral — la méthode de Fermat pour déterminer des tangentes, par exemple. Les références pertinentes sont fournies. Les *sujets à découvrir* portent sur des notions soit abordées ultérieurement, soit optionnelles (les fonctions hyperboliques) ou poussent à la découverte à travers la reconnaissance de régularités (voyez le projet qui termine la section 5.7).

De la rigueur

J'ai inclus moins de démonstrations que dans mes livres plus traditionnels, mais je reste persuadé qu'il est important de poser aux étudiants la question de la démonstration et de faire apparaitre clairement la distinction entre une démonstration et un argument plausible. Montrer comment déduire quelque chose de moins évident de quelque chose qui l'est davantage me semble le point important. L'usage du Théorème des accroissements finis dans la démonstration du Théorème de calcul de l'intégrale définie (Partie 2 du Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) en est une illustration. Par ailleurs, j'ai décidé de ne pas démontrer les tests de convergence, mais de montrer plutôt intuitivement qu'ils étaient vrais.

Les outils techniques

Que l'on dispose aujourd'hui d'outils techniques rend, non pas moins importante, mais plus importante la maitrise des concepts sous-jacents aux images affichées sur l'écran. En outre, utilisés à bon escient, les calculatrices graphiques ou les ordinateurs peuvent contribuer à faire découvrir et comprendre les concepts. Je pars du postulat que l'étudiant dispose soit d'une calculatrice graphique, soit d'un ordinateur muni d'un logiciel de calcul symbolique. L'icône indique que l'exemple ou l'exercice devant lequel il est placé demande sans aucun doute l'usage de tels outils techniques, mais cela n'exclut pas de les employer dans la résolution d'autres exercices. Le symbole est réservé aux problèmes qui font appel aux ressources d'un logiciel de calcul symbolique (tel Derive, Maple, Mathematica ou TI-92). Il ne faut pas en conclure que désormais le papier et le crayon soient devenus obsolètes. Le calcul à la main et l'esquisse à main levée sont souvent préférables aux outils techniques pour illustrer ou renforcer certains concepts. C'est à l'enseignant et à l'étudiant d'apprendre à décider lequel est le plus approprié.

La résolution de problèmes

Page 87

Pages 186, 263, 344, 442, 499, 556, 640

Les étudiants éprouvent habituellement des difficultés face à des problèmes qui ne se résolvent pas selon une procédure bien définie. Je pense que personne n'a réellement amélioré la stratégie de résolution de problèmes en quatre étapes de George Polya et, en conséquence, j'ai inclus une version de ses principes de résolution de problèmes à la fin du chapitre 1. Ils sont mis en œuvre tout au long de cet ouvrage, explicitement ou implicitement. À la fin des autres chapitres, j'ai placé des sections appelées *Pleins feux sur la résolution de problèmes*, qui mettent en exergue des exemples de comment attaquer des problèmes d'analyse qui en valent la peine. Lors de la sélection des différents problèmes de ces sections j'ai tenu compte du conseil de David Hilbert que voici : « Un problème mathématique doit être suffisamment difficile que pour nous exercer, mais cependant pas inaccessible au risque de ridiculiser nos efforts». Quand j'ai proposé ces problèmes à titre de devoir ou de test, je les ai évalués autrement. J'ai valorisé l'étudiant qui avançait des pistes de solution et qui identifiait quels étaient les principes de la résolution de problèmes les plus significatifs.

Le contenu

Le livre commence par un *Aperçu du calcul différentiel et intégral*, afin de donner une première idée des sujets traités et une liste de questions destinées à motiver l'étude de cette matière.

Chapitre 1 — Des fonctions et des modèles

D'emblée, l'accent est mis sur les diverses présentations des fonctions : verbale, numérique, visuelle et algébrique. Les fonctions standards, y compris exponentielles et logarithmes, sont passées en revue sous ces quatre points de vue. Les courbes paramétrées sont introduites dans le premier chapitre, en partie pour faciliter la représentation des courbes par des outils graphiques, quand cela s'avère nécessaire dans la suite. Grâce à cette introduction précoce on peut aussi tracer des fonctions réciproques dans la section 1.6, traiter les tangentes aux courbes paramétrées dans la section 3.5 et couvrir la représentation graphique de telles courbes dans la section 4.4. Tous les étudiants devraient lire le texte qui traite de la modélisation en général de la section 1.7 comme toile de fond des modèles qui sont partout présents dans le livre. Le reste de la section (sur l'ajustement des courbes) est à option, mais certains enseignants peuvent ainsi, s'ils le souhaitent, exploiter les capacités à modéliser des données dont disposent les plus récentes machines à calculer. Un petit nombre d'exercices ultérieurs font usage de ce contenu (voyez, par exemple, les exercices 59 et 60 dans la section 3.5 et l'exercice 54 dans la section 4.2).

Pages 67, 233, 300
Page 75
Pages 236, 281

Chapitre 2 — Les limites et les dérivées

La matière sur les limites ne vient qu'après une discussion des problèmes de tangentes et de vitesses qui la motive. Les limites sont traitées d'un point de vue descriptif, graphique, numérique et algébrique. (La définition formelle en ϵ-δ de la limite figure dans l'annexe D pour qui veut l'aborder.) Il est important de ne pas passer en courant sur les sections 2.7-2.10, qui traitent des dérivées (en particulier des dérivées des fonctions définies graphiquement et numériquement) avant les règles de dérivation qui interviennent au chapitre 3. Ici, les exemples et les exercices explorent les significations de la dérivée dans des contextes différents. La section 2.10 annonce, de façon intuitive et sans les formules de dérivation, tout ce qui concerne la forme des courbes et qui sera étudié plus profondément dans le chapitre 4.

Page 175

Chapitre 3 — Les règles de dérivation

Ici, toutes les fonctions de base voient leur dérivée calculée. Lorsque des dérivées interviennent dans des situations appliquées, il est demandé à l'étudiant d'en expliciter la signification. Les Sujets d'étude et à découvrir proposent des options (les fonctions hyperboliques, une première introduction aux polynômes de Taylor).

Chapitre 4 — Les applications de la dérivée

C'est le théorème des accroissements finis qui sert de point de départ pour déduire les premières notions relatives aux valeurs extrêmes et à la forme des courbes. Le fait d'employer l'outil graphique souligne l'interaction entre analyse et calculatrices et l'examen de familles de courbes. Quelques problèmes substantiels d'optimisation sont prévus, entre autres une explication de pourquoi vous devez lever la tête de 42° pour regarder le point le plus haut d'un arc-en-ciel.

Page 282

Chapitre 5 — Les intégrales

Le calcul d'une aire et d'une vitesse amène l'intégrale définie. J'ai choisi de rendre la définition d'une intégrale plus facile à comprendre en optant pour des sous-intervalles de même longueur. L'accent est mis sur l'explication du sens de l'intégrale dans différents contextes et sur comment la calculer à partir d'un graphique et de tables. Il n'y a pas de chapitre séparé consacré aux techniques d'intégration, seules la substitution et l'intégra-

Pages 410-412 tion par parties sont traitées ici et la décomposition en éléments simples figure dans l'annexe F. La section 5.7 aborde l'usage des logiciels de calcul symbolique en intégration.

Chapitre 6
Les applications de l'intégrale

L'insistance est mise sur des méthodes générales et non sur des formules. L'objectif est de rendre les étudiants capables de diviser une grandeur en petits morceaux, de calculer une somme de Riemann et de reconnaître une intégrale comme sa limite. Il y a ici bien plus d'applications que ce qu'il est possible de traiter en réalité dans un cours. Les enseignants y choisiront celles qui conviennent à leurs étudiants et pour lesquelles ils éprouvent le plus d'enthousiasme.

Chapitre 7
Les équations différentielles

C'est la modélisation qui gouverne la manière d'introduire les équations différentielles. Les champs de direction et la méthode d'Euler sont vus avant de résoudre explicitement des équations à variables séparées, de sorte que sont placées sur un même pied les approches qualitative, numérique et analytique. Ces méthodes sont mises en œuvre sur les modèles exponentiels, logistiques et autres de croissance d'une population. Les systèmes d'équations différentielles sont introduits par le biais des modèles proies-prédateurs.

Chapitre 8
Les suites et les séries

Les tests de convergence des séries sont traités brièvement, plus intuitivement que formellement. Les estimations numériques des sommes de série reposent sur les tests qui ont servi à prouver la convergence. L'accent est mis sur les séries et les polynômes de Taylor, ainsi que sur leur utilisation en physique. L'estimation de l'erreur comprend aussi celle que fournissent les outils graphiques.

Remerciements

J'exprime ma reconnaissance à tous ceux qui, grâce à leur savoir et leur jugement, m'ont apporté des critiques. J'ai appris quelque chose de chacun d'entre eux.

Neil Berger, *University of Illinois at Chicago*
Jay Bourland, *Colorado State University*
John Chadam, *University of Pittsburgh*
Dan Clegg, *Palomar College*
Susan Dean, *DeAnza College*
Joseph R. Fiedler, *California State University-Bakersfield*
Ronald Freiwald, *Washington University in St. Louis*
Frederick Gass, *Miami University*
John Gosselin, *University of Georgia*
Randall R. Holmes, *Auburn University*
Mike Hurley, *Case Western Reserve University*
Steve Kahn, *Anne Arundel Community College*
Harvey Keynes, *University of Minnesota*
Ronald Knill, *Tulane University*
Stephen Kokoska, *Bloomsburg University*
Kevin Kreider, *University of Akron*
James Lang, *Valencia Community College-East Campus*
Miroslav Lovric, *McMaster University*
Jim McKinney, *California State Polytechnic University-Pomona*
Rennie Mirollo, *Boston College*
Bill Moss, *Clemson University*
Phil Novinger, *Florida State University*
Grace Orzech, *Queen's University*
Dan Pritikin, *Miami University*
James Reynolds, *Clarion University*
Gil Rodriguez, *Los Medanos College*
N. Paul Schembari, *East Stroudsburg University*
Bettina Schmidt, *Auburn University at Montgomery*
William K. Tomhave, *Concordia College*
Lorenzo Traldi, *Lafayette College*
Tom Tucker, *Colgate University*
Stanley Wayment, *Southwest Texas State University*
James Wright, *Keuka College*

Je remercie également ceux qui ont répondu à l'enquête sur l'attitude prise face à la réforme du calcul différentiel et intégral :

Irfan Altas, *Charles Sturt University*
Robert Burton, *Oregon State University*
Bem Cayco, *San Jose State University*
James Daly, *University of Colorado*
Richard Davis, *Edmonds Community College*
Richard DiDio, *LaSalle University*
Robert Dieffenbach, *Miami University-Middletown*
Helmut Doll, *Bloomsburg University*
William Dunham, *Muhlenberg College*
David A. Edwards, *The University of Georgia*
John Ellison, *Grove City College*
James P. Fink, *Gettysburg College*
Robert Fontenot, *Whitman College*
Laurette Foster, *Prairie View A & M University*
Gregory Goodhart, *Columbus State Community College*
Daniel Grayson, *University off Illinois at Urbana-Champaign*
Raymond Greenwell, *Hofstra University*
Murli Gupta, *The George Washington University*
Kathy Hann, *California State University at Hayward*
Judy Holdener, *United States Air Force Academy*
Helmer Junghans, *Montgomery College*
Victor Kaftal, *University of Cincinnati*
Doug Kuhlmann, *Phillips Academy*
David E. Kullman, *Miami University*
Carl Leinbach, *Gettysburg College*
William L. Lepowsky, *Laney College*
Kathryn Lesh, *University of Toledo*
Estela Llinas, *University of Pittsburgh at Greensburg*
Lou Ann Mahaney, *Tarrant County Junior College-Northeast*
John R. Martin, *Tarrant County Junior College*
R. J. McKellar, *University of New Brunswick*
David Minda, *University of Cincinnati*
Brian Mortimer, *Carleton University*
Richard Nowakowski, *Dalhousie University*
Stephen Ott, *Lexington Community College*
Paul Patten, *North Georgia College*
Leslie Peek, *Mercer University*
Mike Pepe, *Seattle Central Community College*
Fred Prydz, *Shoreline Community College*
Daniel Russow, *Arizona Western College*
Brad Shelton, *University of Oregon*
Don Small, *United States Military Academy-West Point*
Richard B. Thompson, *The University of Arizona*
Alan Tucker, *State University of New York at Stony Brook*
George Van Zwalenberg, *Calvin College*
Dennis Watson, *Clark College*
Paul R. Wenston, *The University of Georgia*
Ruth Williams, *University of California-San Diego*

En outre, je voudrais dire merci à Bill Ralph, Harvey Keynes, Saleem Watson, Lothar Redlin, Dan Clegg, Gene Hecht, Tom DiCiccio et Bob Burton pour leurs conseils et leur aide, à Andy Bulman-Fleming pour ses recherches sur l'Internet, à Kevin Kreider pour sa critique des exercices d'application, à Fred Brauer de m'avoir autorisé à me servir de ses manuscrits sur les équations différentielles, et à Jeff Cole pour le soin qu'il a apporté à la révision et à la préparation du solutionnaire.

Mes remerciements vont encore à Brian Betsill, Stephanie Kuhns et Kathi Townes de TECH-arts pour leur services de production, à Sandy Santer du Beacon Group pour la saisie du texte, à David Bruce Johnson et Ian Sabell pour la photo de couverture et à l'équipe de Brooks/Cole : Marlene Thom, responsable de la production, Vernon T. Boes, concepteur de la couverture, Jill Downey et Christine Davis, l'équipe de vente, à Beth Wilbur, l'assistante d'édition et à Carol Benedict, l'associée d'édition. Tous ont réalisé un remarquable travail.

Je tiens à remercier tout spécialement mon éditeur, Gary W. Ostedt. J'ai grandement bénéficié de sa longue expérience et de connaissance approfondie de l'édition. Je lui sais gré en particulier de m'avoir facilité la vie en rassemblant une équipe de gens de talent pour m'assister lors de la rédaction de ce livre.

JAMES STEWART

À l'étudiant

Lire un livre de calcul différentiel et intégral est tout autre chose que lire un journal ou un roman, ou même un livre de physique. Ne vous découragez pas s'il vous arrive de devoir lire un passage plus d'une fois avant de le comprendre. Vous devez avoir à portée de main du papier, un crayon et une calculatrice afin de faire un croquis ou un calcul.

Certains étudiants se lancent directement dans les exercices et ne vont lire la théorie que s'ils rencontrent des difficultés dans un exercice. Je leur suggère fortement de commencer par lire et comprendre une section avant d'attaquer les exercices. En particulier, vous devez vous pencher sur les définitions pour savoir exactement ce que signifient les mots.

Apprendre à penser logiquement est aussi un des buts de ce livre. Apprenez à rédiger les solutions des exercices de façon liée, pas à pas, avec des phrases d'explication — pas seulement une suite d'équations ou de formules détachées.

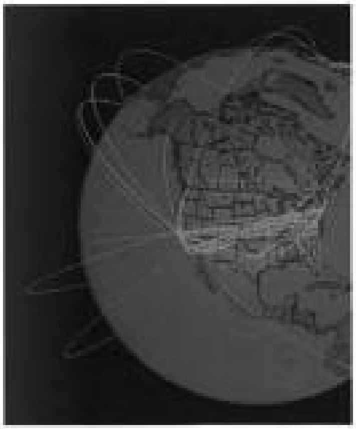
À la fin du livre, dans l'annexe I, sont données les solutions des exercices impairs. Certains exercices consistent en une explication ou une interprétation ou une description. Il n'y a dès lors pas qu'une seule façon d'y répondre, ne vous inquiétez donc pas si vous n'avez pas trouvé la réponse exactement telle qu'elle est proposée. En outre, comme il y a parfois plusieurs formes différentes pour exprimer une réponse algébrique ou numérique, n'allez pas conclure immédiatement que la vôtre est fausse si elle est quelque peu différente de la mienne. Il peut y avoir une identité algébrique ou trigonométrique qui les relie. Par exemple, si la réponse donnée à la fin du livre est $\sqrt{2} - 1$ et que vous obtenez $1/(1 + \sqrt{2})$, c'est juste car en rendant le dénominateur rationnel, vous verrez que les deux réponses sont équivalentes.

L'icône indique un exemple ou un exercice qui demande sans aucun doute l'usage d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur muni d'un logiciel de dessin. (La section 1.3 est consacrée à l'utilisation de ces outils graphiques et à certains pièges que vous risquez de rencontrer.) Mais cela n'exclut pas d'employer des outils graphiques pour vérifier la résolution d'autres exercices. Le symbole est réservé aux problèmes qui font appel aux ressources spécifiques d'un logiciel de calcul symbolique (tel Derive, Maple, Mathematica ou TI-92). Vous verrez encore le symbole qui vous met en garde contre certaines erreurs. J'ai placé ce symbole dans la marge en regard des situations où j'ai observé qu'une grande proportion de mes étudiants commettaient la même erreur.

Le calcul différentiel et intégral est un sujet passionnant, à juste titre considéré comme l'une des plus hautes réalisations de l'esprit humain. J'espère que vous allez découvrir qu'il n'est pas seulement utile mais aussi intrinsèquement beau.

Table des matières

3 LES RÈGLES DE DÉRIVATION 191



4 APPLICATIONS DE LA DÉRIVÉE 267

5 LES INTÉGRALES 349

6 LES APPLICATIONS DES INTÉGRALES 447

7 LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES 503

8 LES SUITES INFINIES ET LES SÉRIES 559

ANNEXES A1

INDEX A113

Un aperçu du calcul différentie et intégra

Au moment où vous aurez terminé ce cours, vous serez capables d'utiliser les techniques du calcul différentiel et intégral pour décider où vous asseoir au théâtre, pour expliquer les formes des canettes et la position d'un bloqueur au base-ball et pour expliquer la formation et la localisation des arcs-en-ciel. Voyez la liste des questions de la page 9.

Le calcul différentiel et intégral est fondamentalement différent des mathématiques que vous avez étudiées jusqu'à présent. Il est moins statique et plus dynamique. Il se rapporte au changement et au mouvement ; il traite de quantités qui se rapprochent d'autres quantités. Voilà pourquoi il peut être utile de survoler le sujet avant d'entamer son étude en profondeur. Nous donnons un aperçu de certaines idées maîtresses du calcul différentiel et intégral en faisant ressortir comment des limites surviennent quand nous essayons de résoudre des problèmes très divers.

■ Le problème de l'aire

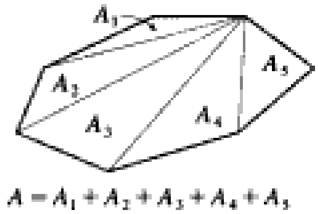


FIGURE 1

Les origines du calcul différentiel et intégral remontent à 2500 ans d'ici, au temps des Grecs qui calculèrent des aires par la méthode « d'exhaustion ». Ils savaient comment mesurer l'aire A d'un polygone quelconque en le décomposant comme dans la figure 1 en triangles, dont ils prenaient la somme des aires.

Il est beaucoup plus difficile de mesurer l'aire d'une figure curviligne. La méthode d'exhaustion des Grecs consistait à inscrire et à circonscrire des polygones et à en faire croître le nombre de côtés. La figure 2 illustre ce procédé dans le cas particulier d'un cercle à l'intérieur duquel sont inscrits des polygones réguliers.

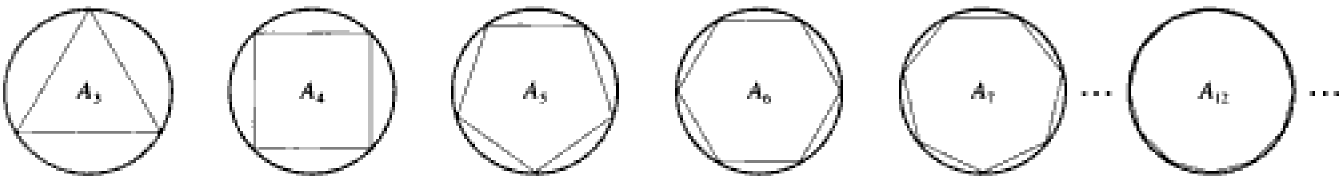


FIGURE 2

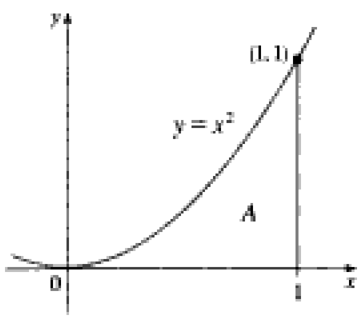


FIGURE 3

Soit A_n l'aire du polygone inscrit de n côtés. Lorsque n augmente, A_n s'approche de plus en plus de l'aire du cercle. Nous disons que l'aire du cercle est la *limite* des aires des polygones inscrits et nous écrivons

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Les Grecs n'employaient pas ce terme de limite. Cependant, Eudoxe (5^e s. av. J.-C.) réussit à démontrer, par un raisonnement indirect, la formule de l'aire du cercle que nous connaissons bien : $A = \pi r^2$.

C'est la même idée qui présidera au chapitre 5 pour trouver les aires de régions du type de celles qui sont représentées à la figure 3. Nous calculerons d'abord une approximation de l'aire souhaitée en additionnant les aires des rectangles (comme ceux de la figure 4), puis nous ferons décroître la base des rectangles et enfin nous prendrons A comme la limite de ces sommes d'aires de rectangles.

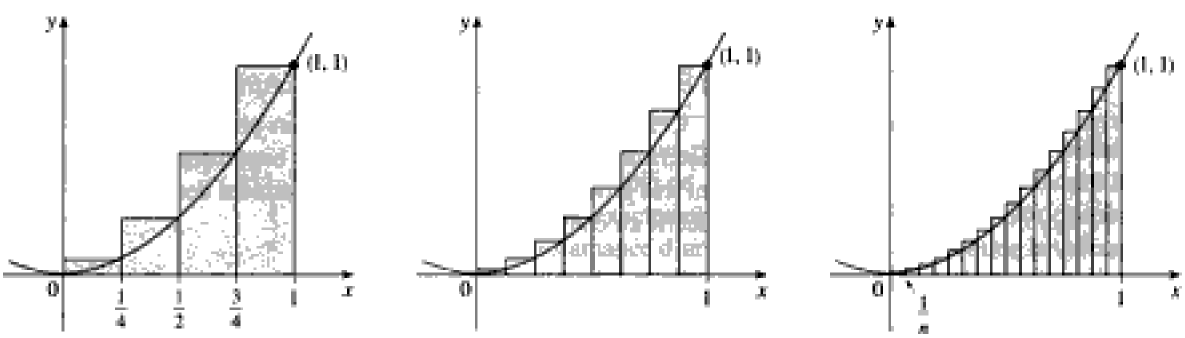


FIGURE 4

Le calcul de l'aire est central dans la branche de l'analyse appelée plus précisément *calcul intégral*. Les techniques que nous mettrons au point au chapitre 5 pour calculer des aires nous permettront aussi de calculer le volume d'un solide, la longueur d'un arc de courbe, la poussée exercée par l'eau contre une écluse, la masse et le centre de gravité d'une tige et le travail effectué pour pomper l'eau hors d'une citerne.

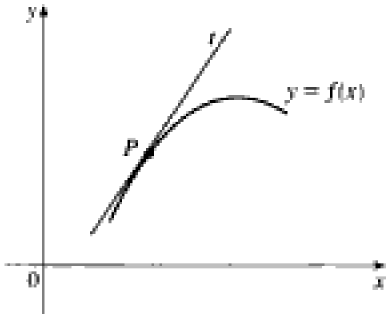


FIGURE 5
La tangente en P

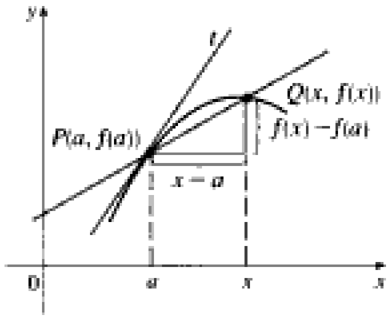


FIGURE 6
La sécante PQ

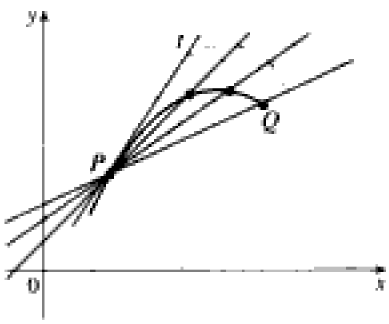


FIGURE 7
Des sécantes qui tendent vers la position de la tangente

Le problème de la tangente

Le problème est de trouver l'équation de la tangente t à une courbe d'équation $y = f(x)$ en un point P donné. (Nous donnerons une définition précise d'une tangente au chapitre 2. Pour le moment nous nous contentons de la voir comme une droite qui touche la courbe comme le fait la droite rouge dans la figure 5.) Puisque nous savons que la droite t passe par le point P, il nous suffirait de connaître sa pente m pour pouvoir en écrire une équation. Nous aurions besoin de deux points sur la droite pour en déterminer la pente et nous n'en avons qu'un seul. Pour contourner le problème, nous cherchons d'abord une approximation de m en prenant un point Q très voisin de P et en calculant la pente m_{PQ} de la sécante PQ. Sur la figure 6, nous voyons que

1
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Maintenant, imaginons que Q se meuve sur la courbe en direction de P, comme sur la figure 7. Vous remarquez que la sécante pivote autour de P et s'approche de la position tangente comme position limite. En termes de pente, cela se traduit par : la pente m_{PQ} de la sécante s'approche de plus en plus de la pente m de la tangente. Nous écrivons cela

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}.$$

et nous disons que m est la limite de m_{PQ} lorsque Q s'approche de P en suivant la courbe. Comme x s'approche de a lorsque Q s'approche de P, nous pouvons encore utiliser l'équation (1) et écrire

2
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ce procédé sera mis en oeuvre sur des exemples au chapitre 2.

Le problème de la tangente regarde la branche de l'analyse, appelée *calcul différentiel*, qui, plus de 2000 ans après le calcul intégral, n'avait toujours pas été inventé. Les idées fondamentales du calcul différentiel sont dues au mathématicien français Pierre de Fermat (1605-1665) et furent développées par les mathématiciens anglais John Wallis (1616-1703), Isaac Barrow (1630-1677) et Isaac Newton (1642-1727) et par le mathématicien allemand Gottfried Leibniz (1646-1716).

Ces deux branches de l'analyse et leurs problèmes principaux, le calcul de l'aire et la détermination de la tangente, semblent bien différents à première vue, et pourtant ils sont très proches l'un de l'autre. Ils constituent des problèmes inverses au sens qui sera décrit au chapitre 5.

La vitesse

Lorsque nous lisons sur le tachymètre d'une voiture qu'elle se déplace à 60 km/h, quelle est au juste l'information reçue ? Nous savons que si cette vitesse restait constante pendant une heure, la voiture aurait parcouru 60 km. Mais si la vitesse de la voiture n'est pas constante, qu'est-ce que cela signifie qu'elle est de 60 km/h à un moment donné ?

En vue de répondre à cete question, analysons le mouvement d'une voiture qui se déplace en ligne droite et supposons avoir pu mesurer la distance parcourue après chaque seconde. Ces distances sont reprises dans la table que voici.

t = temps écoulé (en s)	0	1	2	3	4	5
d = distance (en m)	0	0,6	3	7,6	13	23,7

Comme première étape en vue de trouver la vitesse après 2 secondes, calculons la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $2 \leqslant t \leqslant 4$:

$$\begin{aligned}\text{vitesse moyenne} &= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}}\\ &= \frac{13-3}{4-2} = 5 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

De même, la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $2 \leqslant t \leqslant 3$ est

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{7{,}6-3}{3-2} = 4{,}6 \text{ m/s.}$$

Nous pressentons que la vitesse à l'instant $t = 2$ ne peut pas être très différente de la vitesse moyenne calculée sur un intervalle de temps très court mesuré à partir de $t = 2$. Aussi, imaginons que la distance parcourue ait été mesurée tous les dixièmes de seconde, cela donne la table :

t	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
d	3,05	3,36	3,71	4,10	4,56	5,12

Alors, nous pouvons calculer la vitesse moyenne, par exemple, sur l'intervalle de temps [2; 2,5] :

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{5{,}12-3{,}05}{2{,}5-2} = 4{,}14 \text{ m/s.}$$

Les résultats du même calcul sur les autres intervalles de temps sont alignés dans la table :

Intervalle de temps	[2; 3]	[2; 2,5]	[2; 2,4]	[2; 2,3]	[2; 2,2]	[2; 2,1]
Vitesse moyenne (en m/s)	4,60	4,14	3,78	3,50	3,30	3,10

Les vitesses moyennes sur des intervalles de plus en plus petits semblent s'approcher d'un nombre proche de 3 et donc il est normal de s'attendre à ce que la vitesse moyenne en $t = 2$ exactement soit de l'ordre de 3 m/s. Au chapitre 2, nous définissons la vitesse instantanée d'un objet en mouvement comme la valeur limite des vitesses moyennes sur des intervalles de temps de plus en plus petits.

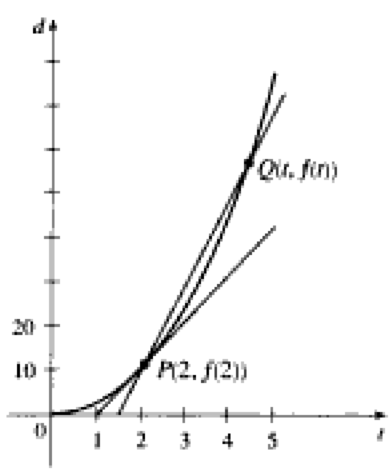


FIGURE 8

La figure 8 montre une représentation graphique du mouvement d'une voiture caractérisée par la distance parcourue en fonction du temps. Si nous notons $d = f(t)$, alors $f(t)$ est le nombre de mètres parcourus après t secondes. La vitesse moyenne sur un intervalle de temps $[2, t]$ est

$$\text{vitesse moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} = \frac{f(t)-f(2)}{t-2}\,.$$

Or, cette expression est la même que celle de la pente de la sécante PQ à la figure 8. La vitesse v au moment $t = 2$ est la valeur limite de cette vitesse moyenne quand t tend vers 2 ; à savoir

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}.$$

Nous reconnaissons ici la même formule que celle qui, à l'équation 2, donnait la pente de la tangente à la courbe en P.

En définitive, lorsque nous résolvons un problème de tangente par le calcul différentiel, nous résolvons aussi un problème de vitesse. Les mêmes techniques nous permettent également de résoudre les problèmes de taux de variation dans toutes les sciences naturelles et sociales.

La limite d'une suite

Au 5[e] siècle av. J.-C., le philosophe grec Zénon d'Élée posa quatre problèmes, connus aujourd'hui sous le nom de *paradoxes de Zénon*, destinés à défier quelques-unes des idées en vigueur à cette époque à propos de l'espace et du temps. Le deuxième de ces paradoxes parle d'une course entre le héros grec Achille et une tortue qui a été avantagée au départ. Voici l'argumentation que tient Zénon pour démontrer qu'Achille ne pourra jamais dépasser la tortue : supposons que le point de départ d'Achille soit a_1 et celui de la tortue, t_1 (voyez la figure 9). Au moment où Achille arrive en $a_2 = t_1$, la tortue a déjà gagné la position t_2. Au moment où Achille arrive en $a_3 = t_2$, la tortue est en t_3. Cette description se poursuit indéfiniment et la tortue sera donc toujours en tête ! Mais le sens commun n'y trouve pas son compte.

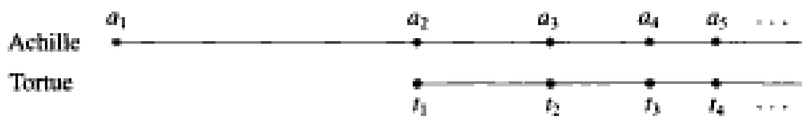


FIGURE 9

Une façon d'expliquer ce paradoxe est d'impliquer la notion de *suite*. Les positions successives d'Achille $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ ou les positions successives de la tortue $(t_1, t_2, t_3, \ldots)$ forment ce qu'il est commun d'appeler une suite.

De façon générale, une suite $\{a_n\}$ est un ensemble de nombres écrits dans un ordre bien défini. Par exemple, la suite

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

peut être décrite par la formule générale de son $n^{\text{ième}}$ terme :

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Nous pouvons visualiser cette suite en reportant ses termes sur une droite graduée, comme à la figure 10(a) ou en dessinant son graphique, comme à la figure 10(b). Que ce soit sur l'une ou l'autre figure, il est évident que les termes de la suite $a_n = 1/n$ deviennent de plus en plus proche de 0 lorsque n croît. En fait, nous pouvons trouver des termes aussi proches que l'on veut à condition de rendre n suffisamment grand. Nous disons que la limite de cette suite est 0 et nous écrivons cela

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

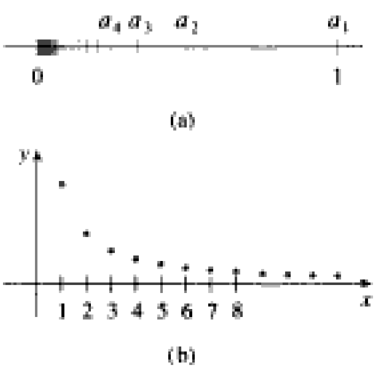


FIGURE 10

La notation tout à fait générale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

signifie que les termes a_n s'approche de L lorsque n devient grand. Plus précisément, les nombres a_n peuvent devenir aussi proches que l'on veut de L à condition de choisir n suffisamment grand.

Le concept de limite d'une suite intervient dans la représentation décimale des nombres réels. Par exemple, si

$$\begin{aligned} a_1 &= 3{,}1 \\ a_2 &= 3{,}14 \\ a_3 &= 3{,}141 \\ a_4 &= 3{,}1415 \\ a_5 &= 3{,}14159 \\ a_6 &= 3{,}141592 \\ a_7 &= 3{,}1415926 \\ &\vdots \end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi.$$

Les termes de cette suite sont les approximations rationnelles de π.

Retournons au paradoxe de Zénon. Les positions successives d'Achille et de la tortue forment des suites $\{a_n\}$ et $\{t_n\}$ où $a_n < t_n$, quel que soit n. On peut montrer que ces deux suites ont même limite :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

C'est précisément en ce point p qu'Achille dépasse la tortue.

La somme d'une série

Un autre paradoxe de Zénon, que nous a transmis Aristote, est le suivant : « un homme qui se trouve dans une pièce ne peut pas marcher jusqu'au mur. Pour faire cela, il devrait d'abord avoir parcouru la moitié de la distance qui le sépare du mur, ensuite, la moitié de la distance qui reste, et puis encore la moitié de ce qu'il reste encore. Ce procédé peut être poursuivi indéfiniment et ne s'arrête donc jamais »(voir la figure 11).

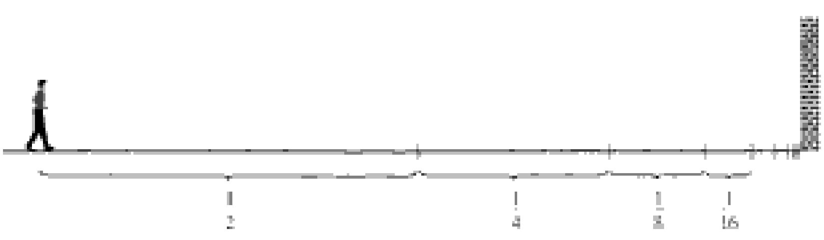


FIGURE 11

Nous savons pertinemment bien que l'homme peut atteindre le mur, ce qui suggère que peut-être la distance totale pourrait être le résultat d'une somme infinie de distances partielles, comme ceci :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \qquad (3)$$

Zénon, lui, pensait que cela n'avait aucun sens d'additionner une infinité de nombres. Il y a pourtant d'autres situations où, implicitement, nous additionnons une infinité de nombres. Par exemple, la notation décimale $0,\overline{3} = 0,3333\ldots$ signifie

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots$$

et, d'une certaine façon, il doit être vrai que

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Plus généralement, si d_n désigne le $n^{\text{ième}}$ chiffre dans l'écriture décimale d'un nombre, alors

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots.$$

Par conséquent, certaines sommes infinies, ou séries comme on les appelle, ont un sens. Encore faut-il définir soigneusement ce qu'est la somme d'une série.

Reportons-nous à la série de l'expression (3) et notons s_n la somme des n premiers termes. Alors

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{2} = 0,5\\
s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75\\
s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0,875\\
s_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 0,9375\\
s_5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 0,96875\\
s_6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 0,984375\\
s_7 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = 0,9921875\\
&\vdots\\
s_{10} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1024} \approx 0,999902344\\
&\vdots\\
s_{16} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0,99998474
\end{aligned}
$$

Nous pouvons observer que, plus nous additionnons de termes, plus les sommes partielles s'approchent de 1. En fait, il peut être montré qu'en prenant n suffisamment grand (c'est-à-dire en additionnant un nombre suffisamment grand de termes), les sommes partielles s_n peuvent être rendues arbitrairement proches de 1. Il semble dès lors raisonnable de dire que la somme de la série est 1 et d'écrire

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

En d'autres mots, la raison pour laquelle la somme de la série vaut 1 est que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Nous allons explorer davantage ces sujets au chapitre 8. Ensuite, nous allons exploiter les idées de Newton qui relient les séries au calcul différentiel et intégral.

■ Résumé

Nous avons constaté que le concept de limite est présent lorsque nous cherchons à calculer l'aire d'une région, la pente de la tangente à une courbe, la vitesse d'une voiture ou la somme d'une série. Ces problèmes ont en commun qu'une quantité est obtenue comme la limite d'autres quantités, facilement calculables. C'est par ce concept de base, celui de limite, que le calcul différentiel et intégral se distingue des autres branches des mathématiques. En fait, il pourrait être défini comme la partie des mathématiques qui traite des limites.

Isaac Newton a inventé sa version du calcul différentiel et intégral pour expliquer le mouvement des planètes autour du soleil. Aujourd'hui, cette discipline est mise au service du calcul des trajectoires des satellites et des vaisseaux spatiaux, de la prédiction des effectifs de population, du calcul de la vitesse d'augmentation du prix du café, des prévisions météorologiques, de la mesure du débit cardiaque, du calcul des primes d'assurance vie, et de toutes sortes d'autres choses. Ce livre se propose d'aborder quelques-unes de ces applications.

Afin de faire sentir la puissance du sujet, nous terminons cet aperçu par une liste de questions auxquelles vous serez à même de répondre grâce au calcul différentiel et intégral :

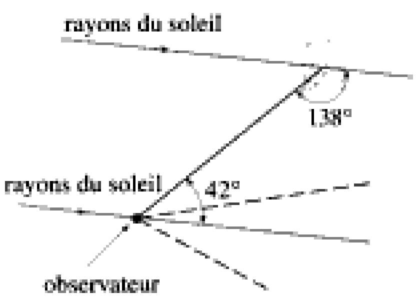


FIGURE 12

1. Comment expliquer le fait, illustré à la figure 12, qu'un observateur voit le point le plus haut d'un arc-en-ciel sous un angle de 42° (voyez la page 282) ?
2. Comment expliquer la forme des boîtes de conserve alignées sur les rayons des supermarchés (voyez la page 321) ?
3. Quelle est la meilleure place au théâtre (voyez la page 472) ?
4. À quelle distance de l'aéroport un pilote doit-il entamer la descente (voyez la page 238) ?
5. Comment assembler les courbes qui guident le tracé des lettres produites par une imprimante laser (voyez la page 237) ?
6. Au base-ball, où doit se placer un joueur intermédiaire appelé à relayer une balle lancée vers la base initiale (voyez la page 537) ?
7. Une balle lancée en l'air, prend-elle plus de temps pour atteindre son apogée que pour retomber à sa hauteur initiale (voyez la page 526) ?

Les fonctions sont les objets de base traités en calcul différentiel et intégral. Ce chapitre est une introduction à cette matière en ce qu'il examine les premiers éléments qui regardent les fonctions, leur représentation graphique, des façons de les transformer et de les composer. Nous insistons sur le fait qu'une fonction peut être représentée de plusieurs façons : par une expression analytique, par une table de valeurs, par une courbe ou par une description verbale. Nous passons en revue les types principaux de fonctions qui interviennent en calcul différentiel et intégral et décrivons le rôle qu'elles jouent comme modèle de phénomènes issus de la réalité. Nous abordons également l'utilisation des calculatrices graphiques ou des logiciels de dessin sur ordinateur et nous faisons voir que les équations paramétriques constituent la meilleure méthode pour obtenir le tracé de certaines courbes.

1

Des fonctions et des modèles

1.1 Quatre manières de présenter une fonction

Il y a fonction dès qu'une quantité dépend d'une autre. Voici quatre situations.

A. L'aire A d'un cercle dépend du rayon r de ce cercle. C'est l'équation $A = \pi r^2$ qui exprime la règle qui lie r et A. À chaque valeur positive de r est associée une valeur de A, on dit que A est une *fonction* de r.

B. La population mondiale P dépend du temps t. La table ci-contre donne une estimation de cette population mondiale $P(t)$ au temps t, pour quelques années. Par exemple,

$$P(1950) \approx 2\,520\,000\,000.$$

Mais à chaque valeur de la variable t correspond une valeur de P et on dit que P est une fonction de t.

Année	Population (en millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

C. Le coût C d'affranchissement d'une lettre dépend de son poids p. Bien qu'il n'existe pas de formule simple qui lie C et p, le bureau postal dispose d'un tarif qui lui permet de déterminer C dès que p est connu.

D. L'accélération verticale a du sol telle qu'elle est mesurée par un séismographe durant un tremblement de terre est une fonction du temps. La figure 1 montre un graphique de l'activité sismique telle qu'elle a été enregistrée durant le tremblement de terre qui a secoué Los Angeles en 1994. On peut y lire la valeur de a correspondant à un certain moment t choisi.

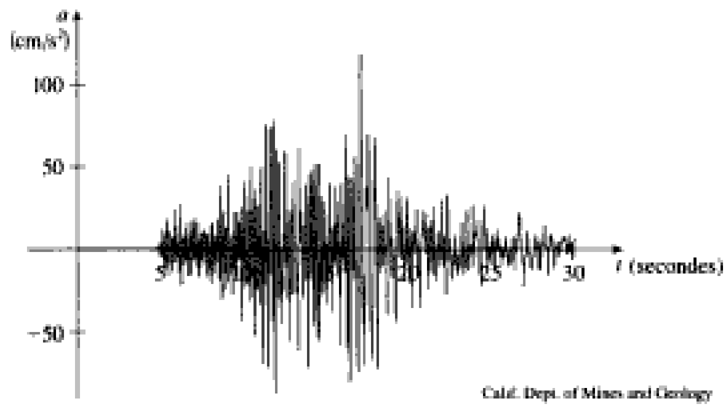


FIGURE 1
Accélération verticale du sol relevée au cours du tremblement de terre de Los Angeles en 1994

Chacun de ces exemples décrit une règle selon laquelle, à un nombre (r, t, p ou t), est associé un autre nombre (A, P, C ou a). Dans chaque cas, on dit que le deuxième nombre est une fonction du premier.

> Une **fonction** f est une règle qui assigne à chaque élément x d'un ensemble A exactement un élément, noté $f(x)$, d'un ensemble B.

Les ensembles A et B envisagés pour des fonctions sont habituellement des ensembles de nombres. L'ensemble A est appelé le **domaine de définition** de la fonction. Le nombre $f(x)$ est la valeur **de f en x** et se lit f de x. L'ensemble de toutes les valeurs $f(x)$ possibles lorsque x parcourt tout le domaine de définition s'appelle l'**ensemble image**. On appelle **variable indépendante** un symbole qui peut prendre une valeur quelconque du *domaine de définition* de la fonction f. On appelle **variable dépendante** un symbole qui prend une valeur de l'ensemble image de f. Pour la situation **A** ci-dessus, par exemple, c'est r qui est la variable indépendante et A la variable dépendante.

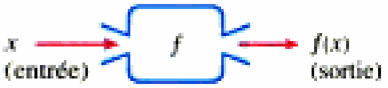


FIGURE 2
Une fonction f vue comme une machine

Il est instructif de comparer une fonction à une espèce de **machine** (voyez la figure 2). Lorsque x est une valeur du domaine de définition de la fonction f, alors la machine l'accepte comme entrée et produit à la sortie $f(x)$, selon la règle qui définit la fonction. Dès lors, le domaine de définition peut être vu comme l'ensemble de toutes les entrées possibles de la machine et l'ensemble image, comme l'ensemble des sorties possibles.

Les fonctions préprogrammées des calculatrices illustrent fort bien la notion de fonction regardée comme une machine. Prenons l'exemple de la fonction activée par la touche $\sqrt{x}$ de votre calculatrice. D'abord, vous entrez x. Ensuite, vous pressez la touche $\sqrt{x}$. Si $x < 0$, il n'appartient pas au domaine de définition de la fonction et, de ce fait, ne sera pas accepté par la calculatrice, qui du reste vous enverra un message d'erreur. Par contre, si $x \geqslant 0$, la calculatrice affichera une valeur approximative de $\sqrt{x}$. La touche $\sqrt{x}$ de votre calculatrice n'est donc pas tout à fait la même chose que la fonction mathématique définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Un **diagramme sagittal**, comme celui de la figure 3, est aussi une façon de représenter une fonction. Chaque flèche relie un élément de A à un élément de B. La flèche indique que $f(x)$ est associé à x, $f(a)$ est associé à a, etc.

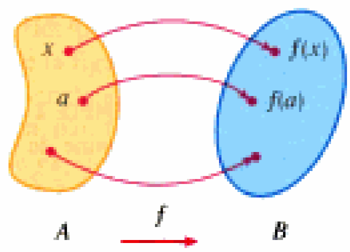


FIGURE 3
Diagramme sagittal de f

Habituellement, on visualise une fonction par son graphique. Si f est une fonction définie sur A, son **graphique** est l'ensemble des couples

$$\{(x, f(x)); |; x \in A\}$$

(il s'agit des couples entrée sortie). Autrement dit, le graphique de f est constitué de l'ensemble des points (x, y) du plan de coordonnées tels que $y = f(x)$ et x appartient au domaine de définition de f.

La représentation graphique d'une fonction f nous donne une image intéressante du comportement ou « biographie » d'une fonction. Comme, en chaque point (x, y) de la courbe, l'ordonnée y est égale à la valeur de $f(x)$, elle peut être lue comme la hauteur de la courbe au point x (voyez la figure 4). La représentation graphique de f nous permet aussi de visualiser le domaine de définition et l'ensemble image de f sur les axes Ox et Oy respectivement, comme sur la figure 5.

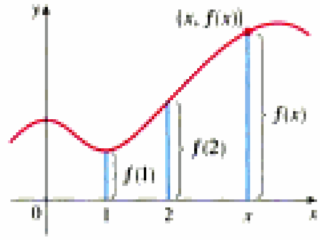


FIGURE 4

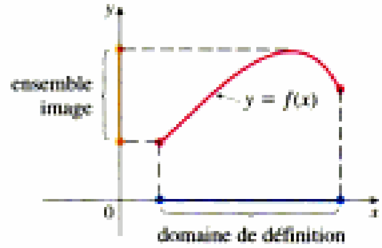


FIGURE 5

EXEMPLE 1 ■ La figure 5 montre le graphique d'une fonction f.

a) Calculez les valeurs de $f(1)$ et de $f(5)$.

b) Quel est le domaine de définition de f et quel est son ensemble image ?

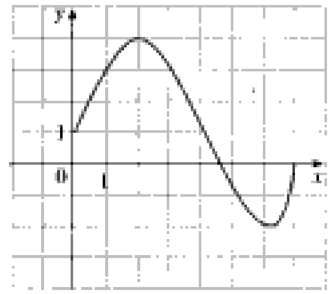


FIGURE 6

SOLUTION

a) Nous lisons sur la figure 6 que la courbe représentative de f passe par le point $(1, 3)$, ce qui nous fait dire que la valeur de f en 1 est $f(1) = 3$. (Autrement dit, le point de la courbe qui se trouve au-dessus de $x = 1$ est situé à trois unités de l'axe Ox.)

Quand $x = 5$, la courbe se situe sous l'axe des x à environ 0,7 unités, de sorte que nous estimons que $f(5) \approx -0{,}7$.

La notation des intervalles est précisée à l'annexe A.

b) Nous voyons que $f(x)$ est définie pour $0 \leqslant x \leqslant 7$. Par conséquent, le domaine de définition de f est l'intervalle fermé $[0, 7]$. Comme toutes les valeurs prises par f vont de -2 à 4, l'ensemble image de f est

$$\{y| -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4].$$

EXEMPLE 2 ■ Dessinez la courbe représentative de chaque fonction et déterminez le domaine de définition et l'ensemble image.

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = x^2$

SOLUTION

a) L'équation de la courbe est $y = 2x - 1$ et nous y reconnaissons celle d'une droite de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -1. (Pour rappel, il s'agit de la forme $y = mx + b$ de l'équation d'une droite. Voir l'annexe B.) Le graphique de f est donc celui de la figure 7. Comme l'expression $2x - 1$ est définie pour toutes les valeurs réelles de x, le domaine de définition de f est tout l'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$. Le graphique montre que l'ensemble image est aussi $\mathbb{R}$.

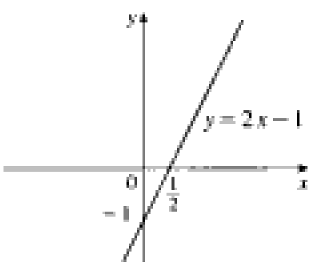


FIGURE 7

b) Puisque $g(2) = 2^2 = 4$ et $g(-1) = (-1)^2 = 1$, nous pouvons marquer les points $(2, 4)$ et $(-1, 1)$ ainsi que quelques autres points du graphique. En les reliant, nous obtenons la courbe de la figure 8. L'équation de cette courbe étant $y = x^2$, il s'agit d'une parabole (voyez l'annexe B). Le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$. L'ensemble image de g comprend toutes les valeurs $g(x)$, c'est-à-dire tous les nombres de la forme x^2. Or, $x^2 \geqslant 0$ quel que soit x et tout y positif est un carré. Il s'ensuit que l'ensemble image de g est $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, +\infty[$ et la figure 8 le confirme.

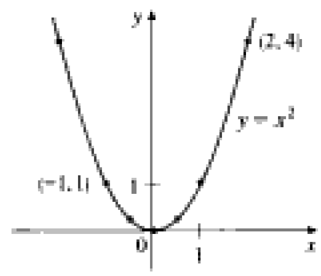


FIGURE 8

■ Les diverses présentations des fonctions

Il y a quatre façons de présenter une fonction :

- verbalement (en la décrivant avec des mots)
- numériquement (en présentant un tableau de valeurs)
- visuellement (en montrant son graphique)
- algébriquement (en la définissant par une formule explicite)

S'il est possible de donner d'une fonction quatre présentations différentes, c'est souvent en passant d'une présentation à une autre qu'on la connaît davantage. À l'exemple 2, nous disposions de la présentation algébrique et sommes passés à la visualisation graphique. Cependant, certaines fonctions sont plus naturellement décrites d'une façon plutôt que d'une autre. Réexaminons sous cet angle les quatre situations que nous avons envisagées au début de cette section.

A. La meilleure présentation que l'on puisse faire de l'aire du cercle comme fonction du rayon est probablement la formule algébrique $A = \pi r^2$, même s'il est possible de dresser une table de valeurs ou de dessiner le graphique (la moitié d'une parabole). Parce que le rayon d'un cercle ne peut qu'être positif, le domaine de définition de la fonction A est $\{r | r > 0\} =]0, +\infty[$ et l'ensemble image est également $]0, +\infty[$.

B. Nous avions décrit la fonction verbalement : $P(t)$ est la population mondiale au temps t. Le tableau de la page 12 est une assez bonne présentation de cette fonction. En reportant les points donnés par le tableau, nous obtenons le graphique (de points) de la figure 9. Cette image donne également une bonne idée de la fonction ; elle englobe d'un seul coup d'oeil toutes les données. Que dire de la présentation par formule ? Il n'est évidemment pas possible d'inventer une formule explicite qui donne exactement l'effectif $P(t)$ de la population à tout moment t. Par contre, il y a moyen de trouver une expression d'une fonction qui prenne *à peu près* les valeurs de $P(t)$. Les méthodes expliquées dans la section 1.7 conduisent à l'approximation

$$P(t) \approx f(t) = (0{,}008306312) \cdot (1{,}013716)^t$$

et la figure 10 permet de juger de la bonne qualité de l'ajustement. La fonction f est appelée un *modèle mathématique* de croissance pour une population. En d'autres mots, c'est une fonction définie par une formule explicite qui se comporte à peu près comme notre fonction initiale. Nous verrons néanmoins que les méthodes du calcul différentiel et intégral peuvent être appliquées à une table de valeurs ; une formule explicite n'est pas indispensable.

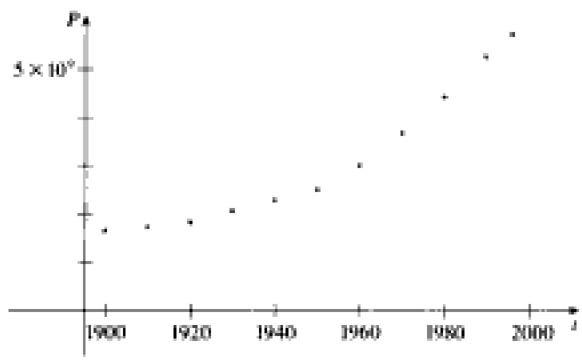


FIGURE 9

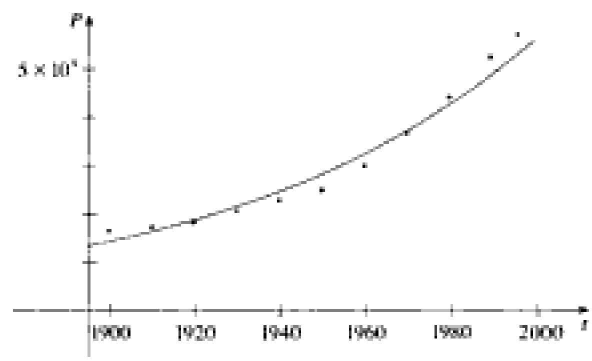


FIGURE 10

La fonction P est du type de celles que l'on obtient lorsqu'on essaie d'appliquer le calcul différentiel et intégral à la réalité. Au départ, une fonction est décrite avec des mots. Ensuite vient une table de valeurs pour cette fonction, issue parfois de la lecture d'instruments d'expérimentation. Nous verrons tout au long de ce livre que, même en présence de quelques valeurs seulement d'une fonction, il est toujours possible d'appliquer les méthodes du calcul différentiel et intégral.

p	$C(p)$ (en euros)
$0 < p \leq 1$	0,32
$1 < p \leq 2$	0,55
$2 < p \leq 3$	0,78
$3 < p \leq 4$	1,01
$4 < p \leq 5$	1,24
⋮	⋮

C. À nouveau, la fonction est décrite en mots : $C(p)$ est le coût d'affranchissement d'une lettre prioritaire de poids p. Au moment d'écrire ces lignes, la règle utilisée par la poste est la suivante : 32 cents pour la première unité de poids (une unité de poids peut être 20 g, par exemple), augmentés de 23 cents par unité supplémentaire. La table des valeurs inscrite dans la marge est la présentation la plus commode de cette fonction, même s'il est possible d'en donner une représentation graphique (voyez l'exemple 10).

D. Le graphique de la figure 1 est le plus naturel pour donner une idée de la fonction accélération verticale $a(t)$. Bien sûr, il serait possible de dresser une table de valeurs ou même de conjecturer une formule d'approximation. Mais, somme toute, ce qu'un géologue désire connaître -amplitudes et modèle- n'est-ce pas le graphique qui en rend la meilleure idée ? (Il en va de même pour la lecture des électrocardiogrammes des malades cardiaques ou des détecteurs de mensonge.) Les figures 11 et 12 montrent les graphiques des accélérations nord-sud et est-ouest du tremblement de terre de Northridge ; joints à celui de la figure 1, ils contiennent la majeure partie de l'information relative au tremblement de terre.

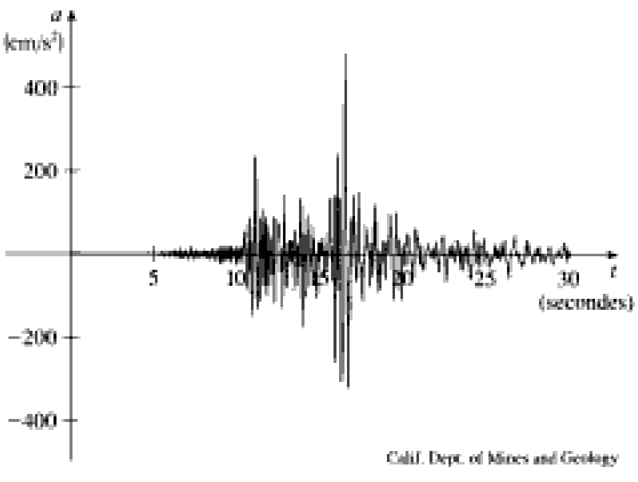


FIGURE 11 Accélération nord-sud du tremblement de terre de Los Angeles

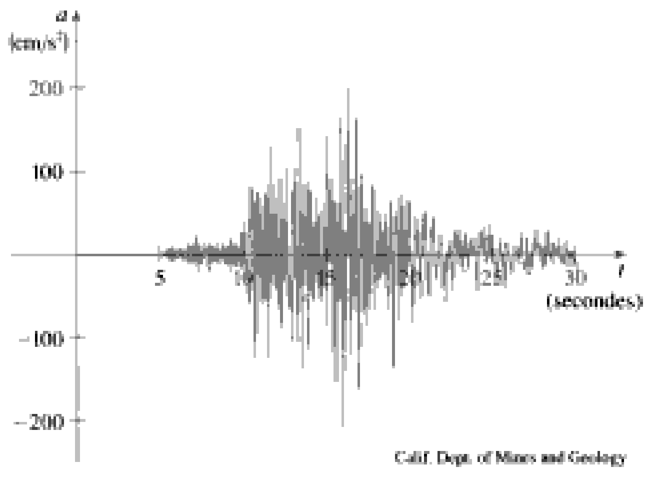


FIGURE 12 Accélération est-ouest du tremblement de terre de Los Angeles

À l'exemple suivant, nous esquissons le graphique d'une fonction présentée verbalement.

EXEMPLE 3 ■ Dès que vous ouvrez un robinet d'eau chaude, la température de l'eau qui en coule varie avec le temps. Dessinez grossièrement une courbe représentative de l'évolution de la température T en fonction du temps t.

SOLUTION Comme l'eau qui coule au début est celle qui a séjourné dans les tuyauteries, sa température est proche de la température ambiante de la pièce. Mais au moment où arrive l'eau du réservoir d'eau chaude, la température T s'élève

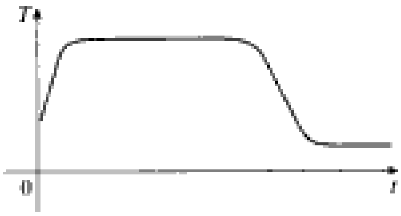


FIGURE 13

rapidement et atteint la température du réservoir. Elle y reste jusqu'à ce que le réservoir soit vide. À ce moment, elle diminue rapidement jusqu'à la température de l'eau de distribution. La figure 13 montre une esquisse de la variation de T en fonction de t que nous venons de décrire.

Une manière d'améliorer la précision du graphique de la fonction dont il est question à l'exemple 3 serait de mesurer la température de l'eau toutes les 10 secondes. En général, les scientifiques procèdent ainsi. Ils récoltent des mesures expérimentales et s'en servent comme base du tracé des graphiques des fonctions, ainsi que l'illustre l'exemple suivant.

t	$C(t)$
0	0,0800
2	0,0570
4	0,0408
6	0,0295
8	0,0210

EXEMPLE 4 ■ Le tableau qui figure dans la marge reprend les observations faites lors de la lactonisation de l'acide hydroxyvalérique à 25 °C. Il s'agit de la concentration $C(t)$ de cet acide (en moles par litre) après t minutes. Dessinez le graphique de la fonction concentration sur la base de ces données. Ensuite, estimez quelle est, selon ce graphique, la concentration après 5 minutes.

SOLUTION Nous reportons les cinq points correspondant aux données du tableau (voyez la figure 14). La méthode d'ajustement des courbes de la section 1.7 pourrait nous fournir un modèle et le graphique s'y rapportant. Mais les points représentatifs des données semblent se présenter tellement bien que nous nous contentons d'y faire passer une courbe lisse à main levée (voyez la figure 15).

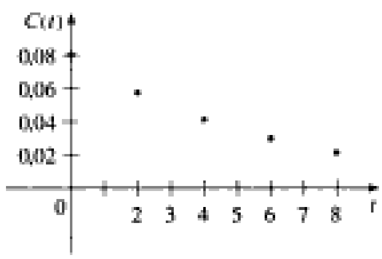


FIGURE 14

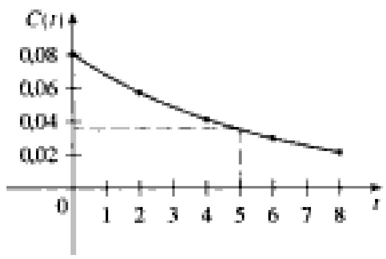


FIGURE 15

D'après cette courbe, après 5 minutes, la concentration peut être estimée à

$$C(5) \approx 0{,}035 \text{ mole/litre.}$$

À l'exemple suivant, nous partons d'une fonction issue d'une situation pratique et décrite verbalement et arrivons à une formule algébrique explicite. Être capable de négocier un tel passage est un atout considérable pour résoudre les problèmes de calcul différentiel et intégral qui consistent à chercher les valeurs extrêmes.

EXEMPLE 5 ■ Un conteneur rectangulaire sans couvercle offre un volume de 10 m^3. Un côté de sa base est deux fois plus long que l'autre. Le matériau pour la fabriquer revient à 10 euros le mètre carré tandis que celui des flancs revient à 6 euros le mètre carré. Exprimez le coût de fabrication en fonction du plus petit des côtés de la base.

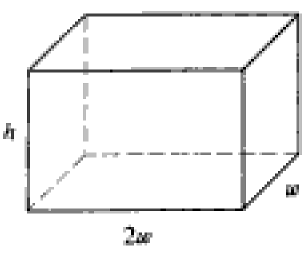


FIGURE 16

SOLUTION Nous commençons par faire un croquis du conteneur en y indiquant les notations w et $2w$ pour les côtés de la base et h pour la hauteur (Figure 16).

Comme l'aire de la base mesure $(2w)w = 2w^2$, son coût de fabrication est $10(2w^2)$. Quant aux faces latérales, deux d'entre elles mesurent wh et les deux autres, $2wh$. Leur coût, dans le matériau ad hoc, est donc $6[2(wh) + 2(2wh)]$. Le coût total s'élève à

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh.$$

Afin d'exprimer C comme fonction de la seule variable w, nous devons éliminer h et pour cela nous utilisons le fait que le volume est de 10 m³. De

$$w(2w)h = 10,$$

nous extrayons

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}.$$

Au moment de construire des fonctions, comme à l'exemple 5, il est sans doute bon de se remémorer les principes de la résolution de problème énoncés à la page 87, et en particulier le premier : *Comprendre le problème*.

Par substitution de cette expression de h dans celle de C, nous obtenons

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}.$$

Finalement,

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

est l'expression de C en fonction de w.

EXEMPLE 6 ■ Cherchez le domaine de définition de chaque fonction :

a) $f(x) = \sqrt{x+2}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Si une fonction est donnée par une formule sans que son domaine de définition soit spécifié, il est admis que le domaine de définition est l'ensemble de tous les nombres pour lesquels la formule a du sens et donne un nombre réel comme réponse.

SOLUTION

a) Comme la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas définie (en tant que nombre réel), le domaine de définition de f ne comprend que les valeurs de x pour lesquelles $x + 2 \geqslant 0$. Ce qui est équivalent à $x \geqslant -2$. Le domaine de définition est donc l'intervalle $[-2, +\infty[$.

b) Étant donné que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)},$$

et que la division par 0 n'est pas licite, nous constatons que $g(x)$ n'est pas définie lorsque $x = 0$ ou $x = 1$. Dès lors, le domaine de définition de g est

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

qui, en termes d'intervalles, s'écrit aussi

$$]-\infty, 0[\,\cup\,]0, 1[\,\cup\,]1, +\infty[.$$

La représentation graphique d'une fonction est une courbe du plan Oxy. Mais alors se pose la question : quelles sont les courbes du plan Oxy susceptibles de représenter une fonction ? Nous y répondons par le test que voici.

Test de la verticale Une courbe du plan Oxy est la représentation graphique d'une fonction si et seulement si aucune droite verticale ne la coupe plus d'une fois.

La justification de ce test de la verticale se lit dans la figure 17. Si une droite verticale quelconque $x = a$ ne coupe une courbe qu'une fois, en (a, b), alors une seule image b est associée à a par f. Si au contraire, une droite $x = a$ coupe une courbe deux fois, en (a, b) et en (a, c), alors cette courbe ne peut être la représentation d'une fonction car une fonction ne peut attribuer deux valeurs différentes à a.

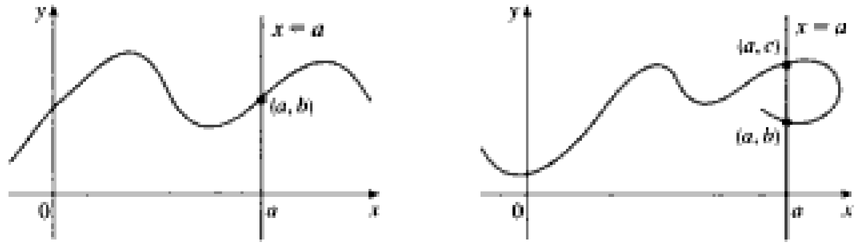


FIGURE 17

Ainsi, la parabole $x = y^2 - 2$ dessinée à la figure 18 (a) ne peut pas être le graphique d'une fonction de x parce que, comme vous pouvez le remarquer, il y a des droites verticales qui coupent la parabole deux fois. La parabole est en fait le graphique de *deux* fonctions de x. En effet, $x = y^2 - 2$ entraîne $y^2 = x + 2$, et de là $y = \pm\sqrt{x+2}$. La moitié supérieure de la parabole est alors le graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$ [celle de l'exemple 6 a)] et la moitié inférieure de la parabole, celui de $g(x) = -\sqrt{x+2}$ [voir les figures 18 (b) et (c)]. Si nous intervertissons les rôles de x et y, nous remarquons que l'équation $x = h(y) = y^2 - 2$ définit x comme une fonction de y (dans laquelle y est la variable indépendante et x, la variable dépendante) et la parabole apparaît maintenant comme la représentation graphique de la fonction h.

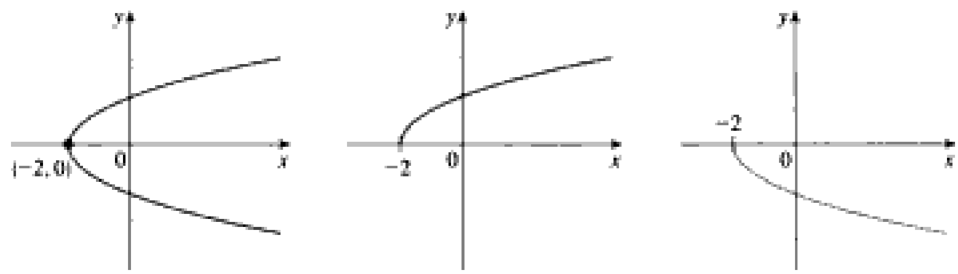


FIGURE 18 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

■ Fonctions définies par morceaux

Les fonctions des quatre exemples suivants sont définies par différentes formules selon les parties de leur domaine de définition.

EXEMPLE 7 ■ Une fonction f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculez $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ et représentez la fonction graphiquement.

SOLUTION Il faut se souvenir qu'une fonction est une règle. Dans le cas présent, la règle est la suivante : regarder d'abord la valeur d'entrée x. Si $x \leqslant 1$, alors la valeur de $f(x)$ est $1 - x$. Par contre, si $x > 1$, la valeur de $f(x)$ est x^2.

$$\text{Comme } 0 \leqslant 1, \quad f(0) = 1 - 0 = 1.$$
$$\text{Comme } 1 \leqslant 1, \quad f(1) = 1 - 1 = 0.$$
$$\text{Comme } 2 > 1, \quad f(2) = 2^2 = 4.$$

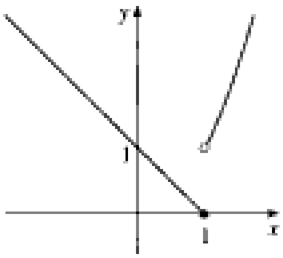


FIGURE 19

Comment faire pour obtenir le graphique de f ? D'une part, comme $f(x) = 1 - x$ lorsque $x \leqslant 1$, nous reconnaissons que la partie du graphique située à gauche de la droite verticale $x = 1$ coïncide avec la droite $y = 1 - x$, de pente -1 et d'ordonnée à l'origine 1. D'autre part, $f(x) = x^2$ lorsque $x > 1$; de ce fait, la partie du graphique située à droite de la droite verticale $x = 1$ coïncide avec la parabole $y = x^2$. Tout ceci nous mène au graphique de la figure 19. Le point de coordonnées $(1, 0)$ est plein pour indiquer qu'il fait partie du graphique au contraire du point de coordonnées $(1, 1)$ qui est vide parce qu'il n'en fait pas partie.

Reportez-vous à l'annexe A pour une révision plus complète de la valeur absolue.

La fonction définie par morceaux suivante est la fonction valeur absolue. Rappelez-vous que la **valeur absolue** d'un nombre a, notée $|a|$, est la distance qui sépare a de 0 sur la droite réelle. Vu que les distances sont toujours positives ou nulles, il se fait que

$$|a| \geqslant 0 \text{ quel que soit } a.$$

Par exemple,

$$|3| = 3, \qquad |-3| = 3, \qquad |0| = 0,$$

$$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1, \qquad |3 - \pi| = \pi - 3.$$

De façon générale, nous avons

$$\boxed{\begin{array}{ll} |a| = a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| = -a & \text{si } a < 0. \end{array}}$$

(Rappelons que quand a est négatif, $-a$ est positif.)

EXEMPLE 8 ■ Tracez le graphique de la fonction $f(x) = |x|$.

SOLUTION De ce qui précède, nous savons que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En procédant de la même façon qu'à l'exemple 7, nous voyons que le graphique de f coïncide avec la droite $y = x$ à droite de l'axe Oy et avec la droite $y = -x$, à gauche du même axe (voyez la figure 20).

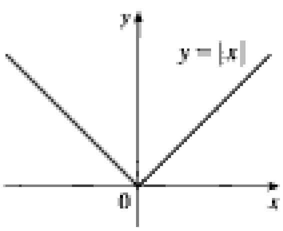


FIGURE 20

EXEMPLE 9 ■ Établissez une formule pour la fonction f dont le graphique est dessiné à la figure 21.

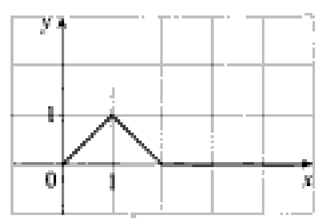


FIGURE 21

SOLUTION Comme la droite qui passe par $(0, 0)$ et $(1, 1)$ a une pente $m = 1$ et une ordonnée à l'origine $b = 0$, son équation est $y = x$. La formule pour f qui correspond à cette partie du graphique est

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

La formule point-pente de l'équation d'une droite est

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Voyez l'annexe B.

La droite qui passe par les points $(1, 1)$ et $(2, 0)$ a une pente $m = -1$ et son équation est

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \quad \text{ou} \quad y = 2 - x.$$

La formule pour f se poursuit ainsi

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 < x \leqslant 2.$$

Nous voyons encore que le graphique de f coïncide avec l'axe Ox pour $x > 2$. En rassemblant toutes ces informations, nous avons finalement pour f une formule en trois morceaux

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

EXEMPLE 10 ■ À l'exemple C au début de cette section, nous avons envisagé l'affranchissement $C(p)$ d'une lettre prioritaire de poids p. En fait, il s'agit d'une fonction définie par morceau puisque, de la table de valeurs, il ressort que

$$C(p) = \begin{cases} 0{,}32 & \text{si } 0 < p \leqslant 1 \\ 0{,}55 & \text{si } 1 < p \leqslant 2 \\ 0{,}78 & \text{si } 2 < p \leqslant 3 \\ 1{,}01 & \text{si } 3 < p \leqslant 4. \end{cases}$$

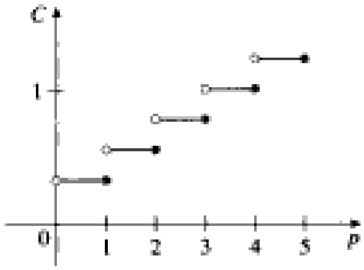


FIGURE 22

Vous pouvez voir le graphique à la figure 22 et constater pourquoi ces fonctions sont parfois appelées **en escaliers**—elles sautent d'une valeur à la suivante. Nous étudierons de telles fonctions au chapitre 2.

■ Symétries

Une fonction f qui satisfait à $f(-x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x de son domaine de définition est dite **paire**. La fonction $f(x) = x^2$ en est un exemple car

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Graphiquement, cette propriété se traduit par une symétrie du graphique par rapport à l'axe Oy (voyez la figure 23). Ce qui signifie qu'ayant déjà dessiné le graphique de f pour $x \geqslant 0$, nous l'obtenons tout entier en lui ajoutant simplement l'image symétrique par rapport à l'axe Oy. Une fonction f qui satisfait à $f(-x) = -f(x)$ pour toutes les valeurs de x de son domaine de définition est dite **impaire**. La fonction $f(x) = x^3$ est impaire parce que

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Le graphique d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine (voyez la figure 24). Si nous avons déjà dessiné le graphique de f pour $x \geqslant 0$, nous l'obtenons

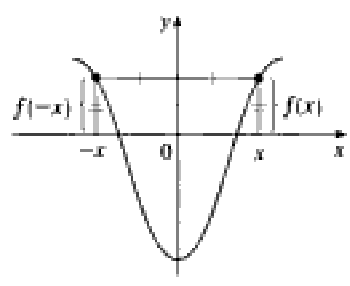


FIGURE 23 Une fonction paire

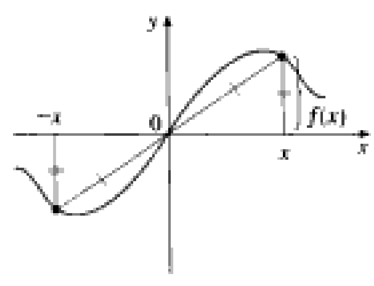


FIGURE 24 Une fonction impaire

tout entier en lui adjoignant simplement l'image obtenue après une rotation de 180° autour de l'origine.

EXEMPLE 11 ■ Examinez si les fonctions que voici sont paire, impaire ou aucun des deux.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUTION

a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Cette fonction est donc impaire.

b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x).$$

Aussi, g est-elle paire.

c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2.$$

Comme $h(-x) \neq h(x)$ et $h(-x) \neq -h(x)$, nous concluons que h n'est ni paire, ni impaire.

La figure 25 montre les graphiques des fonctions de l'exemple 11. En particulier, le graphique de h n'est symétrique ni par rapport à Oy, ni par rapport à l'origine.

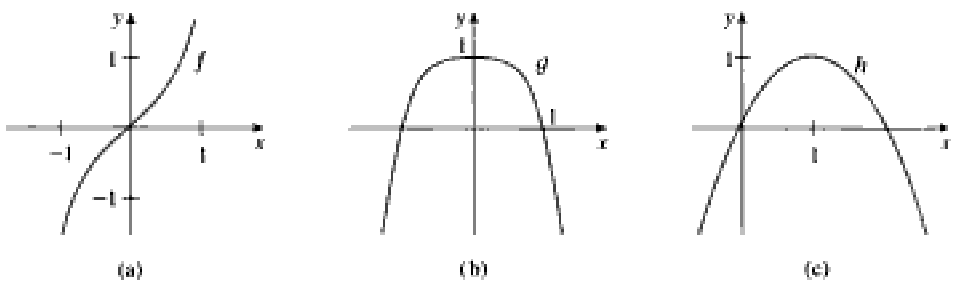


FIGURE 25

■ Fonctions croissantes et décroissantes

La courbe représentée dans la figure 26 monte de A jusqu'à B, descend de B jusqu'à C et monte à nouveau de C jusqu'à D. On dit que la fonction est strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, strictement décroissante sur l'intervalle $[b, c]$ et strictement croissante à nouveau sur $[c, d]$. On remarque que, quels que soient deux points x_1 et x_2 de $[a, b]$ tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) < f(x_2)$. Nous nous servons de cette observation comme définition d'une fonction croissante.

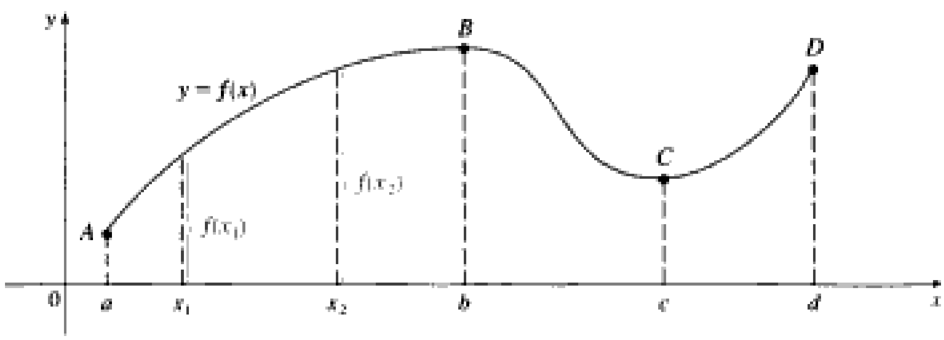


FIGURE 26

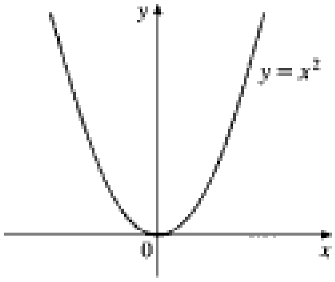


FIGURE 27

> Une fonction f est dite **strictement croissante** sur un intervalle I si
> $$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{pour } x_1 < x_2 \text{ dans } I.$$
> Une fonction f est dite **strictement décroissante** sur un intervalle I si
> $$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{pour } x_1 < x_2 \text{ dans } I.$$

L'élément important dans cette définition est que l'inégalité $f(x_1) < f(x_2)$ doit être satisfaite pour *toute* paire de points x_1 et x_2 de I qui sont tels que $x_1 < x_2$.

Au vu de la figure 27, nous pouvons dire que la fonction $f(x) = x^2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1.1 Exercices

1. Voici la représentation graphique d'une fonction f.

a) Quelle est la valeur de $f(-1)$?

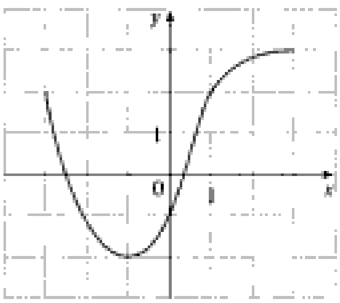
b) Estimez la valeur de $f(2)$.

c) Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = 2$?

d) Estimez les valeurs de x en lesquelles $f(x) = 0$.

e) Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f.

f) Sur quel intervalle f est-elle strictement croissante ?



2. Voici les graphiques de f et g.

a) Que vaut $f(-4)$ et $g(3)$?

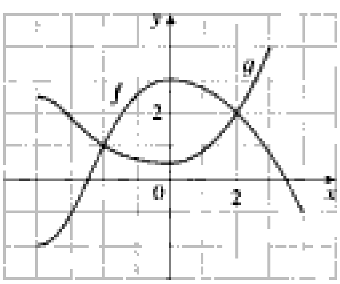
b) Pour quelles valeurs de x est-ce que $f(x) = g(x)$?

c) Estimez la solution de l'équation $f(x) = -1$.

d) Sur quel intervalle voyez-vous f strictement décroissante ?

e) Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f.

f) Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de g.

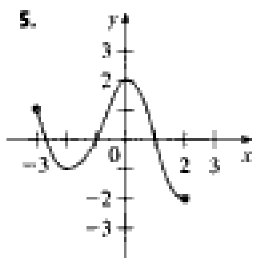


3. Les figures 1, 11 et 12 ont été enregistrées par un sismographe. Au vu de ces figures, estimez les ensembles images des fonctions accélération verticale, nord-sud et est-ouest du sol lors du tremblement de terre en question.

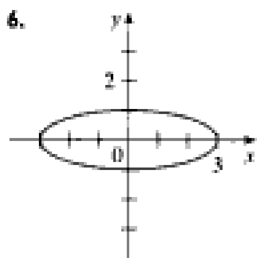
4. Dans cette section, il a été question de fonctions tirées de la vie quotidienne : la population en fonction du temps, l'affranchissement du courrier en fonction du poids, la température de l'eau en fonction du temps. Cherchez trois autres exemples de fonctions décrites verbalement et faisant partie de la vie quotidienne. Que pouvez-vous dire du domaine de définition et de l'ensemble image de chacune ? Si possible faites une rapide esquisse de leur graphique.

5-8 ■ Parmi les courbes que voici lesquelles sont la représentation graphique d'une fonction. Si c'est le cas, déterminez le domaine de définition et l'ensemble image.

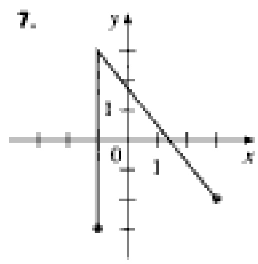
5.



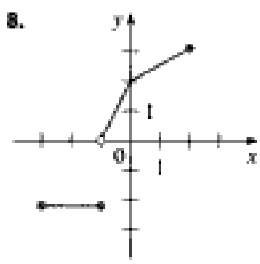
6.



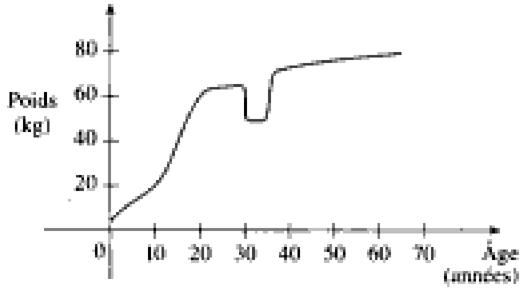
7.



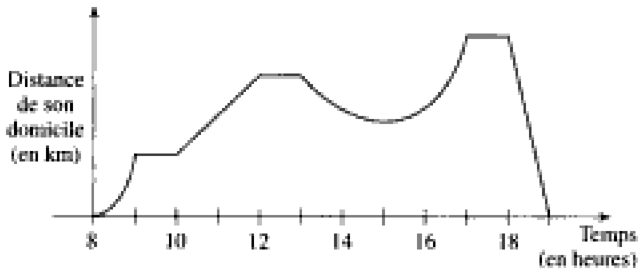
8.



9. La courbe ci-après représente le poids d'une personne en fonction de son âge. Décrivez verbalement comment ce poids a évolué au cours de sa vie. Que pensez-vous qu'il soit arrivé à cette personne lorsqu'elle avait environ 30 ans ?



10. Un représentant de commerce voyage toute une journée. La distance qui le sépare de son domicile varie selon les heures. En voici une représentation graphique. Décrivez la journée de voyage.



10. Vous jetez quelques glaçons dans un verre, vous remplissez le verre d'eau froide et vous laissez le verre reposer sur une table. Décrivez comment change la température de l'eau à mesure que le temps passe. Dessinez ensuite un graphique approximatif de la température de l'eau comme une fonction du temps qui s'écoule.

12. Tracez un graphique rapide de la façon dont les heures de clarté évolue au cours d'une année.

13. Représentez graphiquement l'évolution de la température extérieure au cours d'une journée de printemps.

14. Vous placez une tarte surgelée dans un four et la laissez cuire pendant une heure. Ensuite, vous la sortez du four et la laissez refroidir avant de la manger. Décrivez verbalement d'abord, graphiquement ensuite, comment a évolué la température de la tarte en fonction du temps.

15. Chaque mercredi après-midi, monsieur Dupont tond sa pelouse. Dessinez grossièrement un graphique qui représente la hauteur de l'herbe durant une période de 4 semaines.

16. Un avion quitte un aéroport pour se poser, une heure plus tard, sur un autre aéroport situé à 640 km. Si t désigne le temps en minutes à partir du moment où l'avion a décollé, soit $x(t)$ la distance horizontale qu'il a parcourue et $y(t)$ son altitude.

a) Dessinez un graphique possible de $x(t)$.
b) Dessinez un graphique possible de $y(t)$.
c) Dessinez un graphique possible de la vitesse par rapport au sol.
d) Dessinez un graphique possible de la vitesse verticale.

17. Voici sous forme de tableau les températures T (en °C) qui ont été relevées à l'observatoire météorologique d'Uccle (Belgique) entre minuit et midi une journée d'avril 2000. Le temps t est mesuré en heures à partir de minuit.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	14	13,5	11,5	10	10,5	13,5	15,5

a) Faites un rapide graphique de la température en fonction du temps.
b) Grâce à ce graphique évaluez la température à 11 h.

18. Voici le relevé de la population (en centaines de mille) d'une ville de Californie entre 1984 et 1994. La population au milieu de l'année sert d'estimation.

t	1984	1986	1988	1990	1992	1994
P	695	716	733	782	800	817

a) Dessinez un graphique de P en fonction du temps.
b) D'après ce graphique, quel était l'effectif de la population en 1991 ?

19. Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, calculez $f(0)$, $f(2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(1+\sqrt{2})$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $2f(x)$, et $f(2x)$.

20. Le volume d'un ballon sphérique dont le rayon mesure r cm est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Déterminez une fonction qui représente la quantité d'air qu'il faut souffler dans le ballon pour que son rayon passe de r à $r + 1$ cm.

21-22 ■ Écrivez les expressions de $f(2+h)$, $f(x+h)$ et $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ pour $h \neq 0$.

21. $f(x) = x - x^2$ **22.** $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

23-25 ■ Recherchez le domaine de définition des fonctions.

23. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + x - 6}$ **24.** $h(x) = \sqrt[4]{7 - 3x}$

25. $f(t) = \sqrt[3]{t - 1}$

26. Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et dessinez sa représentation graphique.

27-36 ■ Déterminez le domaine de définition et tracez la courbe représentative de la fonction.

27. $f(x) = 3 - 2x$ **28.** $f(x) = x^2 + 2x - 1$

29. $G(x) = |x| + x$ **30.** $H(x) = |2x|$

31. $f(x) = x/|x|$ **32.** $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

33. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{si } |x| < 1 \\ 7 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

37-42 ■ Quelle est l'expression algébrique de la fonction qui correspond à la courbe décrite.

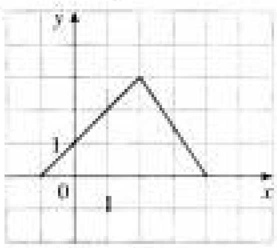
37. La droite qui passe par les points $(-2, 1)$ et $(4, -6)$.

38. La droite qui passe par les point $(-3, -2)$ et $(6, 3)$.

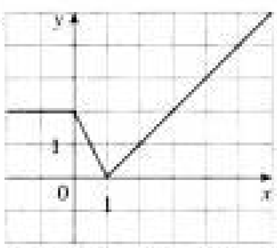
39. La moitié inférieure de la parabole $x + (y - 1)^2 = 0$.

40. La moitié supérieure du cercle $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

41.



42.



43-47 ■ Cherchez une formule pour la fonction décrite et précisez son domaine de définition.

43. Le périmètre d'un rectangle mesure 20 m. Exprimez l'aire du rectangle comme une fonction de la longueur de l'un de ses côtés.

44. L'aire d'un rectangle mesure 16 m^2. Exprimez le périmètre du rectangle comme une fonction de la longueur de l'un de ses côtés.

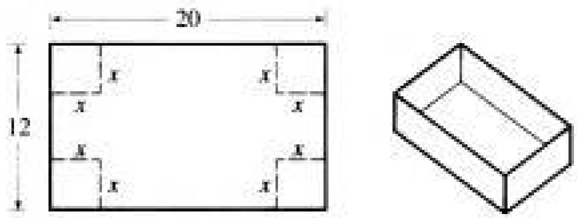
45. Exprimez l'aire d'un triangle équilatéral comme une fonction de la longueur d'un côté.

46. Exprimez la surface d'un cube comme une fonction de son volume.

47. Une boîte rectangulaire de 2 m^3 de volume a une base carrée. Exprimez la surface de cette boîte en fonction de la longueur du côté de sa base.

48. Une fenêtre romane a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si le périmètre de la fenêtre est de 9 m, exprimez l'aire A de la fenêtre comme une fonction de sa largeur x.

49. Pour construire une boîte sans couvercle, on découpe quatre carrés égaux de côté x aux quatre coins d'un carton de forme rectangulaire, puis on plie pour former les bords de la boîte, comme le montre la figure. Exprimez le volume V de la boîte comme une fonction de x.



50. Un chauffeur de taxi demande 2 euros pour le premier kilomètre (ou fraction de kilomètre) et 20 cents pour chaque dixième de kilomètre suivant (ou partie). Exprimez le coût (en euros) d'une course comme fonction de la distance x parcourue (en km) pour $0 < x < 2$, et dessinez le graphique de cette fonction.

51. Dans certains pays, la taxe sur le revenu est établie comme suit. Il n'y a pas de taxe sur un revenu inférieur à 10 000 euros. Tout revenu supérieur à 10 000 euros est taxé à 10 % jusqu'à un revenu de 20 000 euros. Et au-delà de 20 000 euros, la taxe est de 15 %.

a) Dessinez le graphique du taux r de taxation en fonction du revenu R.

b) À combien se monte l'impôt sur un revenu de 14 000 euros ? de 26 000 euros ?

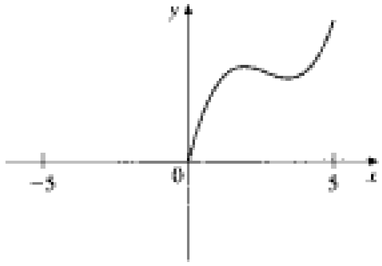
c) Faites un graphique qui permette de lire l'impôt total dû sur un revenu R.

52. Les fonctions de l'exemple 10 et des exercices 50 et 51 a) sont appelées des *fonctions en escaliers* parce que leur graphique a l'allure de marches d'escalier. Donnez deux autres exemples tirés de la vie de tous les jours qui donne lieu à une fonction en escaliers.

53. a) Si le point $(5, 3)$ appartient au graphique d'une fonction paire, quel autre point s'y trouve aussi forcément ?

b) Si le point $(5, 3)$ appartient au graphique d'une fonction impaire, quel autre point s'y trouve aussi forcément ?

54. Voici une partie du graphique d'une fonction f dont le domaine de définition est $[-5, 5]$.



a) Complétez le graphique s'il est supposé que f est une fonction paire.

b) Complétez le graphique s'il est supposé que f est une fonction impaire.

55-60 ■ Déterminez si f est paire, impaire ou aucun des deux. Dans le cas où f est paire ou impaire, exploitez cette information pour tracer la courbe représentative de cette fonction.

55. $f(x) = x^{-2}$

56. $f(x) = x^{-3}$

57. $f(x) = x^2 + x$

58. $f(x) = x^4 - 4x^2$

59. $f(x) = x^3 - x$

60. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

1.2 De nouvelles fonctions avec des anciennes

Être capable de dessiner immédiatement les graphiques de certaines fonctions que l'on rencontre fréquemment s'avère très avantageux lors de la résolution de problèmes en calcul différentiel et intégral. Dans cette section, nous allons passer en revue diverses classes de fonctions et ensuite montrer comment elles se transforment par translation, compression et étirement, et réflexion de leur graphique. Nous allons également montrer comment assembler deux fonctions par simple opération arithmétique élémentaire et par composition.

Types de fonctions

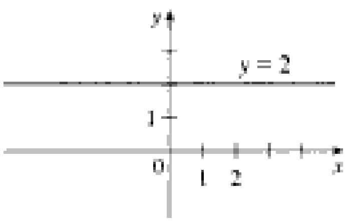


FIGURE 1

Fonctions constantes La fonction constante $f(x) = c$ est définie sur $\mathbb{R}$ et son ensemble image est réduit au seul nombre c. Son graphique est une droite horizontale. Vous pouvez en voir un exemple dans la figure 1 dans le cas où $c = 2$.

Fonctions puissances Une fonction de la forme $f(x) = x^a$, où a est une constante, est appelée une fonction puissance. Nous envisageons plusieurs cas.

a) $a = n$, entier positif

La figure 2 montre les courbes représentatives de $f(x) = x^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5. Nous connaissons déjà l'allure des courbes $y = x$ (une droite qui passe par l'origine et de pente 1) et $y = x^2$ (une parabole, voyez l'exemple 2 de la section 1.1).

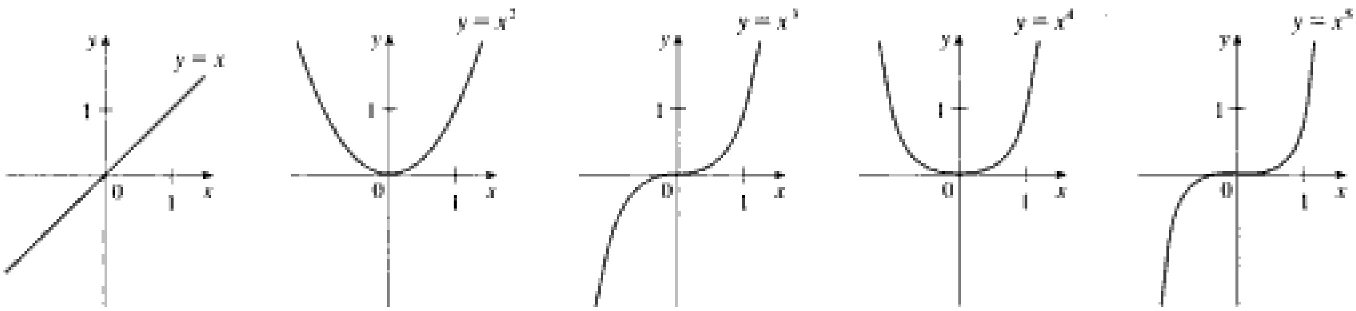


FIGURE 2

Graphiques de $f(x) = x^n$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$

L'allure générale du graphique de $f(x) = x^n$ change selon que n est un nombre pair ou impair. Lorsque n est pair, la fonction $f(x) = x^n$ est paire et son graphique ressemble à la parabole $y = x^2$. Lorsque n est impair, $f(x) = x^n$ est une fonction impaire et son graphique a la même allure que $y = x^3$. La figure 3 montre toutefois que, plus n est grand, plus le graphique s'aplatit à proximité de 0 (lorsque x est petit, x^2 est plus petit, x^3 plus petit encore, x^4 plus petit encore que x^3, etc) tandis que sa pente se raidit pour $|x| \geqslant 1$.

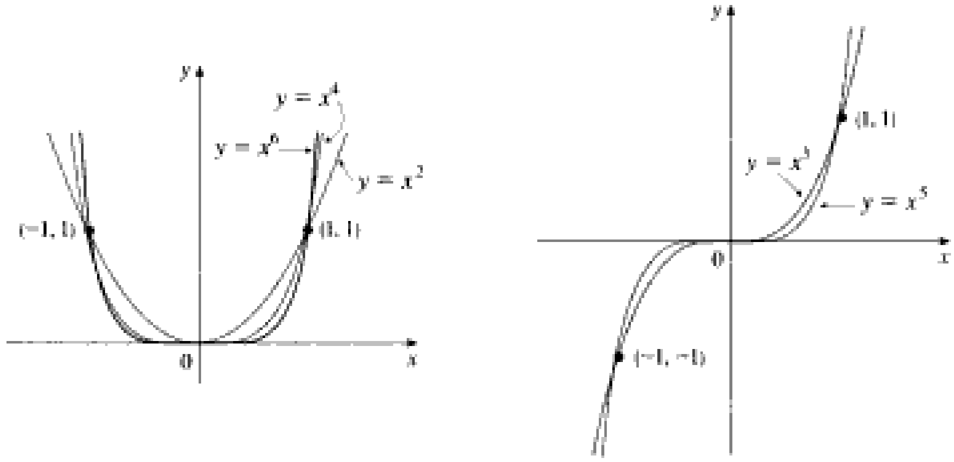


FIGURE 3

b) $a = -1$

Le graphique de la fonction $f(x) = x^{-1} = 1/x$ est présenté à la figure 4. Cette courbe a pour équation $y = 1/x$ ou $xy = 1$ et est une hyperbole équilatère dont les axes de coordonnées sont les asymptotes.

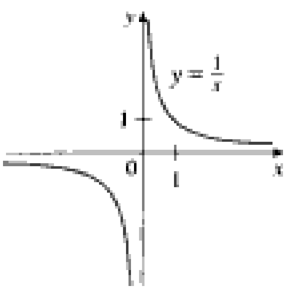


FIGURE 4

c) $a = 1/n$, **n est un entier positif**

La fonction $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ est une **fonction racine**. Lorsque $n = 2$, il s'agit de la fonction racine carrée définie sur $[0, +\infty[$ et dont la courbe représentative est la moitié supérieure de la parabole $x = y^2$ (voyez la figure 5). Lorsque n est un autre nombre pair, le graphique de $y = \sqrt[n]{x}$ est semblable à celui de $y = \sqrt{x}$. À la valeur impaire $n = 3$ correspond la fonction racine cubique $f(x) = \sqrt[3]{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ (rappelez-vous que tout nombre réel a une racine cubique) et dont la courbe est représentée à la figure 5 b). Le graphique de $y = \sqrt[n]{x}$ pour n impair ($n > 3$) ressemble à celui de $y = \sqrt[3]{x}$.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURE 5
Graphiques des fonctions racine

Fonctions polynomiales Une fonction P est appelée un **polynôme** lorsque

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

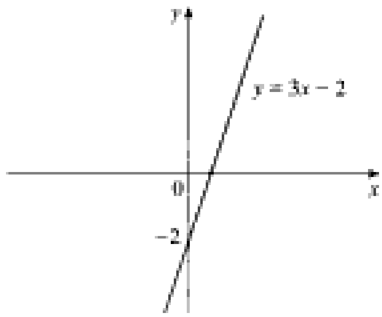
où n est un entier positif et $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes, appelées les **coefficients** du polynôme. Le domaine de définition de n'importe quel polynôme est $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. L'indice n du premier coefficient a_n non nul donne le **degré** du polynôme. Par exemple, la fonction

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

est un polynôme de degré 6.

La géométrie analytique des droites est vue dans l'annexe B.

Un polynôme de degré 1 est de la forme $P(x) = ax + b$ et est appelé une **fonction affine.** Son graphique est la droite $y = ax + b$ (pente a, ordonnée à l'origine b). Ce qui caractérise les fonctions affines est qu'elles croissent à taux constant. Par exemple, la figure 6 montre la droite représentative de la fonction affine $f(x) = 3x - 2$ et une table de quelques valeurs. On remarque que quand x augmente de 0,1, la valeur de $f(x)$ augmente de 0,3, c'est-à-dire trois fois plus que l'accroissement de x. La pente de la droite d'équation $y = 3x - 2$, à savoir 3, peut être vue comme le taux d'accroissement de y par rapport à x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1,0
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2
1,5	2,5

FIGURE 6

Un polynôme de degré 2 est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et est appelé une **fonction quadratique**. La courbe représentative de P est toujours une parabole obtenue par déplacement de la parabole $y = ax^2$ (voyez l'exemple 3).

Un polynôme de degré 3 est de la forme

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

et est appelé une **fonction cubique**. La première des figures 7 montre le graphique d'une cubique tandis que les deux autres présentent dans l'ordre les graphiques d'un polynôme de degré 4 et de degré 5. Nous verrons plus tard pourquoi ces graphiques ont cette allure.

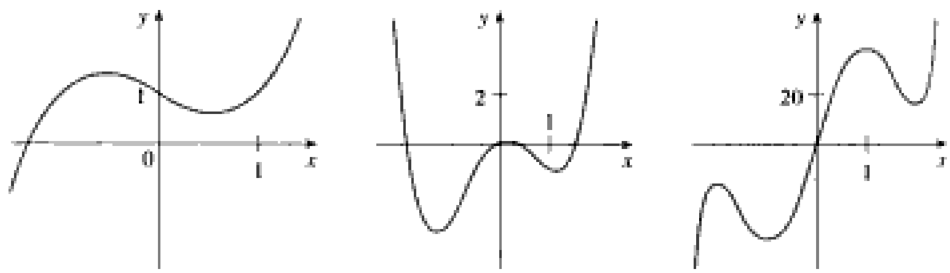


FIGURE 7 (a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Les polynômes sont très souvent employés pour modéliser des situations issues des sciences naturelles ou des sciences sociales. C'est ainsi qu'à la section 3.3 nous expliquerons pourquoi les économistes ont choisi un polynôme $P(x)$ pour représenter le coût de production de x unités d'un bien.

Fonctions rationnelles Une **fonction rationnelle** f est un rapport de deux polynômes

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes. Le domaine de définition comprend toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $Q(x)$. Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

est une fonction rationnelle dont le domaine de définition est $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. Sa représentation graphique est donnée à la figure 8.

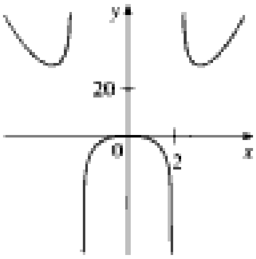


FIGURE 8
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

◆ **Fonctions algébriques** Une fonction est dite **algébrique** si la formule qui la définit ne comporte que des opérations algébriques (addition, soustraction, multiplication, division et radicaux) sur des polynômes. Il est évident que toute fonction rationnelle est une fonction algébrique. Voici deux exemples supplémentaires :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}.$$

Lorsqu'au chapitre 4 nous étudierons les fonctions algébriques nous nous apercevrons que les courbes qui les représentent peuvent prendre toutes sortes de formes. La figure 9 dévoile dès à présent quelques possibilités.

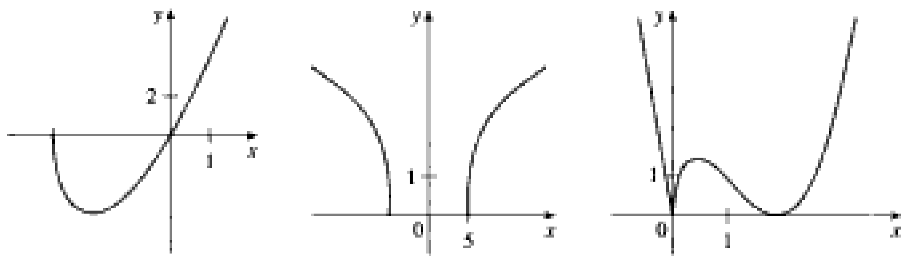
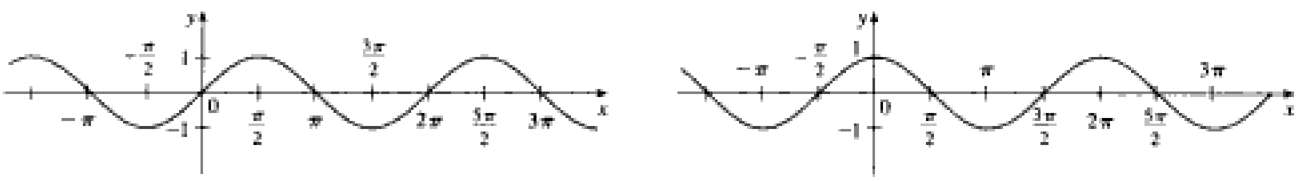


FIGURE 9 (a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

◆ **Fonctions trigonométriques** La trigonométrie et les fonctions trigonométriques tiennent une bonne place dans le formulaire et dans l'annexe C. En analyse, c'est toujours le radian qui sert d'unité de mesure (sauf indication contraire). Par exemple, si nous parlons de la fonction $f(x) = \sin x$, il est entendu que la mesure de l'angle x est en radians. De ce fait, les graphiques des fonctions sinus et cosinus sont ceux de la figure 10.



(a) $f(x) = \sin x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURE 10

Tant pour la fonction sinus que pour la fonction cosinus, le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble image, l'intervalle fermé $[-1, +1]$. Il s'ensuit que, quel que soit x,

$$\boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

De plus, la fonction sinus s'annule pour chaque valeur de x égale à un multiple entier de π. Autrement dit

$$\sin x = 0 \quad \text{quand} \quad x = n\pi \text{ avec } n \text{ entier.}$$

Une importante propriété des fonctions sinus et cosinus est leur caractère périodique, de période 2π. Cela signifie que, quel que soit x,

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Le caractère périodique de ces fonctions les rend particulièrement aptes à modéliser des phénomènes répétitifs comme les marées, les ressorts animés de vibrations ou les ondes sonores.

La fonction tangente est liée aux fonctions sinus et cosinus par l'équation

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

et son graphique est celui de la figure 11. Elle n'est pas définie lorsque $\cos x = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Son ensemble image est $]-\infty, +\infty[$. Il est à noter que la fonction tangente est aussi périodique, mais de période π :

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \text{ quel que soit } x.$$

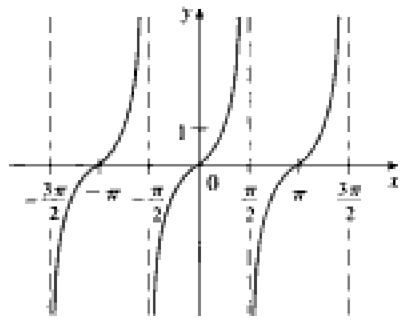


FIGURE 11
$y = \operatorname{tg} x$

Les trois autres fonctions trigonométriques (cosécante, sécante et cotangente) sont les inverses des fonctions sinus, cosinus et tangente. Leur graphique se trouve dans l'annexe C.

Fonctions exponentielles Sont ainsi appelées les fonctions de la forme a^x, où la base a est une constante strictement positive. Vous pouvez voir à la figure 12 les graphiques de $y = 2^x$ et $y = (0{,}5)^x$. Dans les deux cas, le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble image, $]0, +\infty[$.

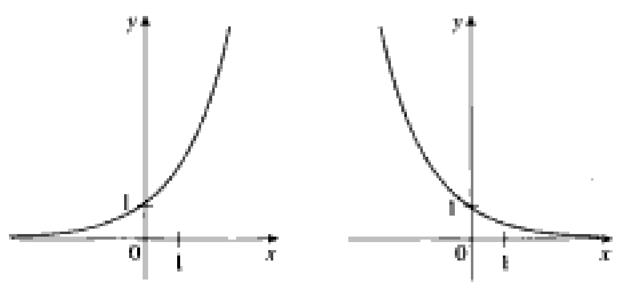


FIGURE 12 (a) $y = 2^x$ (b) $y = (0{,}5)^x$

La section 1.5 est consacrée à l'étude de ces fonctions et nous verrons, à la section 1.7 et ultérieurement, que ces fonctions sont utilisées pour modéliser des phénomènes naturels comme la croissance d'une population (si $a > 1$) et la désintégration radioactive (si $a < 1$).

Fonctions logarithmes Telles sont les fonctions $f(x) = \log_a x$, où la base a est une constante strictement positive. Elles sont les fonctions réciproques des fonctions exponentielles et seront étudiées à la section 1.6. La figure 13 montre les courbes représentatives de quatre fonctions logarithmes de bases différentes. Elles ont toutes les quatre le même domaine de définition, $]0, +\infty[$, le même ensemble image, $]-\infty, +\infty[$ et elles croissent lentement à partir de $x = 1$.

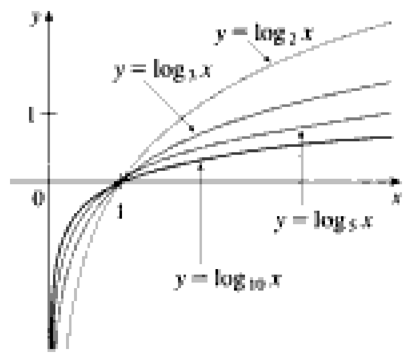


FIGURE 13

Fonctions transcendantes Sont ainsi appelées les fonctions qui ne sont pas algébriques. Parmi elles figurent les fonctions trigonométriques et leurs inverses, les fonctions exponentielles et logarithmes, mais aussi un grand nombre de fonctions qui n'ont jamais reçu de nom. Au chapitre 8, nous étudierons des fonctions transcendantes définies par des séries.

EXEMPLE 1 ■ Classez les fonctions suivantes selon un des types de fonctions que nous avons cités.

a) $f(x) = 5^x$ b) $g(x) = x^5$

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUTION

a) $f(x) = 5^x$ est une fonction exponentielle (x est en exposant).
b) $g(x) = x^5$ est une fonction puissance (x est la base).
c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ est une fonction algébrique.
d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ est un polynôme de degré 4.

Les transformations de fonctions

En appliquant certaines transformations au graphique d'une fonction donnée, on obtient les graphiques de fonctions apparentées et on réduit ainsi fortement le travail nécessaire à la recherche de leur graphique. Considérons en premier lieu les **translations**. Si c est un nombre strictement positif, le graphique de $y = f(x) + c$ est juste le même que celui de $y = f(x)$ déplacé vers le haut de c unités (puisque chaque ordonnée y est augmentée de la même quantité c). Semblablement, si $g(x) = f(x - c)$ avec $c > 0$, la valeur de g en x est la même que la valeur de f en

$x - c$ (point situé c unités à gauche de x). De là, le graphique de $y = f(x - c)$ est le même que celui de $y = f(x)$ déplacé de c unités vers la droite (voyez la **figure** 14).

Déplacements verticaux et horizontaux Supposons $c > 0$. Pour obtenir le graphique de
$y = f(x) + c$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers le haut
$y = f(x) - c$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers le bas
$y = f(x - c)$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers la droite
$y = f(x + c)$, déplacez le graphique de $y = f(x)$ de c unités vers la gauche

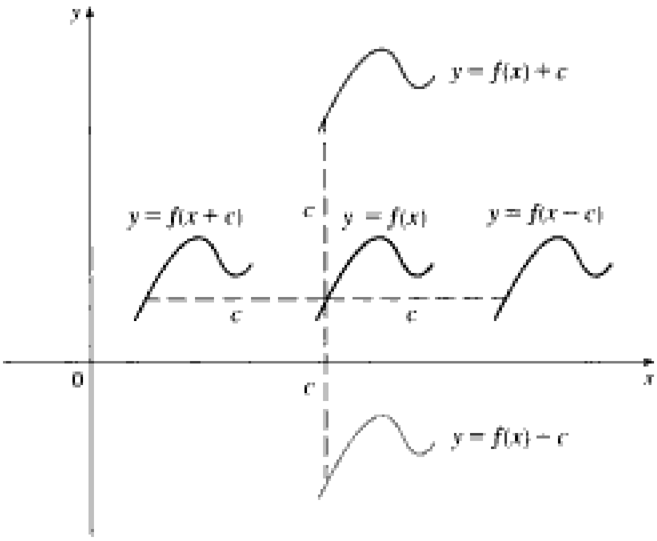


FIGURE 14
Par translation du graphique de f

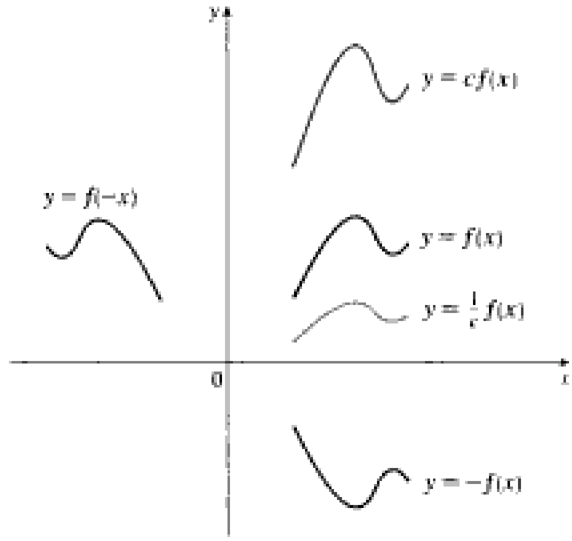


FIGURE 15
Par compression et étirement du graphique de f

Venons-en maintenant aux **étirements et compressions** et aux **réflexions**. Si $c > 0$, alors le graphique de $y = cf(x)$ est le graphique de $y = f(x)$ étiré ou comprimé verticalement d'un facteur c (parce que chaque ordonnée y est multipliée par le même nombre c). Le graphique de $y = -f(x)$ est le graphique de $y = f(x)$ réfléchi par rapport à l'axe Ox parce que le point (x, y) est remplacé par le point $(x, -y)$ (voyez la figure 15 et l'encadré suivant où sont décrits les résultats d'autres étirements et réflexions).

Étirements et réflexions verticaux et horizontaux Supposons $c > 1$. Pour obtenir le graphique de
$y = cf(x)$, étirez verticalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c
$y = (1/c)f(x)$, comprimez verticalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c
$y = f(cx)$, comprimez horizontalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c
$y = f(x/c)$, étirez horizontalement le graphique de $y = f(x)$ d'un facteur c
$y = -f(x)$, prenez l'image symétrique du graphique de $y = f(x)$ par rapport à l'axe Ox
$y = f(-x)$, prenez l'image symétrique du graphique de $y = f(x)$ par rapport à l'axe Oy

La figure 16 montre le résultat de ces étirements et compressions sur la fonction cosinus dans le cas où $c = 2$.

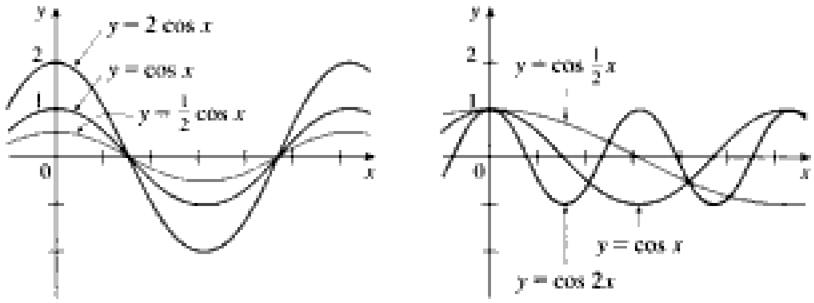
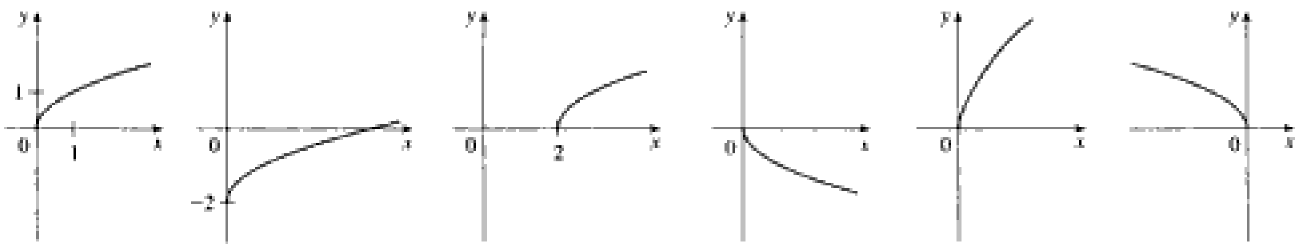


FIGURE 16

EXEMPLE 2 ■ Étant donné la représentation graphique de $y = \sqrt{x}$, appliquez les transformations adéquates pour obtenir le graphique de $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ et $y = \sqrt{-x}$.

SOLUTION La figure 17 (a) reproduit la courbe représentative de $y = \sqrt{x}$ que nous avions déjà à la figure 5. À partir de là, nous traçons $y = \sqrt{x} - 2$ en déplaçant la courbe $y = \sqrt{x}$ de 2 unités vers le bas, $y = \sqrt{x-2}$ en translatant la courbe $y = \sqrt{x}$ de 2 unités vers la droite, $y = -\sqrt{x}$ en prenant l'image symétrique de la courbe $y = \sqrt{x}$ par rapport à l'axe Ox, $y = 2\sqrt{x}$ en étirant verticalement la courbe $y = \sqrt{x}$ d'un facteur 2 et enfin, $y = \sqrt{-x}$ en prenant l'image symétrique de la courbe $y = \sqrt{x}$ par rapport à l'axe Oy.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x-2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURE 17

EXEMPLE 3 ■ Dessinez la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUTION En complétant le carré, nous écrivons l'équation de la courbe cherchée sous la forme

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1.$$

Dès lors, la courbe s'obtient en déplaçant la parabole $y = x^2$ de 3 unités vers la gauche et de 1 unité vers le haut (voyez figure 18).

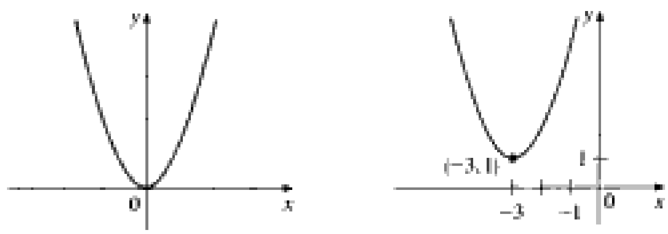


FIGURE 18 (a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

EXEMPLE 4 ■ Faites les graphiques des fonctions suivantes.

a) $y = \sin 2x$ b) $y = 1 - \sin x$

SOLUTION

a) Nous obtenons le graphique de $y = \sin 2x$ en comprimant horizontalement d'un facteur 2 le graphique de $y = \sin x$ (voyez les figures 19 et 20).

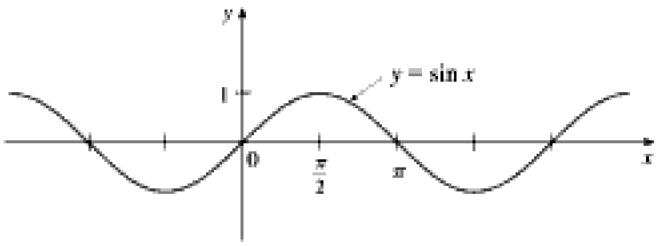


FIGURE 19

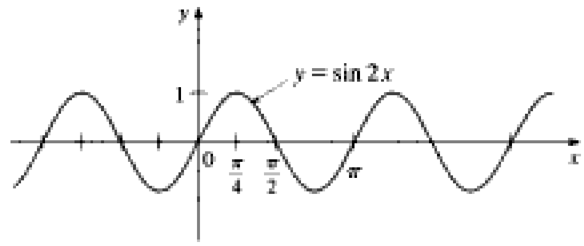


FIGURE 20

b) Pour obtenir le graphique de $y = 1 - \sin x$, nous prenons à nouveau celui de $y = \sin x$ que nous réfléchissons autour de l'axe des x pour produire celui de $y = -\sin x$ et ensuite nous le portons 1 unité plus haut (voyez la figure 21).

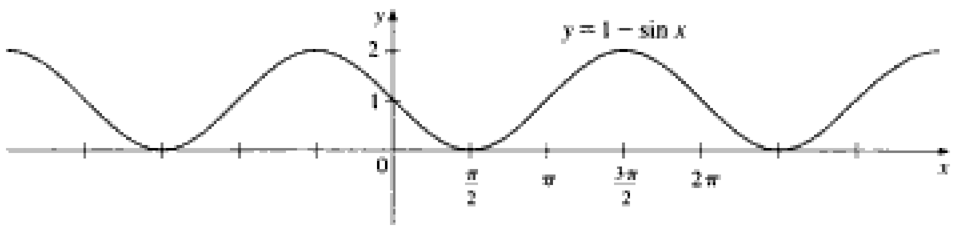


FIGURE 21

Il peut être intéressant de savoir prendre « graphiquement » la valeur absolue d'une fonction. Selon la définition de la valeur absolue, $y = |f(x)| = f(x)$ quand $f(x) \geqslant 0$ et $y = |f(x)| = -f(x)$ quand $f(x) < 0$. Graphiquement, cela revient à laisser inchangée la partie du graphique de $y = f(x)$ située au-dessus de l'axe Ox et à réfléchir autour de l'axe Ox la partie qui est sous l'axe Ox.

EXEMPLE 5 ■ Dessinez la courbe représentative de $y = |x^2 - 1|$.

SOLUTION D'abord, nous traçons la parabole $y = x^2 - 1$ en translatant d'une unité vers la bas la parabole $y = x^2$. C'est la figure 22 (a). Nous pouvons voir qu'entre -1 et $+1$ la courbe est sous l'axe Ox. Nous prenons l'image symétrique de cette partie par rapport à l'axe Ox et laissons telle quelle le reste de la courbe. C'est à la figure 22 (b) le graphique de $y = |x^2 - 1|$.

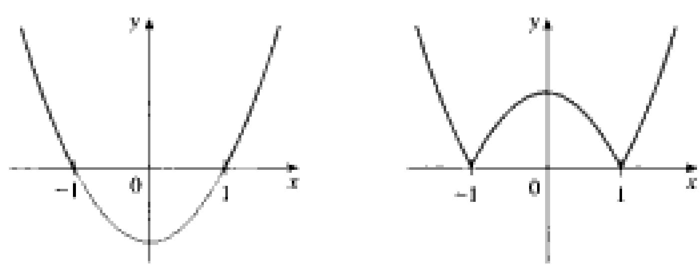


FIGURE 22

(a) $y = x^2 - 1$ (b) $y = |x^2 - 1|$

■ Les opérations sur les fonctions

Tout comme on associe deux nombres réels dans l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division, on peut assembler deux fonctions f et g pour former de nouvelles fonctions, $f+g$, $f-g$, fg et f/g.

La fonction somme $f+g$ est définie par

1 $$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Le membre de droite n'a du sens que si $f(x)$ et $g(x)$ sont définies, autrement dit, si x appartient à la fois au domaine de définition de f et de g. Si le domaine de définition de f est A et celui de g, B, alors le domaine de $f+g$ est leur intersection $A \cap B$.

Le signe $+$ du membre de gauche désigne une addition de *fonctions* tandis que le signe $+$ du membre de droite désigne une simple addition entre les nombres réels $f(x)$ et $g(x)$.

Nous pouvons définir de la même manière la fonction différence $f-g$ et la fonction produit fg et leur domaine de définition est aussi $A \cap B$. Au moment de définir la fonction quotient f/g, nous devons nous souvenir de ne pas diviser par 0.

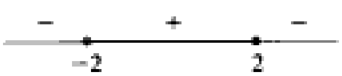
Algèbre des fonctions Soit f et g deux fonctions définies sur A et B respectivement. Alors, les fonctions $f+g$, $f-g$, fg et f/g sont définies comme suit :

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) && \text{domaine de définition} = A\cap B\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x) && \text{domaine de définition} = A\cap B\\
(fg)(x) &= f(x)g(x) && \text{domaine de définition} = A\cap B\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} && \text{domaine de définition} = \{x \in A\cap B \mid g(x) \neq 0\}
\end{aligned}$$

EXEMPLE 6 ■ Étant données les fonctions $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\sqrt{4-x^2}$, formez les fonctions $f+g$, $f-g$, fg et f/g.

Une autre façon de résoudre $4 - x^2 \geqslant 0$:

$$(2-x)(2+x) \geqslant 0$$



SOLUTION Le domaine de définition de $f(x)=\sqrt{x}$ est $[0,+\infty[$. Le domaine de définition de $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ comprend toutes les valeurs de x telles que $4-x^2 \geqslant 0$, ou, ce qui revient au même, $x^2 \leqslant 4$. En prenant la racine carrée des deux membres, il vient $|x| \leqslant 2$, ou $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Le domaine de définition de g est donc l'intervalle $[-2,2]$. L'intersection des domaines de définition de f et g est

$$[0,+\infty[\cap [-2,+2] = [0,2].$$

De là, suivant les définitions, nous avons

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) \quad !!!!! = !!!!! \quad & \sqrt{x}+\sqrt{4-x^2} && 0 \leqslant x \leqslant 2\\
(f-g)(x) \quad !!!!! = !!!!! \quad & \sqrt{x}-\sqrt{4-x^2} && 0 \leqslant x \leqslant 2\\
(fg)(x) \quad !!!!! = !!!!! \quad & \sqrt{x}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4x-x^3} && 0 \leqslant x \leqslant 2\\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad !!!!! = !!!!! \quad & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}} && 0 \leqslant x < 2
\end{aligned}$$

Vous aurez remarqué que le domaine de définition de f/g est l'intervalle $[0,2[$ car il a fallu exclure les valeurs de x en lesquelles $g(x)=0$, à savoir $x=\pm 2$. □

Le graphique de la fonction $f + g$ s'obtient par **addition graphique**. Cela signifie que, pour chaque valeur de x, nous additionnons les ordonnées correspondantes, comme le montre la figure 23. La figure 24 présente ce que cela donne appliqué aux deux fonctions de l'exemple 6.

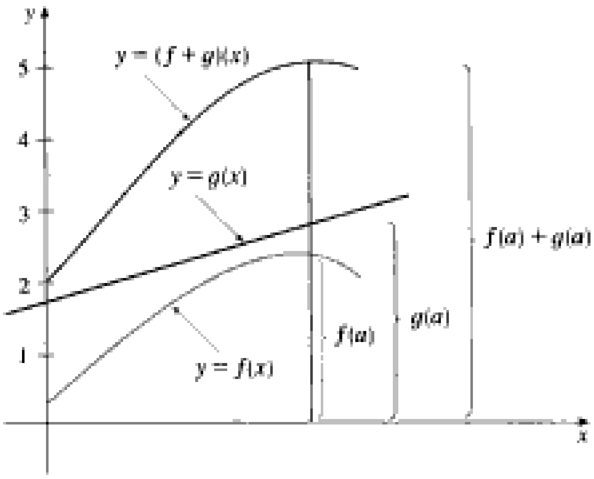


FIGURE 23

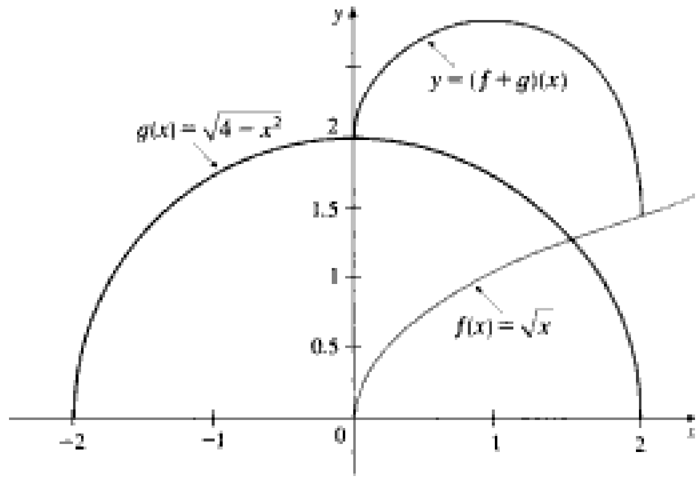


FIGURE 24

Composition de fonctions

Voici encore une autre façon de mettre ensemble deux fonctions pour en obtenir une nouvelle. Supposons, par exemple, que $y = f(u) = \sqrt{u}$ et $u = g(x) = x^2 + 1$. Comme y est une fonction de u et comme u est, à son tour, une fonction de x, il s'ensuit que y est finalement une fonction de x. Cette relation entre y et x se calcule par composition

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Cette opération s'appelle *composition* parce que la nouvelle fonction est *composée* des deux fonctions initiales f et g.

De façon générale, étant données deux fonctions f et g, nous partons d'une valeur de x dans le domaine de définition de g, nous calculons son image $g(x)$. Si le nombre $g(x)$ appartient au domaine de définition de f, nous pouvons calculer la valeur $f(g(x))$. Le résultat est une nouvelle fonction $h(x) = f(g(x))$ obtenue en introduisant g dans f. Elle s'appelle la *composée* de f et g et est notée $f \circ g$ (f rond g).

Définition Étant données deux fonctions f et g, la fonction **composée** $f \circ g$ (appelée aussi la **composée** de f et g) est définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Le domaine de définition de $f \circ g$ est l'ensemble de toutes les valeurs de x du domaine de définition de g qui sont telles que $g(x)$ appartient au domaine de définition de f. Autrement dit, $f \circ g$ est définie là où à la fois $g(x)$ et $f(g(x))$ sont définies. La meilleure image que l'on puisse donner de $f \circ g$ est le diagramme dans lequel les fonctions en jeu sont vues comme des espèces de machine (Figure 25) ou le diagramme sagittal (Figure 26).

FIGURE 25
La machine $f \circ g$ est la composée de la machine g (d'abord) suivie de la machine f

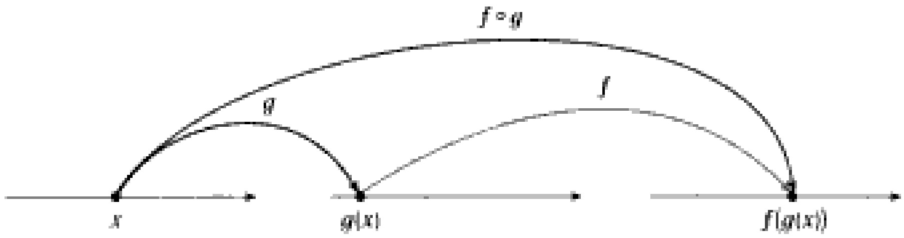


FIGURE 26
Diagramme sagittal de $f \circ g$

EXEMPLE 7 ■ Cherchez les formules qui définissent les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$, si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - 3$.

SOLUTION Nous avons

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2.$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3.$$

REMARQUE • L'exemple 7 montre clairement que, en général, $f \circ g \neq g \circ f$. Souvenez-vous que la notation $f \circ g$ signifie que la première fonction appliquée est g et la seconde f. Ce qui, à l'exemple 7, fait que pour appliquer $f \circ g$, on soustrait d'abord 3, puis on élève au carré ; alors que, pour appliquer $g \circ f$, on devrait d'abord élever au carré, puis soustraire 3.

EXEMPLE 8 ■ Si $f(x) = \sqrt{2-x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$, définissez $f \circ g$ et son domaine de définition.

SOLUTION
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}.$$

Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leqslant b^2$.

Pour que $\sqrt{x}$ soit défini, il faut $x \geqslant 0$. Pour que $\sqrt{2-\sqrt{x}}$ soit défini, il faut $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, ce qui revient à $\sqrt{x} \leqslant 2$, ou encore à $x \leqslant 4$. Finalement, le domaine de définition de $f \circ g$ est l'intervalle fermé $[0, 4]$.

Une méthode géométrique pour construire le graphique d'une fonction composée est expliquée à l'exercice 53.

L'exemple suivant sert à montrer comment, ne disposant pas des formules explicites des fonctions, mais seulement d'une table de leurs valeurs ou de leurs graphiques, on peut malgré tout obtenir le graphique de la fonction composée $f \circ g$.

EXEMPLE 9 ■ Sur la base des graphiques de f et g présentés dans la figure 27, estimez la valeur $h(0{,}5) = (f \circ g)(0{,}5)$ et esquissez le graphique de h.

SOLUTION La courbe représentative de g passe à peu près par l'ordonnée 0,8 quand $x = 0{,}5$. De là, la courbe représentative de f passe à peu près par $-1{,}7$ quand $x \approx 0{,}8$. Ainsi

$$h(0{,}5) = f(g(0{,}5)) \approx f(0{,}8) \approx -1{,}7.$$

De la même façon, nous pourrions tirer des graphiques la table que voici :

x	$-2{,}0$	$-1{,}5$	$-1{,}0$	$-0{,}5$	$0{,}0$	$0{,}5$	$1{,}0$	$1{,}5$	$2{,}0$
$g(x)$	$-1{,}5$	$-1{,}6$	$-1{,}3$	$-0{,}8$	$0{,}0$	$0{,}8$	$1{,}3$	$1{,}6$	$1{,}5$
$h(x) = f(g(x))$	$1{,}0$	$0{,}7$	$1{,}5$	$1{,}7$	$0{,}0$	$-1{,}7$	$-1{,}5$	$-0{,}7$	$-1{,}0$

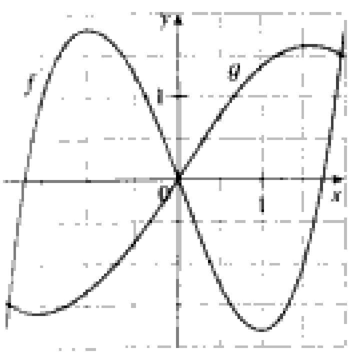


FIGURE 27

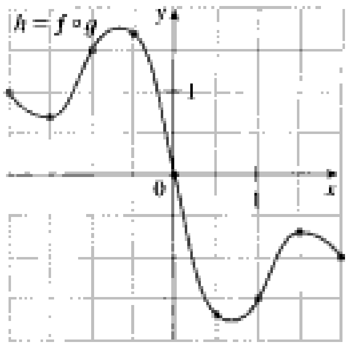


FIGURE 28

En reliant les quelques points reportés de la table, nous obtenons la courbe de la fonction h à la figure 28. Si nous la voulons plus précise, il suffit de reprendre la même procédure pour un plus grand nombre de valeurs de x.

L'opération de composition s'applique aussi à trois fonctions ou davantage. Par exemple, la fonction composée $f \circ g \circ h$ consiste à appliquer d'abord h, ensuite g et finalement f

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

EXEMPLE 10 ■ Trouvez $f \circ g \circ h$ pour $f(x) = x/(x+1)$, $g(x) = x^{10}$ et $h(x) = x + 3$.

SOLUTION

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+3)) \\ &= f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}.\end{aligned}$$

Jusqu'à présent, par composition, nous avons construit des fonctions compliquées à partir de fonctions plus simples. Mais en calcul différentiel et intégral il est souvent utile ou nécessaire de décomposer une fonction compliquée en de plus simples, comme à l'exemple suivant.

EXEMPLE 11 ■ Étant donnée la fonction $F(x) = \cos^2(x+9)$, trouvez des fonctions f, g et h telles que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUTION La formule qui définit F dit : d'abord ajouter 9, puis prendre le cosinus du résultat, enfin, élever au carré. Ce qui fait que nous posons

$$h(x) = x + 9, \quad g(x) = \cos x, \quad f(x) = x^2.$$

Effectivement

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x+9)) = f(\cos(x+9)) \\ &= [\cos(x+9)]^2 = F(x).\end{aligned}$$

1.2 Exercices

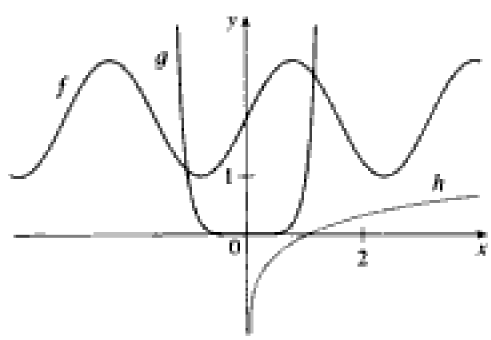
1-2 ■ Rangez chaque fonction dans l'une des familles de fonctions, puissances, racines, polynomiales (avec le degré), rationnelles, algébriques, trigonométriques, exponentielles ou logarithmes.

1. a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
c) $h(x) = x^9 + x^4$ d) $r(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+x}$
e) $s(x) = \text{tg}\, 2x$ f) $t(x) = \log_{10} x$

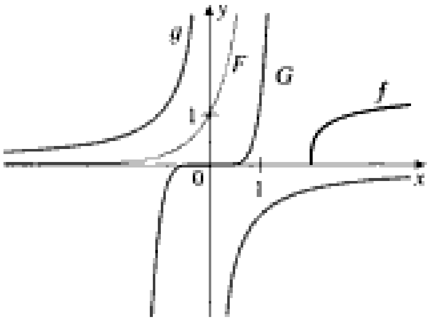
2. a) $y = \dfrac{x-6}{x+6}$ b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$
c) $y = 10^x$ d) $y = x^{10}$
e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ f) $y = \cos\theta + \sin\theta$

3-4 ■ Associez chaque équation avec son graphique. (N'employez pas d'ordinateur ni de calculatrice graphique).

3. a) $y = x^8$ b) $y = \log_8 x$ c) $y = 2 + \sin 2x$



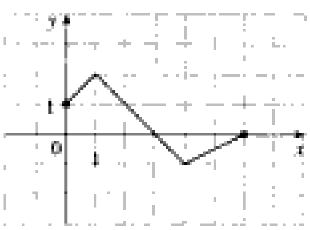
4. a) $y = x^7$ b) $y = 7^x$
c) $y = -1/x$ d) $y = \sqrt[4]{x-2}$



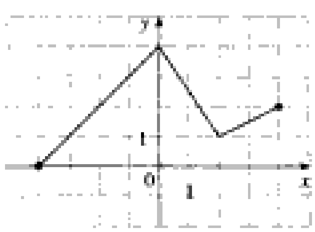
5. Supposons que le graphique de f soit donné. Écrivez des équations pour les graphiques obtenus à partir de celui de f par les transformations suivantes.
a) Translation de 3 unités vers le haut.
b) Translation de 3 unités vers le bas.
c) Translation de 3 unités vers la droite.
d) Translation de 3 unités vers la gauche.
e) Réflexion par rapport à l'axe Ox.
f) Réflexion par rapport à l'axe Oy.
g) Étirement vertical de facteur 3.
h) Compression verticale de facteur 3.

6. Expliquez comment obtenir les graphiques suivants à partir de celui de $y = f(x)$
a) $y = 5f(x)$ b) $y = f(x-5)$
c) $y = -f(x)$ d) $y = -5f(x)$
e) $y = f(5x)$ f) $y = 5f(x) - 3$

7. Voici le graphique de f. Utilisez-le pour tracer celui des fonctions suivantes.
a) $y = f(2x)$ b) $y = f(x/2)$
c) $y = f(-x)$ d) $y = -f(-x)$



8. Voici le graphique de f. Utilisez-le pour tracer celui des fonctions suivantes.
a) $y = f(x+4)$ b) $y = f(x) + 4$
c) $y = 2f(x)$ d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$



9. Comment se présente le graphique de $y = 2\sin x$ par rapport au graphique de $y = \sin x$? À l'aide de votre réponse et de la figure 10 (a), dessinez le graphique de $y = 2\sin x$.

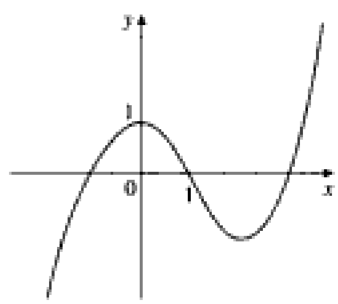
10. Comment se présente le graphique de $y = 1 + \sqrt{x}$ par rapport au graphique de $y = \sqrt{x}$? À l'aide de votre réponse et de la figure 5 (a), dessinez le graphique de $y = 1 + \sqrt{x}$.

11-26 ■ Tracez le graphique de chaque fonction, non pas point par point, mais en partant du graphique d'une des fonctions standard données dans cette section et en lui appliquant les transformations appropriées.

11. $y = -1/x$
12. $y = 2 - \cos x$
13. $y = \operatorname{tg} 2x$
14. $y = \sqrt[3]{x+2}$
15. $y = \cos(x/2)$
16. $y = x^2 + 2x + 3$
17. $y = \dfrac{1}{x-3}$
18. $y = -2\sin \pi x$
19. $y = \dfrac{1}{3}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
20. $y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$
21. $y = 1 + 2x - x^2$
22. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 3$
23. $y = 2 - \sqrt{x+1}$
24. $y = (x-1)^3 + 2$
25. $y = |\cos x|$
26. $y = \left||x| - 1\right|$

27. a) Comment est le graphique de $f(|x|)$ par rapport au graphique de f ?
b) Dessinez la courbe d'équation $y = \sin|x|$;
c) Dessinez la courbe d'équation $y = \sqrt{|x|}$.

28. Utilisez le graphique de f que voici pour tracer celui de $1/f(x)$. Quelles sont à cette fin les particularités les plus importantes de f ? Expliquez comment elles sont exploitées.



29-30 ■ Définissez les fonctions $f+g$, $f-g$, fg et f/g et déterminez leur domaine de définition.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

31-32 ■ Construisez par addition de graphiques celui de $f+g$.

31. $f(x) = x$, $g(x) = 1/x$
32. $f(x) = x^3$, $g(x) = -x^2$

33-36 ■ Définissez les fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ et déterminez leur domaine de définition.

33. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$

34. $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $g(x) = x^2$

35. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{1 - x}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$, $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

37-38 ■ Quelle est l'expression qui définit $f \circ g \circ h$?

37. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2 + 2$

38. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$

39-42 ■ Écrivez la fonction sous la forme $f \circ g$.

39. $F(x) = (x - 9)^5$

40. $F(x) = \sin(\sqrt{x})$

41. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

42. $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

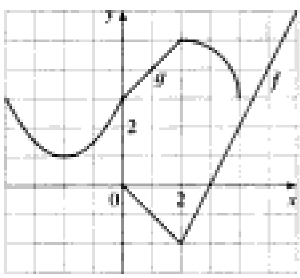
43-44 ■ Écrivez la fonction H sous la forme $f \circ g \circ h$.

43. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

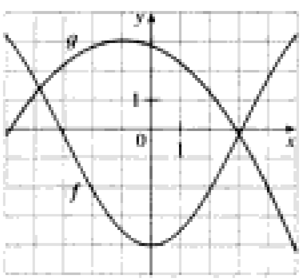
44. $H(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$.

45. Sur simple lecture des graphiques de f et g que voici, évaluez chaque expression ou expliquez pourquoi elle n'est pas définie.

a) $f(g(2))$ b) $g(f(0))$ c) $(f \circ g)(0)$
d) $(g \circ f)(6)$ e) $(g \circ g)(-2)$ f) $(f \circ f)(4)$



46. Utilisez les graphiques donnés de f et g pour estimer les valeurs de $f(g(x))$ pour $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Grâce à ces estimations, esquissez le graphique de $f \circ g$.



47. Une pierre, en tombant dans un lac, crée une onde circulaire qui se propage à la vitesse de 60 cm/s.

a) Cherchez une expression du rayon r de ce cercle comme une fonction du temps t (en secondes).

b) Si A désigne l'aire de ce cercle comme fonction du rayon, écrivez l'expression de $A \circ r$ et donnez-en une interprétation.

48. Un avion vole à la vitesse de 650 km/h à une altitude de 1600 m et passe exactement à la verticale d'une station radar au moment $t = 0$.

a) Exprimez la distance horizontale d (en km) parcourue par l'avion en fonction du temps t.

b) Exprimez la distance s entre l'avion et la station radar comme une fonction de d.

c) Par composition, trouvez l'expression de s en fonction de t.

49. La **fonction de Heaviside** H est définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction est utilisée dans le domaine des circuits électriques pour rendre compte de la soudaine mise sous tension au moment où un interrupteur se ferme.

a) Tracez le graphique de la fonction de Heaviside.

b) Tracez le graphique de la tension $V(t)$ dans un circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 0$ et qu'une tension de 120 V est appliquée instantanément au circuit. Écrivez une formule de $V(t)$ en termes de $H(t)$.

c) Tracez le graphique de la tension $V(t)$ d'un circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 5$ s et qu'une tension de 240 V est appliquée instantanément au circuit. Écrivez une formule de $V(t)$ en termes de $H(t)$. (Remarquez que le retard de 5 s correspond à une translation).

50. La fonction de Heaviside, définie à l'exercice 49, intervient également dans la fonction $y = ctH(t)$, qui rend compte d'un accroissement progressif de la tension ou du courant dans un circuit.

a) Représentez la fonction $y = tH(t)$.

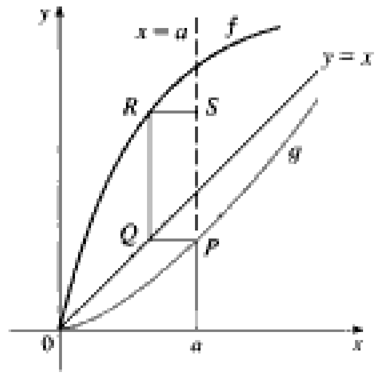
b) Représentez la fonction qui donne la tension $V(t)$ du circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 0$ et qu'une tension est appliquée régulièrement et progressivement jusqu'à atteindre 120 V après 60 s. Écrivez une formule de $V(t)$ en fonction de $H(t)$ pour $t \leqslant 60$.

c) Représentez la fonction qui donne la tension $V(t)$ du circuit si l'interrupteur est fermé au moment $t = 7$ et qu'une tension est appliquée régulièrement et progressivement jusqu'à atteindre 100 V après 25 s. Écrivez une formule de $V(t)$ en fonction de $H(t)$ pour $t \leqslant 32$.

51. Supposons que g soit une fonction paire. Est-il certain que $h = f \circ g$ le soit aussi ?

52. Supposons que g soit une fonction impaire. Est-il certain que $h = f \circ g$ le soit aussi ? Qu'en est-il si f est impaire ? Si f est paire ?

53. Disposant des graphiques de f et g, nous souhaitons tracer celui de $h = f \circ g$. Pour cela, nous prenons le point $(a, 0)$ et traçons la verticale qui coupe la courbe représentative de g au point P. Ensuite, nous traçons une horizontale qui joint P au point Q de la droite $y = x$.



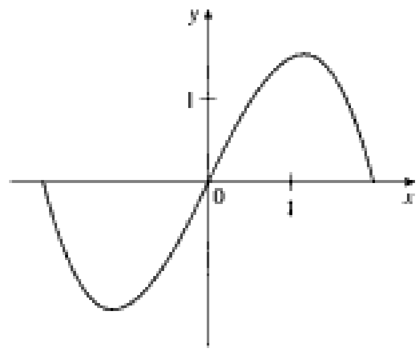
a) Quelles sont les coordonnées de P et de Q ?

b) Si, par une verticale, nous joignons Q au point R de la courbe représentative de f, quelles sont les coordonnées de R ?

c) Montrez que le point S d'intersection de la droite $x = a$ avec l'horizontale tirée depuis R appartient au graphique de h.

d) Refaites la construction $PQRS$ pour d'autres points que celui d'abscisse a afin d'obtenir le graphique de h.

54. Étant donné le graphique de la fonction f, appliquez la méthode de l'exercice 53 pour tracer celui de la fonction $f \circ f$. Commencez par les points d'abscisses $a = 0$, 0,5, 1, 1,5 et 2. Dessinez grossièrement la courbe correspondante au-dessus de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 2$. Complétez le graphique en exploitant le résultat de l'exercice 52.



1.3 Des graphiques par calculatrices ou ordinateurs

Si vous disposez d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de dessin, vous pouvez obtenir les graphiques de fonctions beaucoup plus compliquées et résoudre ainsi des problèmes nettement plus complexes. Mais ces outils peuvent aussi vous tendre quelques pièges que nous allons mettre en évidence.

Bien que les calculatrices graphiques et les ordinateurs soient capables de donner les courbes représentatives très précises des fonctions, nous verrons au chapitre 4 que seules les techniques propres au calcul différentiel et intégral sont à même de garantir que tous les aspects intéressants d'une fonction ont bien été dégagés.

Une calculatrice graphique ou un ordinateur affiche à l'écran une portion du graphique dans un rectangle que nous appellerons **fenêtre**. Par défaut, la fenêtre affichée ne montre souvent qu'une image partielle ou trompeuse, ce qui a pour conséquence qu'il est important de choisir avec soin la fenêtre. Si nous fixons l'étendue des abscisses depuis $Xmin = a$ jusqu'à $Xmax = b$ et l'étendue des ordonnées depuis $Ymin = c$ jusqu'à $Ymax = d$, alors la portion du graphique est inscrite dans le rectangle

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

disposé à la figure 1. Il sera fait référence à ce rectangle comme *fenêtre* $[a, b] \times [c, d]$.

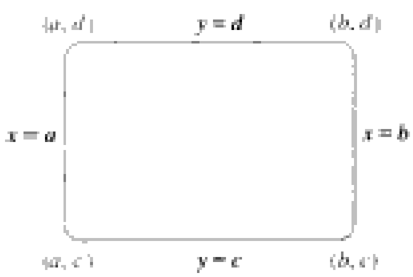


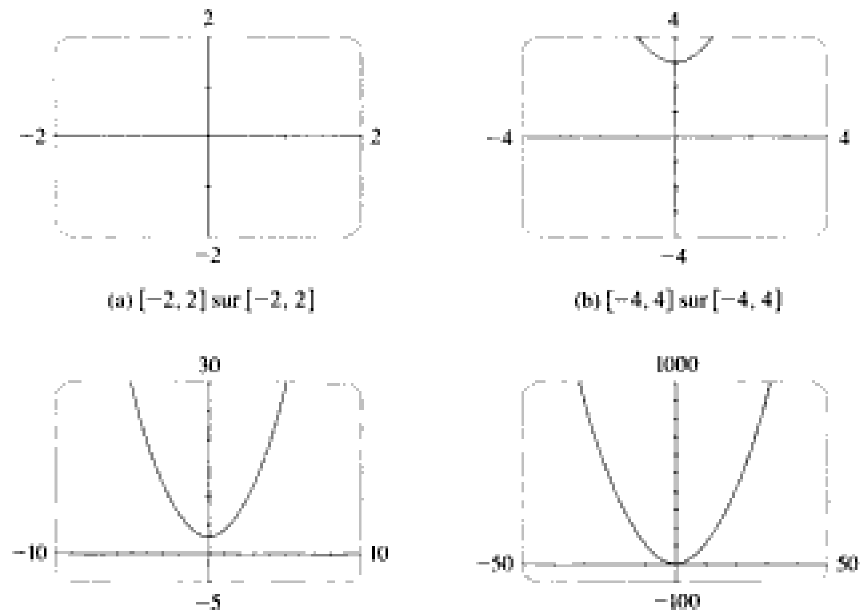
FIGURE 1
La fenêtre $[a, b]$ sur $[c, d]$

Pour dessiner la courbe représentative d'une fonction f, un outil graphique procède pour beaucoup comme vous le feriez vous-même. Il repère un certain nombre de points de la forme $(x, f(x))$ pour des valeurs de x comprises entre a et b. Lorsqu'une valeur de x n'appartient pas au domaine de définition de f, ou si $f(x)$ tombe en dehors de la fenêtre, la machine passe à la valeur suivante. Elle relie chaque point au précédent de manière à former une représentation graphique de f.

EXEMPLE 1 ■ Faites apparaître le graphique de la fonction $f(x) = x^2 + 3$ dans chacune des fenêtres suivantes

a) $[-2, 2]$ sur $[-2, 2]$ b) $[-4, 4]$ sur $[-4, 4]$
c) $[-10, 10]$ sur $[-5, 30]$ d) $[-50, 50]$ sur $[-100, 1000]$

SOLUTION a) Nous spécifions $Xmin = -2$, $Xmax = 2$, $Ymin = -2$ et $Ymax = 2$. Le rectangle de la figure 2 (a) s'affiche. Il est vide ! Il suffit de réfléchir un moment pour comprendre : comme $x^2 \geqslant 0$, $x^2 + 3 \geqslant 3$ quel que soit x. Donc l'ensemble image de la fonction $f(x) = x^3 + 3$ est $[3, +\infty[$ et tombe entièrement hors du rectangle $[-2, 2]$ sur $[-2, 2]$. Les figures 2 (b), 2 (c) et 2 (d) montrent les graphiques correspondant aux spécifications b), c) et d). On peut observer que les figures (c) et (d) sont plus complètes mais que la figure (d) ne permet pas de voir que la courbe coupe l'axe Oy en $y = 3$.



(a) $[-2, 2]$ sur $[-2, 2]$ (b) $[-4, 4]$ sur $[-4, 4]$

(c) $[-10, 10]$ sur $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ sur $[-100, 1000]$

FIGURE 2
Graphiques de $f(x) = x^2 + 3$

Cet exemple montre combien le choix de la fenêtre peut changer totalement l'apparence du graphique. Il est parfois nécessaire d'agrandir le rectangle pour voir plus complètement le graphique ou pour en avoir une vue plus globale, mais un rectangle trop grand peut être trompeur. L'exemple suivant vise à montrer que le domaine de définition et l'ensemble image peuvent parfois contribuer à bien choisir la fenêtre.

EXEMPLE 2 ■ Déterminez le rectangle le plus approprié à une bonne vision du graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ et faites apparaître le graphique dans cette fenêtre.

SOLUTION L'expression $f(x)$ est définie quand

$$\begin{aligned} 8 - 2x^2 \geqslant 0 \quad &\iff \quad 2x^2 \leqslant 8 \quad \iff \quad x^2 \leqslant 4 \\ &\iff \quad |x| \leqslant 2 \quad \iff \quad -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{aligned}$$

Aussi, le domaine de définition de f est l'intervalle $[-2, 2]$. Par ailleurs,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} \approx 2{,}83.$$

D'où l'ensemble image de f est l'intervalle $[0, 2\sqrt{2}]$. Nous choisissons une fenêtre dont les dimensions sont un peu plus grandes que le domaine de définition pour la variable x et un peu plus grandes que l'ensemble image pour la variable y. Les dimensions $[-3, 3]$ sur $[-1, 4]$ fournissent le graphique de la figure 3.

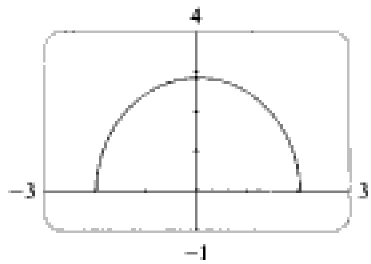


FIGURE 3

EXEMPLE 3 ■ Tracez le graphique de la fonction $y = x^3 - 49x$.

SOLUTION Dans ce cas-ci, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, tous les nombres réels. Voilà qui ne nous aide pas à choisir la taille de la fenêtre. Faisons des essais. Un rectangle de $[-5, 5]$ sur $[-5, 5]$ donne l'image de la figure 4, qui est quasiment vide. La raison tient au fait que, pour toutes les valeurs de x que l'ordinateur a choisies entre -5 et 5, à l'exception de 0, les valeurs correspondantes de $f(x)$ sont supérieures à 5 ou inférieures à -5. Les points du graphique tombent donc en dehors de cette fenêtre.

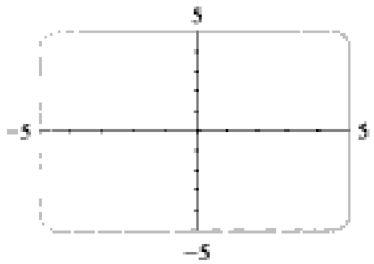


FIGURE 4

Grâce au zoom nous pouvons passer à un rectangle $[-10, 10]$ sur $[-10, 10]$ et voir l'image de la figure 5 (a). On dirait que le graphique se compose de droites verticales et pourtant, vu l'expression de $f(x)$, cela n'est pas possible. Si nous suivons attentivement sur l'écran le traçage de la courbe, nous voyons que la ligne quitte l'écran pour réapparaître ensuite. Cela signifie qu'il y a davantage à voir dans la direction verticale et nous incite à passer au rectangle $[-10, 10]$ sur $[-100, 100]$. Alors s'affiche le dessin de la figure 5 (b). Ce dernier ne réussit pas encore à traduire toutes les caractéristiques de la fonction. Aussi, nous essayons encore $[-10, 10]$ sur $[-200, 200]$ et nous pensons être arrivés maintenant à la bonne fenêtre. Ce n'est qu'au terme du chapitre 4 que nous serons assurés qu'effectivement la figure 5 (c) révèle bien toutes les caractéristiques de la fonction.

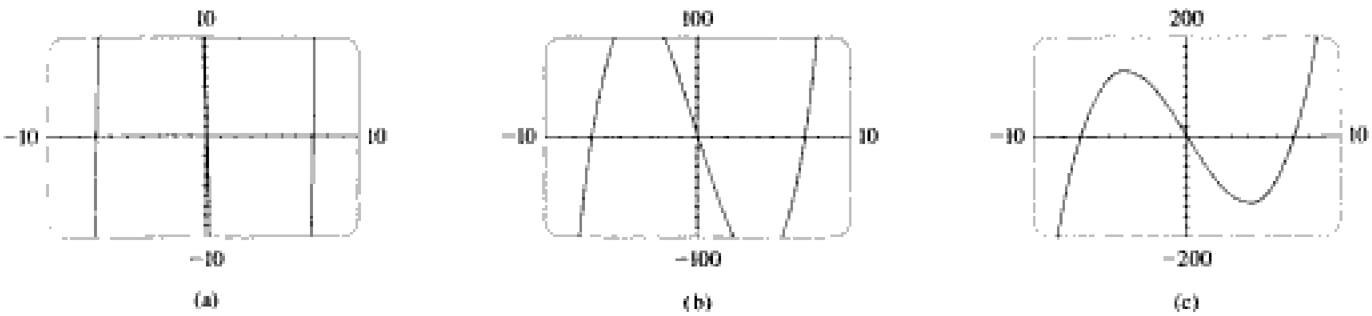


FIGURE 5
$f(x) = x^3 - 49x$

EXEMPLE 4 ■ Tracez le graphique de la fonction $f(x) = \sin 50x$ dans une fenêtre appropriée.

SOLUTION La figure 6 (a) montre le graphique de f qu'a produit une calculatrice dans une fenêtre $[-12, 12]$ sur $[-1{,}5; 1{,}5]$. À première vue, cette courbe semble satisfaisante. Et pourtant, rien qu'en changeant la fenêtre, nous obtenons les autres courbes de la figure 6 qui semblent très différentes de la première. Que se passe-t-il ?

L'allure des différents graphiques de la figure 6 dépend du type de machine utilisée. Il se peut même que les graphiques que vous obtenez avec votre machine ne ressemblent pas à ceux-ci, ou soient même très imprécis.

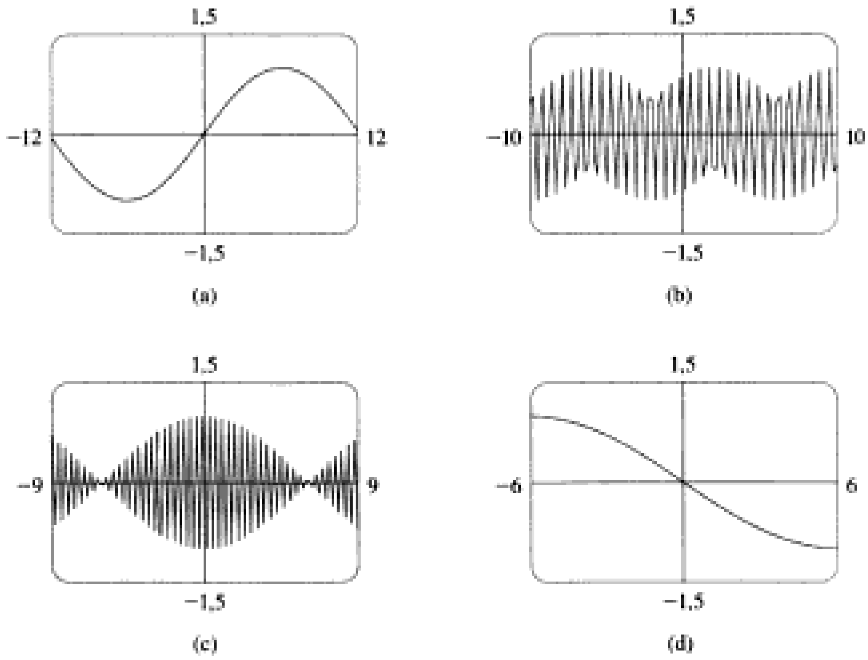


FIGURE 6
Graphiques de $f(x) = \sin 50x$ dans quatre fenêtres différentes

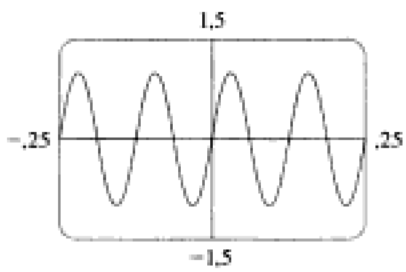


FIGURE 7
$f(x) = \sin 50x$

Pour expliquer les grandes différences entre ces graphiques et déterminer quel est la fenêtre correcte, nous avons besoin de connaître la période de la fonction $y = \sin 50x$. Puisque la période de $\sin x$ est 2π, celle de $y = \sin 50x$ est

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0{,}126.$$

Ceci nous porte à penser que nous ne devrions envisager qu'un petit intervalle pour x afin de voir quelques oscillations seulement de la courbe. La fenêtre $[-0{,}25; 0{,}25]$ sur $[-1{,}5; 1{,}5]$ fait voir le graphique de la figure 7.

Maintenant, nous sommes à même de dire ce qui n'allait pas dans la figure 6. Les oscillations de $y = \sin 50x$ sont tellement rapides que lorsqu'une machine repère des points et les relie entre eux, elle passe à côté de la plupart des valeurs maximales et minimales et donne ainsi du graphique une image très trompeuse. ■

Nous avons vu qu'une mauvaise fenêtre peut induire en erreur sur l'allure de la courbe représentative d'une fonction. Dans les exemples 1 et 3, nous avons résolu le problème en agrandissant la fenêtre. À l'exemple 4, par contre, nous avons dû la réduire. L'exemple que voici envisage une fonction qui nécessite au moins deux fenêtres pour dévoiler l'allure exacte de son graphique.

EXEMPLE 5 ■ Tracez le graphique de la fonction $f(x) = \sin x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUTION La figure 8 fait voir la courbe qu'une calculatrice graphique donne avec une fenêtre $[-6{,}5; 6{,}5]$ sur $[-1{,}5; 1{,}5]$. Cette courbe semble la même que celle de $\sin x$ sauf qu'elle présente quelques bosses. En regardant de plus près dans la fenêtre $[-0{,}1; 0{,}1]$ sur $[-0{,}1; 0{,}1]$, on voit beaucoup plus clairement la forme de ces bosses (voyez la figure 9). C'est que le deuxième terme $\frac{1}{100}\cos 100x$ est beaucoup plus petit que le premier, $\sin x$. Ce n'est donc qu'en tenant compte des deux graphiques qu'on peut avoir une idée précise de la courbe représentative de cette fonction.

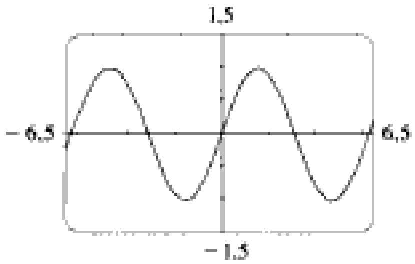


FIGURE 8

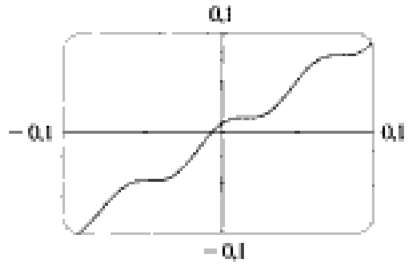


FIGURE 9

EXEMPLE 6 ■ Tracez le graphique de la fonction $y = \dfrac{1}{1-x}$.

SOLUTION La figure 10 (a) montre ce qu'affiche l'écran d'une calculatrice graphique pour une fenêtre $[-9, 9]$ sur $[-9, 9]$. En reliant les points successifs, la calculatrice produit une ligne qui va de haut en bas de l'écran. Cette ligne ne fait pas à proprement parler partie du graphique. Nous savons que le domaine de définition de la fonction $y = 1/(1-x)$ est $\{x \mid x \neq 1\}$. Nous pouvons éliminer cette ligne superflue en essayant de changer l'échelle. Le graphique qui apparaît dans une fenêtre plus petite, de $[-5, 5]$ sur $[-5, 5]$, est bien meilleur [figure 10 (b)].

Une autre façon d'éviter cette ligne superflue est d'adopter sur la calculatrice un mode graphique qui ne relie pas les points.

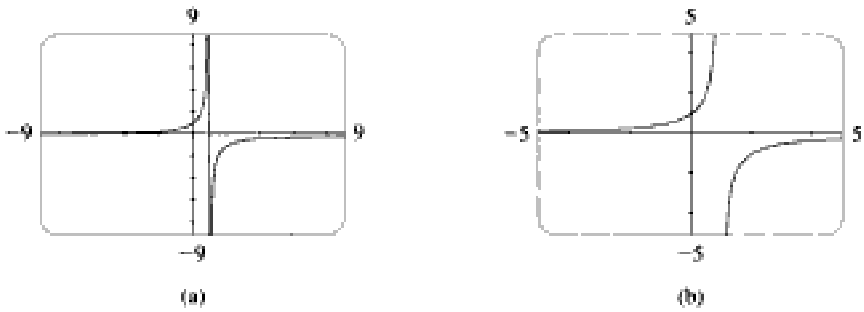


FIGURE 10 $y = \dfrac{1}{1-x}$

EXEMPLE 7 ■ Tracez le graphique de la fonction $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUTION Certaines machines produisent le graphique de la figure 11, tandis que d'autres produisent celui de la figure 12. Nous avons vu à la section 1.2 (figure 5) que c'est le graphique de la figure 12 qui est correct. Alors, pourquoi la figure 11 ? Il se fait que dans certaines machines $x^{1/3}$ est calculé comme $e^{(1/3)\ln x}$ et, $\ln x$ n'étant pas défini pour $x < 0$, seule la moitié droite du graphique est dessinée.

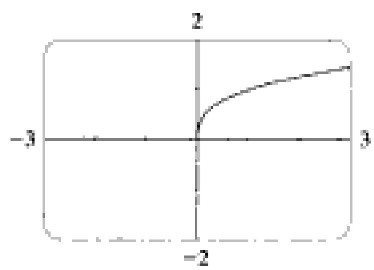


FIGURE 11

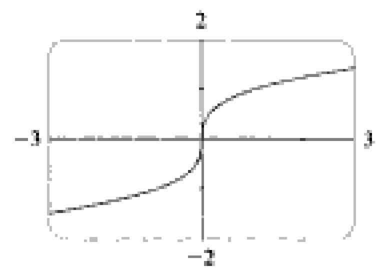


FIGURE 12

À vous de voir lequel de ces deux graphiques produit votre calculatrice. Si c'est celui de la figure 11, vous pouvez obtenir le graphique complet en demandant de dessiner la fonction

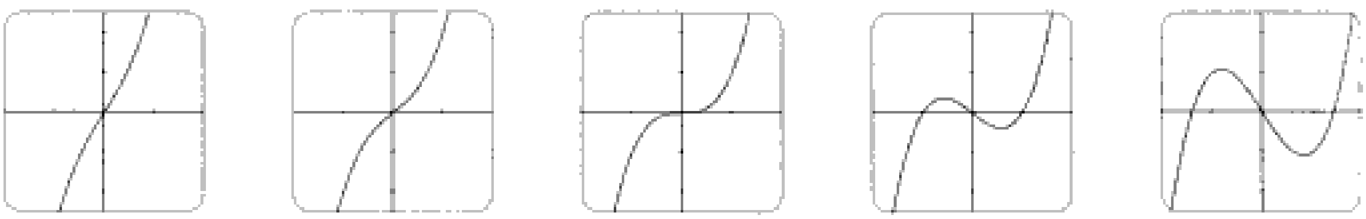
$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3},$$

qui coïncide avec la fonction $\sqrt[3]{x}$ (sauf en $x = 0$).

Pour bien comprendre les liens entre l'expression d'une fonction et son graphique, rien de tel que de dessiner **une famille de fonctions**, c'est-à-dire un ensemble de fonctions dont les équations sont liées. Dans l'exemple suivant, nous esquissons le graphique de la famille des polynômes du troisième degré.

EXEMPLE 8 ■ Tracez le graphique de la fonction $y = x^3 + cx$ pour diverses valeurs du coefficient c. Observez quel effet produit la variation de c sur le graphique.

SOLUTION La figure 13 montre les graphiques de $y = x^3 + cx$ pour $c = 2, 1, 0, -1$ et -2. Nous observons que, lorsque c est positif, la courbe croît de gauche à droite sans maximum ni minimum (sommet ou vallée). Quand $c = 0$, la courbe s'aplatit à l'origine. Quand x est négatif, la courbe présente un maximum et un minimum, d'autant plus accentués que x est négatif.

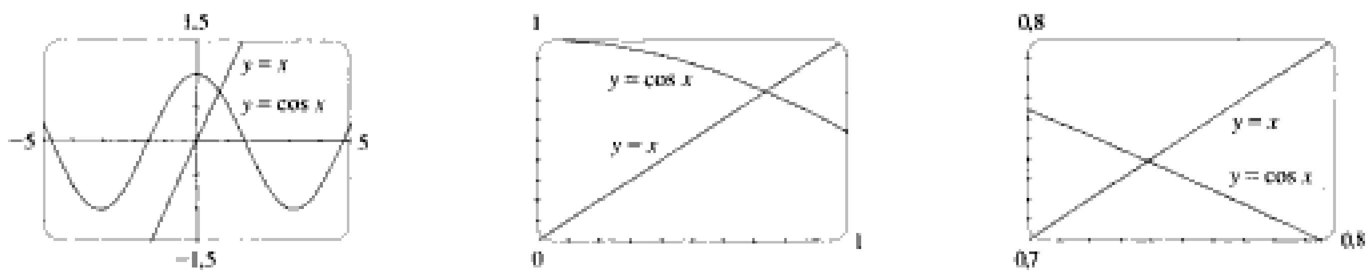


(a) $y = x^3 + 2x$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^3 - x$ (e) $y = x^3 - 2x$

FIGURE 13
Quelques courbes de la famille $y = x^3 + cx$, tracées dans une fenêtre $[-2, 2]$ sur $[-2{,}5; 2{,}5]$

EXEMPLE 9 ■ Cherchez la solution, correcte à deux décimales, de l'équation $\cos x = x$.

SOLUTION Les solutions de l'équation $\cos x = x$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $y = \cos x$ et $y = x$. Le graphique de la figure 14 permet de constater qu'il n'y a qu'une seule solution, située entre 0 et 1. En regardant de plus



(a) $[-5, 5]$ sur $[-1{,}5; 1{,}5]$ échelle de l'axe $Ox = 1$ (b) $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ échelle de l'axe $Ox = 0{,}1$ (c) $[0{,}7; 0{,}8]$ sur $[0{,}7; 0{,}8]$ échelle de l'axe $Ox = 0{,}01$

FIGURE 14 Localiser les racines de $\cos x = x$

près à l'intérieur d'un rectangle plus petit, de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$, nous pouvons lire (figure 14 (b) que la racine se trouve entre 0,7 et 0,8. Regardons encore une fois de plus près, à l'intérieur d'un rectangle de $[0{,}7; 0{,}8]$ sur $[0{,}7; 0{,}8]$ [figure 14 (c)]. Soit en pointant le curseur sur le point d'intersection des deux courbes, soit par lecture, sachant que l'échelle de l'axe Ox est 0,01, nous pouvons dire que la racine de l'équation est aux environs de 0,74.

1.3 Exercices

1. Parmi les fenêtres suivantes, quelle est celle qui, avec votre calculatrice graphique ou votre ordinateur, fournit le meilleur graphique de la fonction

$$f(x) = 10 + 25x - x^3 ?$$

a) $[-4, 4]$ sur $[-4, 4]$

b) $[-10, 10]$ sur $[-10, 10]$

c) $[-20, 20]$ sur $[-100, 100]$

d) $[-100, 100]$ sur $[-200, 200]$

2. Parmi les fenêtres suivantes, quelle est celle qui, avec votre calculatrice graphique ou votre ordinateur, fournit le meilleur graphique de la fonction

$$f(x) = \sqrt{8x - x^2} ?$$

a) $[-4, 4]$ sur $[-4, 4]$ c) $[-10, 10]$ sur $[-10, 40]$

b) $[-5, 5]$ sur $[0, 100]$ d) $[-2, 10]$ sur $[-2, 6]$

3-14 ■ Déterminez la meilleure fenêtre pour voir le graphique de la fonction.

3. $f(x) = \sqrt[4]{256 - x^2}$

4. $f(x) = 0.01x^3 - x^2 + 5$

5. $y = \dfrac{1}{x^2 + 25}$

6. $y = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

7. $y = x^4 - 4x^3$

8. $y = 2x - |x^2 - 5|$

9. $f(x) = \cos 100x$

10. $f(x) = 3 \sin 120x$

11. $f(x) = \sin(x/40)$

12. $y = \operatorname{tg} 25x$

13. $y = 3^{\cos(x^2)}$

14. $y = x^2 + 0{,}02 \sin 50x$

15. Dessinez l'ellipse $4x^2 + 2y^2 = 1$ à partir des graphiques des fonctions correspondantes à chacune des moitiés, inférieure et supérieure, de l'ellipse.

16. Dessinez l'hyperbole $y^2 - 9x^2 = 1$ à partir des graphiques des fonctions correspondantes à chacune des branches, inférieure et supérieure, de l'hyperbole.

17-19 ■ Cherchez toutes les racines, avec deux décimales correctes, de l'équation.

17. $3x^3 + x^2 + x - 2 = 0$

18. $x^4 + 8x + 16 = 2x^3 + 8x^2$

19. $2 \sin x = x$

20. Nous avons observé, à l'exemple 9, que l'équation $\cos x = x$ avait exactement une solution.
    a) Montrez graphiquement que l'équation $\cos x = 0{,}3x$ a trois solutions et situez-les avec une précision de deux décimales.
    b) Calculez approximativement la valeur de m telle que l'équation $\cos x = mx$ ait exactement deux solutions.

21. Grâce aux graphiques, identifiez laquelle des fonctions $f(x) = 10x^2$ ou $g(x) = x^3/10$ est finalement la plus grande (c'est-à-dire la plus grande quand x est très grand).

22. Grâce aux graphiques, identifiez laquelle des fonctions $f(x) = x^4 - 100x^3$ ou $g(x) = x^3$ est finalement la plus grande

23. Quelles sont les valeurs de x qui satisfont à l'inéquation $|\sin x - x| < 0{,}1$?

24. Faites afficher en même temps les courbes représentatives des polynômes $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ et $Q(x) = 3x^5$, d'abord dans une fenêtre de $[-2, 2]$ sur $[-2, 2]$, puis dans une fenêtre de $[-10, 10]$ sur $[-10\,000, 10\,000]$. Qu'observez-vous ?

25. Cet exercice concerne la famille des fonctions $y = \sqrt[n]{x}$, où n est un entier strictement positif.
    a) Dans la fenêtre $[-1, 4]$ sur $[-1, 3]$, faites afficher les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ et $y = \sqrt[6]{x}$.
    b) Dans la fenêtre $[-3, 3]$ sur $[-2, 2]$, faites afficher les courbes d'équations $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ et $y = \sqrt[5]{x}$ (voyez l'exemple 7).
    c) Dans la fenêtre $[-1, 3]$ sur $[-1, 2]$, faites afficher les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ et $y = \sqrt[5]{x}$.
    d) Quelle conclusion pouvez-vous tirer de ces images ?

26. Cet exercice concerne la famille des fonctions $y = 1/x^n$, où n est un entier strictement positif.
    a) Dans la fenêtre $[-3, 3]$ sur $[-3, 3]$, faites afficher les courbes d'équations $y = 1/x$ et $y = 1/x^3$.
    b) Dans la même fenêtre, faites afficher les courbes d'équations $y = 1/x^2$ et $y = 1/x^4$.
    c) Dans la fenêtre $[-1, 3]$ sur $[-1, 3]$, faites afficher toutes les courbes des points a) et b).
    d) Quelle conclusion pouvez-vous tirer de ces images ?

27. Faites le dessin de la fonction $f(x) = x^4 + cx^2 + x$ pour diverses valeurs de c. Comment évolue le graphique selon les valeurs de c ?

28. Faites le dessin de la fonction $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$ pour diverses valeurs de c. Comment évolue le graphique selon les valeurs de c ?

29. Dessinez le graphique de $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6. Comment se comporte le graphique au fur et à mesure que n croît ?

30. Les courbes d'équations

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

portent le nom de **courbes en nez d'obus**. Dessinez-en quelques-unes pour comprendre pourquoi. Que se passe-t-il lorsque c augmente ?

31. Qu'arrive-t-il au graphique d'équation $y^2 = cx^3 + x^2$ lorsque c varie ?

32. Cet exercice explore l'effet de la fonction g dans la composition $y = f(g(x))$.

a) Faites tracer le graphique de la fonction $y = \sin(\sqrt{x})$ dans une fenêtre $[0, 400]$ sur $[-1{,}5; 1{,}5]$. En quoi cette courbe diffère-t-elle de la courbe $\sin x$?

b) Faites tracer le graphique de la fonction $y = \sin(x^2)$ dans une fenêtre $[-5, 5]$ sur $[-1{,}5; 1{,}5]$. En quoi cette courbe diffère-t-elle de la courbe $\sin x$?

1.4 Des courbes paramétrées

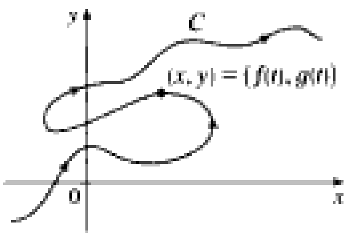


FIGURE 1

Imaginons qu'un point se déplace sur une courbe C comme dans la figure 1. Il n'est pas possible de décrire C par une équation de la forme $y = f(x)$ parce que cette courbe ne satisfait pas au test de la verticale. Mais, à chaque instant t, correspondent les coordonnées x et y du point mobile, ce que nous pouvons écrire $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Un tel couple d'équations est une manière souvent commode de décrire une courbe et donne lieu à la définition suivante.

Supposons que x et y soient toutes les deux des fonctions continues d'une troisième variable t (appelée **paramètre**) selon les équations

$$x = f(t) \qquad y = g(t),$$

(appelées **équations paramétriques**). Chaque valeur de t détermine un point (x, y), que nous marquons dans un repère cartésien. Lorsque t varie, le point $(x, y) = (f(t), g(t))$ se déplace et parcourt la courbe C, qui est appelée **courbe paramétrée**. Le paramètre t ne représente pas nécessairement le temps et nous pourrions très bien choisir une autre lettre pour désigner le paramètre. Néanmoins, dans beaucoup d'applications de courbes paramétrées, t joue le rôle du temps et $(x, y) = (f(t), g(t))$ indique la position d'un point mobile en fonction du temps t.

EXEMPLE 1 ■ Dessinez et reconnaissez la courbe définie par les équations paramétriques

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1.$$

SOLUTION La table donne, pour quelques valeurs de t, le point correspondant sur la courbe. Par exemple, à $t = 0$ correspondent $x = 0$ et $y = 1$, et donc le point

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

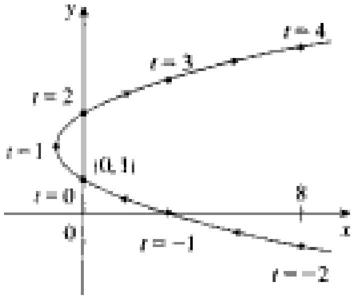


FIGURE 2

$(x, y) = (0, 1)$. Les points de la table sont reportés dans le plan de coordonnées et reliés entre eux pour former une courbe.

Lorsqu'on fait croître t, le point dont la position est déterminée par les équations paramétriques se déplace sur la courbe dans le sens indiqué par les flèches. Il est à noter que, si les points successifs correspondent à des intervalles de temps égaux, ils ne sont pas pour autant à égale distance les uns des autres.

On dirait que la trajectoire décrite par le point et produite à la figure 2 est une parabole. On en obtient confirmation en éliminant le paramètre t comme suit. De la deuxième équation, il vient $t = y - 1$ et en substituant cette expression de t dans la deuxième équation,

$$x = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3.$$

La courbe définie par les équations paramétriques est la parabole $x = y^2 - 4y + 3$. ◻

Puisqu'aucune restriction n'a été mise à l'exemple 1 sur la variable t, on suppose qu'elle peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Parfois t ne peut varier que dans un certain intervalle borné. C'est le cas de la courbe définie par

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4,$$

et produite à la figure 3. C'est un arc de la parabole de l'exemple 1 dont l'origine est en $(0, 1)$ et l'extrémité en $(8, 5)$. La flèche indique le sens dans lequel cet arc est parcouru lorsque t varie de 0 à 4.

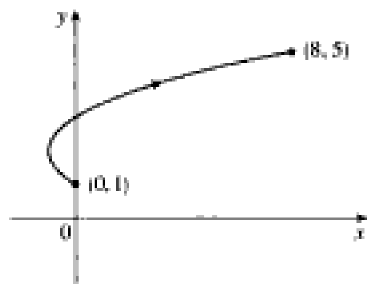


FIGURE 3

De façon générale, la courbe d'équations paramétriques

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

a un **point initial** $(f(a), g(a))$ et un **point final** $(f(b), g(b))$.

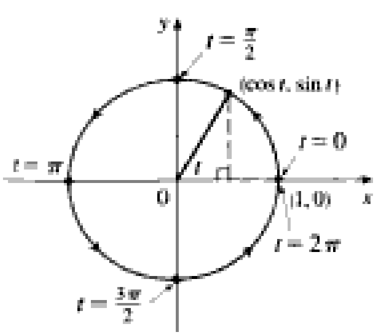


FIGURE 4

EXEMPLE 2 ■ Quelle est la courbe représentée par les équations paramétriques $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$?

SOLUTION Nous pouvons éliminer t en remarquant que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Dès lors, le point (x, y) décrit le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. Dans cet exemple, le paramètre t peut être interprété comme l'angle indiqué sur la figure 4. Lorsque t croît de 0 à 2π, le point $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ fait une fois le tour du cercle dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir du point $(1, 0)$. ◻

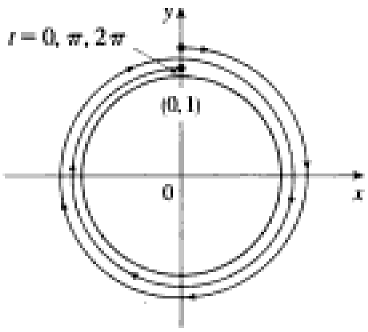


FIGURE 5

EXEMPLE 3 ■ Quelle est la courbe représentée par les équations paramétriques $x = \sin 2t$, $y = \cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$?

SOLUTION À nouveau

$$x^2 + y^2 = \sin^2 2t + \cos^2 2t = 1,$$

de sorte que ces équations paramétriques représentent également le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. Mais, lorsque t croît de 0 à 2π, le point $(x, y) = (\sin 2t, \cos 2t)$ part de $(0, 1)$ et fait deux fois le tour du cercle dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 5). ■

Les exemples 2 et 3 ont mis en exergue que des systèmes d'équations paramétriques différents peuvent représenter la même courbe. Ce qui nous oblige à distinguer entre une *courbe*, qui est un ensemble de points, et une *courbe paramétrée* sur laquelle les points sont parcourus dans un ordre déterminé.

La plupart des calculatrices et des ordinateurs équipés de logiciels de dessin sont capables de tracer des courbes décrites paramétriquement. Il est même instructif de suivre le traçage d'une courbe décrite de cette façon tout simplement parce que les points arrivent selon l'ordre croissant des valeurs du paramètre.

EXEMPLE 4 ■ Faites dessiner par un logiciel approprié la courbe $x = y^4 - 3y^2$.

SOLUTION En posant $t = y$, cette équation prend la forme d'un système d'équations paramétriques

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t,$$

qui fournit la courbe dessinée à la figure 6. Il aurait été possible de résoudre l'équation par rapport à y en quatre fonctions de x et de tracer chacune d'elles séparément, mais les équations paramétriques sont plus faciles à manipuler. ■

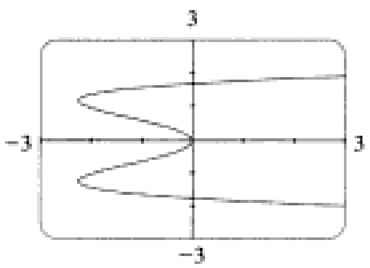


FIGURE 6

De façon générale, s'il nous est demandé de dessiner les courbes d'équations $x = f(y)$, nous pouvons toujours passer par les équations paramétriques

$$x = g(t), \quad y = t.$$

Remarquons que les courbes d'équations $y = f(x)$ (celles qui nous sont familières) peuvent aussi être vues comme des courbes d'équations paramétriques

$$x = t, \quad y = f(t).$$

Les logiciels graphiques se montrent particulièrement efficaces pour tracer des courbes compliquées. Les courbes que vous pouvez voir par exemple aux figures 7 et 8 sont pratiquement impossibles à tracer à la main.

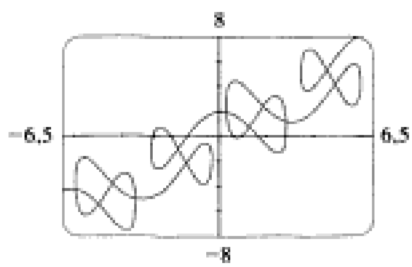


FIGURE 7
$x = t + 2\sin 2t$, $y = t + 2\cos 5t$

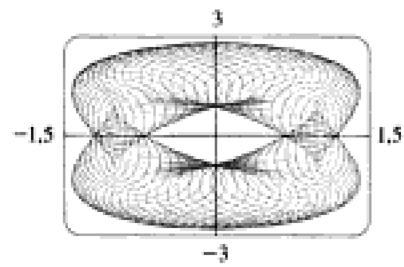


FIGURE 8
$x = \cos t - \cos 80t \sin t$, $y = 2\sin t - \sin 80t$

Un domaine dans lequel les courbes paramétrées sont très fréquemment utilisées est la conception assistée par ordinateur (CAO). À la fin de la section 3.5, le Sujet d'étude concerne des courbes paramétrées particulières, appelées **courbes de Bézier**, largement répandue en fabrication, et spécialement dans le design automobile. Ces courbes sont également employées pour préciser la forme des lettres et d'autres symboles dans les imprimantes laser.

EXEMPLE 5 ■ Dessinez les courbes définies par les équations paramétriques $x = \sin t$, $y = \sin^2 t$.

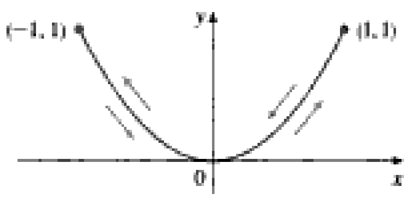


FIGURE 9

SOLUTION Nous observons que $y = x^2$ et donc que le point se meut sur la parabole $y = x^2$. Mais, comme $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$, on a aussi $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et de ce fait, les équations paramétriques ne représentent que les points de la parabole dont l'abscisse est comprise entre -1 et $+1$. Par ailleurs, $\sin t$ est une fonction périodique et par conséquent, le point $(x, y) = (\sin t, \sin^2 t)$ se balance indéfiniment d'avant en arrière sur la parabole entre $(-1, 1)$ et $(1, 1)$ (voyez la figure 9). ■

EXEMPLE 6 ■ Lorsqu'un cercle roule sur une droite, la trajectoire que décrit un de ses points porte le nom de **cycloïde** (voyez la figure 10). Quelles sont des équations paramétriques de la cycloïde, si r est le rayon du cercle et si une des positions du point P est l'origine des coordonnées ?

FIGURE 10

SOLUTION Nous choisissons comme paramètre l'angle de rotation θ du cercle ($\theta = 0$ quand P est à l'origine). Quand le cercle a tourné d'un angle de θ radians, il a roulé sur une distance, depuis l'origine, de longueur

$$|OT| = \overset{\frown}{PT} = r\theta.$$

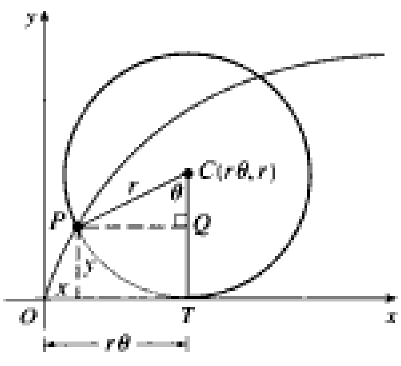


FIGURE 11

Les coordonnées du centre du cercle sont $(r\theta, r)$. Désignons par (x, y) les coordonnées de P et lisons la figure 11 :

$$\begin{aligned} x &= |OT| - |PQ| = r\theta - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \\ y &= |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

Des équations paramétriques de la cycloïde sont dès lors,

$$x = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Une rotation complète du cercle engendre une arche de la cycloïde. Elle est donc parcourue lorsque θ va de 0 à 2π. Bien que les équations (1) soient issues de la figure 11 qui illustre la situation pour θ compris entre 0 et $\pi/2$, elles sont également valables pour d'autres valeurs de θ (il est demandé de le vérifier à l'exercice 27).

Bien qu'il soit possible d'éliminer le paramètre θ des équations (1), l'équation cartésienne en x et y qui en résulte est très compliquée et loin d'être aussi commode à manipuler que les équations paramétriques. ■

Galilée fut un des premiers à étudier la cycloïde. Il proposa de construire des ponts de cette forme et tenta de calculer l'aire situé sous cette courbe. Plus tard, cette courbe fut liée au *problème brachistochrone* ; trouver la trajectoire d'un point A à un point B non situé en dessous de A le long de laquelle un mobile glisse (sous l'influence de la gravité) en le moins de temps possible. Le mathématicien suisse John Bernoulli,

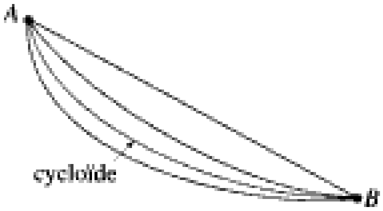


FIGURE 12

FIGURE 13

qui posa ce problème en 1696, démontra, que de toutes les courbes possibles qui relient A à B comme celles de la figure 12, c'est le long d'une arche de cycloïde renversée que le mobile met le moins de temps.

Le physicien hollandais Huygens a montré, lui, que la cycloïde est aussi la solution du *problème tautochrone* ; à savoir, où que soit placé un curseur P sur la cycloïde inversée, il prend le même temps pour arriver en bas (voyez la figure 13). Huygens est l'inventeur d'une horloge à balancier dont le mouvement repose sur des arcs cycloïdaux tels que la durée d'une oscillation complète du balancier soit la même, indépendemment de l'amplitude.

EXEMPLE 7 ■ Étudier la famille des courbes caractérisées par les équations paramétriques

$$x = a + \cos t \qquad y = a \operatorname{tg} t + \sin t.$$

Qu'est-ce que ces courbes ont en commun ? Comment leur forme varie-t-elle lorsque la valeur de a augmente ?

SOLUTION La figure 14 montre les graphiques produits par un logiciel graphique pour les cas $a = -2$, -1, $-0{,}5$, $-0{,}2$, 0, 1 et 2. On remarque que toutes ces courbes (à l'exception de $a = 0$) se composent de deux branches, qui toutes les deux admettent la droite verticale $x = a$ comme asymptote pour x tendant vers a par la droite où par la gauche.

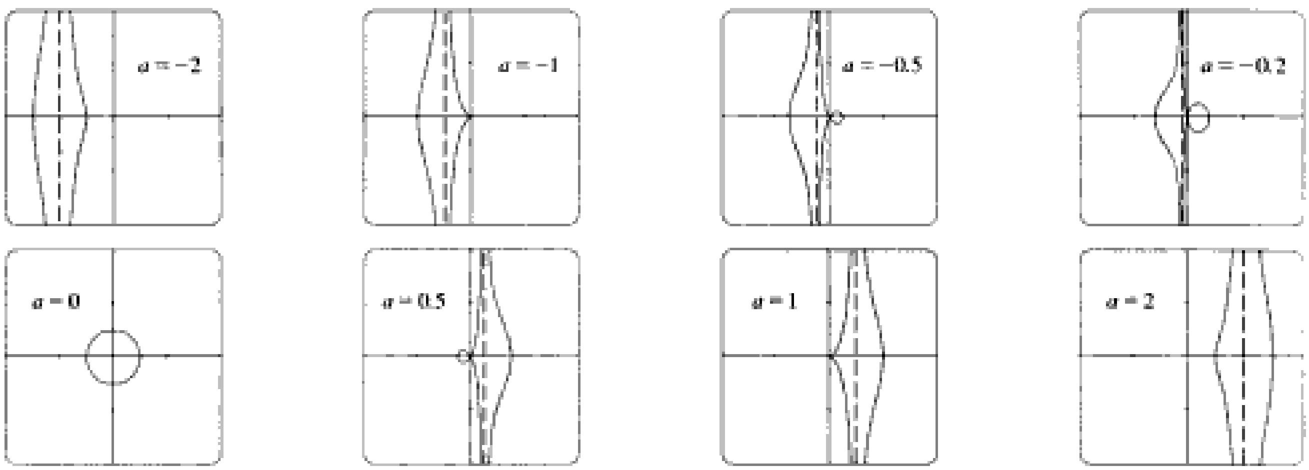


FIGURE 14 Quelques courbes de la famille $x = a + \cos t$, $y = a \operatorname{tg} t + \sin t$, tracées dans une fenêtre $[-4, 4]$ sur $[-4, 4]$

Tant que $a < -1$, les deux branches sont lisses ; mais quand $a = -1$, la branche de droite présente un point anguleux, appelé point de *rebroussement*. Pour a compris entre -1 et 0, le point de rebroussement se mue en une boucle, qui s'élargit au fur et à mesure que a s'approche de 0. Lorsque $a = 0$, les deux branches se fondent en une et forment un cercle (voyez l'exemple 2). Quand a devient strictement positif, c'est la branche de gauche qui présente une boucle et cette boucle se resserre pour devenir un point de rebroussement quand $a = 1$. Lorsque a dépasse 1, la branche de droite devient lisse et de moins en moins incurvée au fur et à mesure que a croît. Remarquez encore que les courbes correspondant aux valeurs opposées de a sont symétriques par rapport à l'axe Oy.

Ces courbes s'appellent des **conchoïdes de Nicomède** du nom du savant grec Nicomède. Il les appela conchoïdes à cause de leur forme de conque marine ou coquille de moule. ■

1.4 Exercices

1-4 ■

a) Utilisez les équations paramétriques pour marquer des points et tracer la courbe. Indiquez avec une flèche le sens dans lequel la courbe est parcourue lorsque t croît.

b) Par élimination du paramètre, déterminez une équation cartésienne de la courbe.

1. $x = 2t - 1, \quad y = 2 - t, \quad -3 \leqslant t \leqslant 3$

2. $x = 3t^2, \quad y = 2 + 5t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

3. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

4. $x = t^2, \quad y = t^3$

5-10 ■

a) Par élimination du paramètre, déterminez une équation cartésienne de la courbe.

b) Dessinez la courbe et indiquez avec une flèche le sens dans lequel la courbe est parcourue lorsque t croît.

5. $x = \sin\theta, \quad y = \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

6. $x = 3\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

7. $x = \sin^2\theta, \quad y = \cos^2\theta$

8. $x = \sec\theta, \quad y = \operatorname{tg}\theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

9. $x = \cos^2\theta, \quad y = \sin\theta$

10. $x = \cos t, \quad y = \cos 2t$

11-15 ■ Décrivez le mouvement d'un point mobile situé en (x, y) lorsque t varie dans l'intervalle donné.

11. $x = \cos \pi t, \; y = \sin \pi t, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

12. $x = 2 + \cos t, \; y = 3 + \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

13. $x = 2\sin t, \; y = 3\cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

14. $x = \cos^2 t, \; y = \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

15. $x = \sin t, \; y = \operatorname{cosec} t, \quad \pi/6 \leqslant t \leqslant 1$

16-17 ■ Dessinez les graphiques des fonctions x et y de t et observez les tendances croissantes et décroissantes de x et y à mesure que t croît. Grâce à ces observations faites une esquisse grossière de la courbe paramétrée. Confirmez votre dessin en confiant les équations paramétriques à un logiciel graphique.

16. $x = 3(t^2 - 3), \quad y = t^3 - 3t$

17. $x = t^4 - 1, \quad y = t^3 + 1$

18. Associez les équations paramétriques aux courbes I à VI. Justifiez votre choix (Ne faites appel à aucun outil graphique).

(a) $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$

(b) $x = t^3 - 1, \quad y = 2 - t^2$

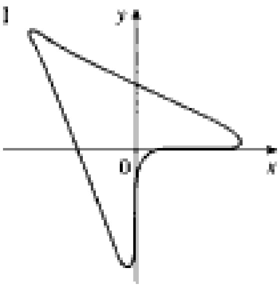
(c) $x = \sin 3t, \quad y = \sin 4t$

(d) $x = t + \sin 2t, \quad y = t + \sin 3t$

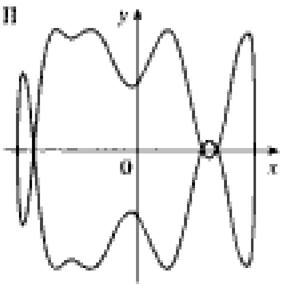
(e) $x = \sin(t + \sin t), \quad y = \cos(t + \cos t)$

(f) $x = \cos t, \quad y = \sin(t + \sin 5t)$

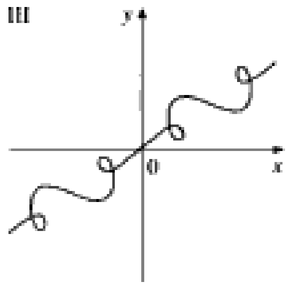
I



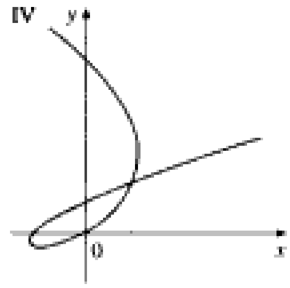
II



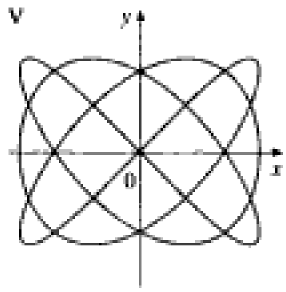
III



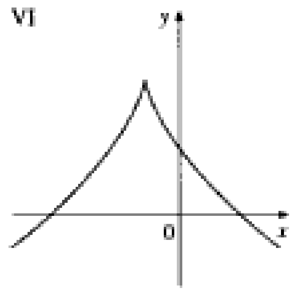
IV



V



VI



19. Montrez que les équations paramétriques

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

où $0 \leqslant t \leqslant 1$, décrivent le segment qui joint les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$.

20. Grâce au résultat de l'exercice 19, faites dessiner à un outil graphique le triangle de sommets $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(1, 5)$.

21. Tracez la courbe d'équation $x = y - 3y^3 + y^5$.

22. Dessinez les courbes $y = x^5$ et $x = y(y - 1)^2$ et déterminez avec une précision d'une décimale les coordonnées de leurs points d'intersection.

23. Écrivez des équations paramétriques de la trajectoire d'un point qui se déplace sur le cercle $x^2 + (y-1)^2 = 4$ de la manière suivante :
a) Un tour, dans le sens des aiguilles d'une montre, à partir du point $(2, 1)$.
b) Trois tours, dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, au départ du point $(2, 1)$.
c) Un demi-tour dans le sens contraire des aiguilles dune montre, au départ de $(0, 3)$.

24. Tracez le demi-cercle décrit par le point mobile à l'exercice 23 c).

25. a) Trouvez des équations paramétriques de l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Indication* : modifiez les équations du cercle à l'exemple 2.]
b) Servez-vous de ces équations paramétriques pour tracer l'ellipse pour $a = 3$ et $b = 1, 2, 4$ et 8.
c) De quelle manière les diverses valeurs de b affectent-elles la forme de l'ellipse ?

26. Lorsqu'un projectile est tiré avec une vitesse initiale de v_0 m/s dans une direction qui fait un angle α avec l'horizontale, étant entendu qu'on fait abstraction de la résistance de l'air, sa position après t secondes est donnée par les équations paramétriques

$$x = (v_0 \cos\alpha)t$$
$$y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

où g est l'accélération due à la gravité (9,8 m/s^2).
a) Si une balle est tirée avec $\alpha = 30°$ et $v_0 = 500$ m/s, quand le projectile touchera-t-il le sol ? Quelle est la hauteur maximale que la balle atteindra ?
b) Vérifiez votre réponse au point a) grâce à un outil graphique. Ensuite, tracez plusieurs trajectoires de la balle pour quelques angles α pour voir où la balle touche le sol. Faites la synthèse de vos observations.
c) Montrez que la trajectoire est parabolique, en éliminant le paramètre.

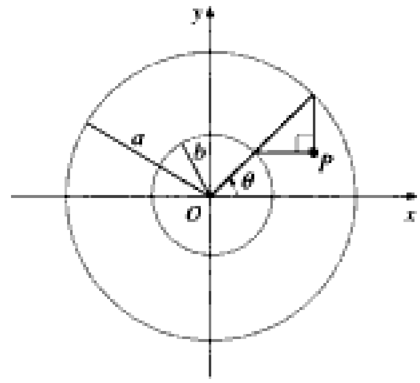
27. Vérifiez que les équations (1) sont aussi valables lorsque $\pi/2 < \theta < \pi$.

28. Soit P un point situé à une distance d du centre d'un cercle de rayon r. La trajectoire que suit le point P lorsque le cercle roule sur une droite s'appelle une **trochoïde**. (Pensez à un point situé sur le rayon d'une roue de bicyclette). La cycloïde est le cas particulier $d = r$ d'une trochoïde. Prenant le même paramètre θ que pour la cycloïde, la droite sur laquelle roule la roue, comme axe Ox et $\theta = 0$ quand P est dans sa position la plus basse, montrez que les équations paramétriques de la trochoïde sont

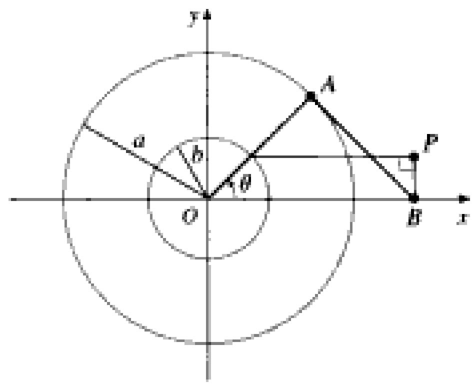
$$x = r\theta - d\sin\theta$$
$$y = r - d\cos\theta.$$

Faites un dessin d'une trochoïde, dans les cas $d < r$ et $d > r$.

29. Si a et b sont des nombres fixés, trouvez des équations paramétriques pour tous les points P déterminés comme le montre la figure, en fonction de θ pris comme paramètre. Éliminez ensuite le paramètre pour identifier la courbe.



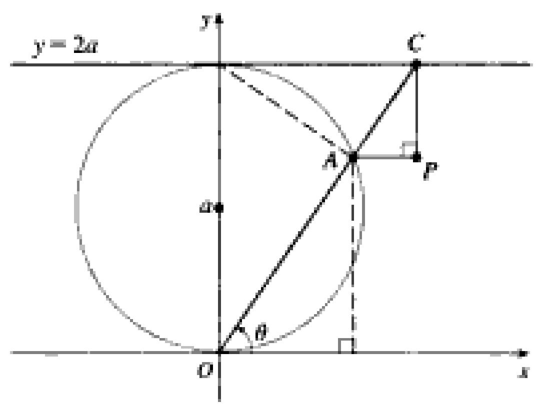
30. Si a et b sont des nombres fixés, trouvez des équations paramétriques pour tous les points P déterminés comme le montre la figure, en fonction de θ pris comme paramètre. Le segment AB est tangent au grand cercle.



31. Une courbe, appelée **sorcière d'Agnesi**, se compose de tous les points P déterminés comme le montre la figure. Montrez que des équations paramétriques de cette courbe peuvent être

$$x = 2a \operatorname{cotg}\theta \qquad y = 2a\sin^2\theta.$$

Dessinez cette courbe.



32. Supposons que la position d'un point mobile est donnée par

$$x_1 = 3\sin t \quad y_1 = 2\cos t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

et la position d'un deuxième point mobile par

$$x_2 = -3 + \cos t \quad y_2 = 1 + \sin t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

a) Tracez les trajectoires des deux points. Combien de fois se coupent-elles ?

b) Parmi ces points d'intersection y en a-t-il qui soient des points de collision. Autrement dit, les deux points s'y trouvent-ils au même moment ? Si oui, lesquels ?

c) Décrivez ce qui se passe si la trajectoire du second point est donnée par

$$x_2 = 3 + \cos t \quad y_2 = 1 + \sin t \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi?$$

33. Explorez la famille des courbes définies par les équations paramétriques $x = t^2, y = t^3 - ct$. Comment évolue la forme de ces courbes lorsque c croît ? Dessinez quelques-unes des courbes de cette famille.

34. Les courbes, appelées **queues d'aronde** en théorie des catastrophes, sont définies par les équations paramétriques $x = 2ct - 4t^3, y = -ct^2 + 3t^4$. Dessinez quelques-unes de ces courbes. Qu'ont-elles en commun ? Comment changent-elles lorsque c croît ?

35. Les courbes d'équations $x = a\sin nt, y = b\cos t$ sont appelées **courbes de Lissajous**. Étudiez les divers comportements de ces courbes en fonction de a, b et n (Prenez n entier positif).

36. Examinez la famille des courbes définies par les équations paramétriques

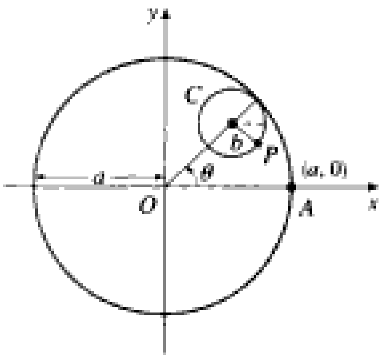
$$x = \sin t(c - \sin t) \quad y = \cos t(c - \sin t).$$

Comment ces courbes changent-elles selon les valeurs de c. En particulier, quelle est la valeur charnière de c qui modifie la forme de base de ces courbes ?

Sujet d'étude

La famille des hypocycloïdes

Dans ce projet, nous nous intéressons aux familles de courbes, appelées *hypocycloïdes* et *épicycloïdes*, qui sont engendrées par le mouvement d'un point d'un cercle qui roule à l'intérieur ou à l'extérieur d'un autre cercle.



1. Une **hypocycloïde** est la courbe décrite par un point fixe P d'un cercle C de rayon b lorsque C roule à l'intérieur d'un cercle de centre O et de rayon a. Cette configuration semble avoir plus de sens physiquement si $a > b$, mais les courbes sont tout aussi belles si $a < b$. Montrez que des équations paramétriques de l'hypocycloïde sont

$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right) \quad y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right),$$

si la position initiale de P est en $(a, 0)$ et le paramètre θ choisi comme indiqué sur la figure.

2. Dessinez à l'aide d'un outil graphique des hypocycloïdes en choisissant a entier positif et $b = 1$. Quel est l'effet des valeurs de a sur ces courbes ? Montrez qu'en prenant $a = 4$, les équations paramétriques se réduisent à

$$x = 4\cos^3\theta \quad y = 4\sin^3\theta.$$

Cette courbe est appelée une **hypocycloïde à quatre points de rebroussement** ou **astroïde.**

3. Essayez maintenant $b = 1$ et $a = n/d$, une fraction où n et d n'ont pas de facteurs communs. Pour commencer, prenez $n = 1$ et essayez de voir l'effet du dénominateur d sur l'allure du graphique. Ensuite, faites varier n, laissant d inchangé. Que se passe-t-il dans le cas $n = d + 1$? Essayer de déterminer algébriquement pourquoi ces courbes semblent familières. [*Suggestion :* Faites la substitution $\phi = -\theta/d$ et agrandissez le graphique d'un facteur d.]

4. Quel résultat obtenez-vous dans le cas $b = 1$ et a irrationnel ? Faites l'expérience avec un nombre irrationnel tel que $\sqrt{2}$ ou $e - 2$. Prenez des valeurs de θ de plus en plus grandes et supputez quel pourrait être le graphique de l'hypocycloïde pour toutes les valeurs réelles de θ.

5. Lorsque le cercle roule à l'extérieur du cercle fixe, la courbe décrite par P s'appelle une **épicycloïde**. Cherchez des équations paramétriques de l'épicycloïde.

6. Conjecturez les formes possibles des épicycloïdes. Procédez de façon analogue aux points 2-4.

7. Soit $b = 1$. Montrez algébriquement que l'épicycloïde avec $a = n$ entier naturel a la même forme que l'hypocycloïde avec $a = n/(n+1)$. Montrez que l'épicycloïde avec $a = 1/n$ a la même forme que l'hypocycloïde. Quelle est la valeur de a pour l'hypocycloïde ?

1.5 Les fonctions exponentielles

La fonction $f(x) = 2^x$ est appelée une *fonction exponentielle* parce que sa variable x est en exposant. Attention de ne pas la confondre avec la fonction puissance $g(x) = x^2$, dans laquelle la variable est la base.

De façon générale, une **fonction exponentielle** est une fonction de la forme

$$f(x) = a^x$$

où a est une constante strictement positive. Rappelons ce que cette écriture signifie.

Quand $x = n$, un entier strictement positif, alors

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

Quand $x = 0$, alors $a^0 = 1$, et quand $x = -n$, où n est un entier strictement positif, alors

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Lorsque x est un nombre rationnel, $x = p/q$ avec p et q des nombres entiers et $q > 0$, alors,

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Mais lorsque x est un nombre irrationnel, quelle est la signification de $y = a^x$? Par exemple, que signifie $2^{\sqrt{3}}$ ou 5^π ?

Pour nous aider à répondre à cette question, jetons d'abord un coup d'oeil au graphique de $y = 2^x$, où x est rationnel (voyez la figure 1). Nous voudrions étendre le domaine de définition de $y = 2^x$ aux irrationnels.

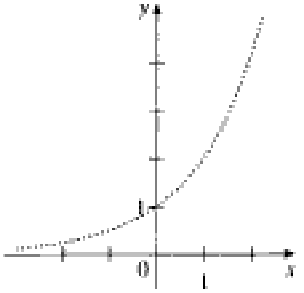


FIGURE 1
Représentation de $y = 2^x$, x rationnel

Dans le graphique de la figure 1, il y a des trous, il manque des valeurs correspondant aux valeurs irrationnelles de x. Nous voulons boucher les trous en définissant $f(x) = 2^x$ pour tout x réel de sorte que f soit une fonction strictement croissante. Par exemple, vu que le nombre irrationnel $\sqrt{3}$ satisfait à

$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8,$$

nous voulons avoir

$$2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}8},$$

tout en connaissant $2^{1{,}7}$ et $2^{1{,}8}$ puisque 1,7 et 1,8 sont des nombres rationnels.

En utilisant de meilleures approximations de $\sqrt{3}$, nous améliorons l'approximation de $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74 \quad &\Longrightarrow \quad 2^{1{,}73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}74}\\
1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 \quad &\Longrightarrow \quad 2^{1{,}732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}733}\\
1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321 \quad &\Longrightarrow \quad 2^{1{,}7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}7321}\\
1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206 \quad &\Longrightarrow \quad 2^{1{,}73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1{,}73206}\\
\vdots \qquad\qquad &\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Il est possible de démontrer qu'il n'y a qu'un seul nombre qui soit plus grand que tous les nombres

$$2^{1{,}7}, 2^{1{,}73}, 2^{1{,}732}, 2^{1{,}7320}, 2^{1{,}73205}, \ldots$$

et plus petit que tous les nombres

$$2^{1{,}8}, 2^{1{,}74}, 2^{1{,}733}, 2^{1{,}7321}, 2^{1{,}73206}, \ldots$$

Nous définissons $2^{\sqrt{3}}$ comme étant ce nombre unique. Grâce au procédé d'approximation précédent, nous pouvons le calculer avec 6 décimales correctes :

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}321997.$$

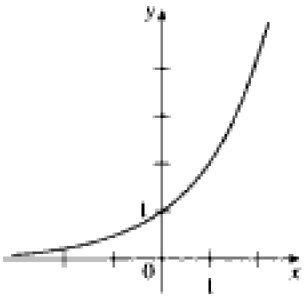


FIGURE 2
$y = 2^x$, x réel

Nous pouvons définir 2^x (ou a^x, pour $a > 0$) de la même façon pour d'autres valeurs irrationnelles de x. La figure 2 montre comment les points de la figure 1 ont été jointoyés jusqu'à former le graphique de la fonction $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$.

La figure 3 présente les graphiques de quelques-unes des fonctions de la famille des fonctions $y = a^x$, pour différentes valeurs de la base a. Remarquez que toutes ces fonctions passent par le point $(0, 1)$ puisque $a^0 = 1$, quel que soit $a \neq 0$ et aussi que, plus la base a est grande, plus la fonction exponentielle croît rapidement (pour $x > 0$).

Quand $0 < a < 1$, a^x s'approche de 0 lorsque x devient grand. Quand $a > 1$, a^x s'approche de 0 lorsque x diminue dans les négatifs. Dans les deux cas, l'axe Ox est une asymptote horizontale. Ces questions seront abordées dans la section 2.5.

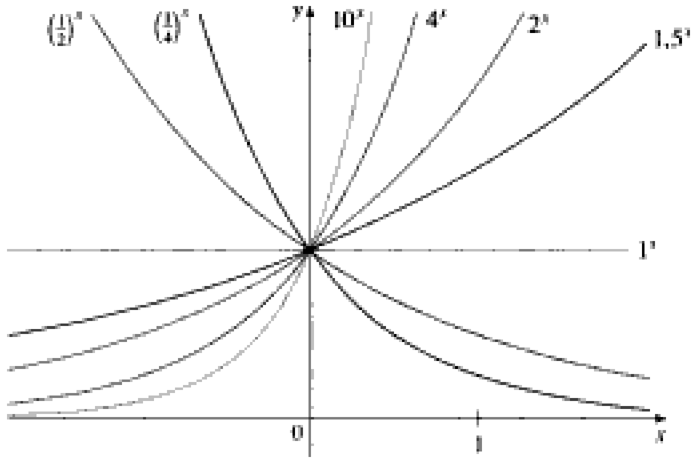
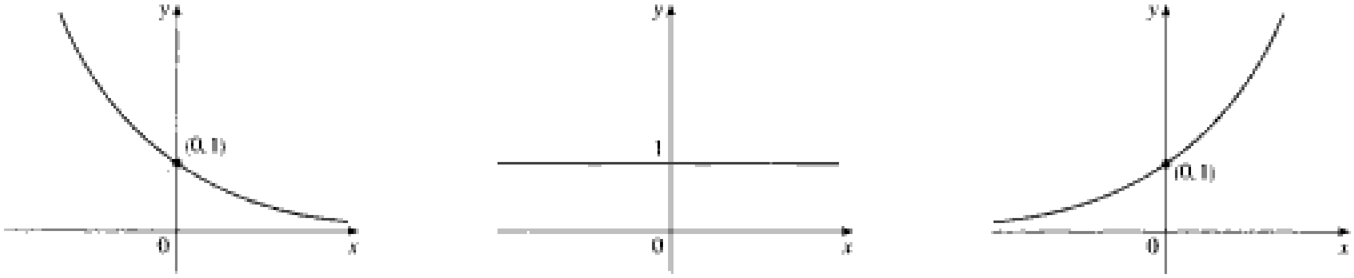


FIGURE 3

Au vu de la figure 3, il y a essentiellement trois types de fonctions exponentielles $y = a^x$. Quand $0 < a < 1$, la fonction exponentielle est strictement décroissante ; quand $a = 1$, elle est constante ; et quand $a > 1$, elle croît strictement. Ces trois situations sont illustrées séparément dans la figure 4.

On y voit que le domaine de définition de $y = a^x (a \neq 1)$ est $\mathbb{R}$ et que l'ensemble image est $]0, +\infty[$. On remarque encore que les courbes représentatives de $y = a^x$ et de $y = (1/a)^x$ sont symétriques par rapport à l'axe Oy. C'est dû au fait que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

FIGURE 4

La fonction exponentielle est importante, entre autres, à cause des propriétés ci-après. Si ces règles de calcul sont bien connues pour des exposants x et y rationnels, elles restent valables (et ce serait à démontrer) dans le cas où les exposants x et y sont des nombres réels quelconques.

Lois des exposants Soit a et b des nombres strictement positifs et x et y, des nombres réels quelconques.

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

Pour une révision des réflexions et translations de courbes, reportez-vous à la section 1.2.

EXEMPLE 1 ■ Esquissez le graphique de $y = 3 - 2^x$ et déterminez son domaine de définition et son ensemble image.

SOLUTION D'abord, nous prenons de la courbe $y = 2^x$ (celle de la figure 2) l'image par symétrie autour de l'axe Ox pour obtenir la courbe $y = -2^x$ [figure 5 (b)]. Ensuite, nous translatons cette courbe de 3 unités vers le haut afin d'arriver à la courbe d'équation $y = 3 - 2^x$ [figure 5 (c)]. Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ et l'ensemble image $]-\infty, 3[$.

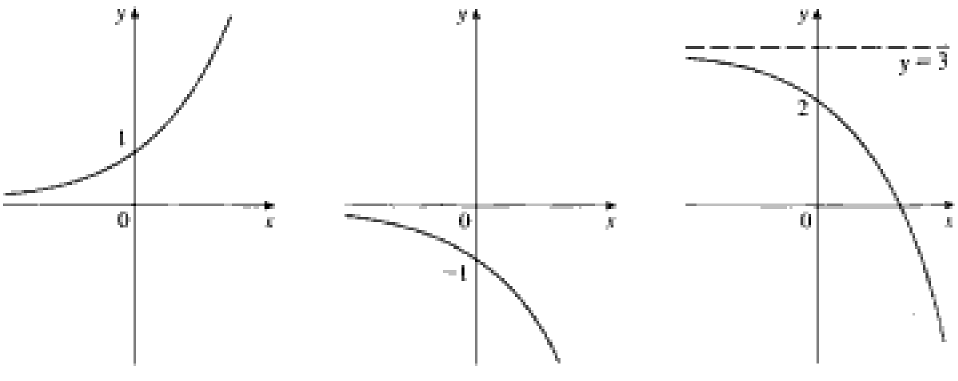


FIGURE 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$

EXEMPLE 2 ■ À l'aide d'un outil graphique, comparez la fonction exponentielle $f(x) = 2^x$ et la fonction puissance $g(x) = x^2$. Laquelle de ces deux fonctions croît le plus rapidement avec x ?

SOLUTION La figure 6 montre les deux courbes tracées dans une fenêtre $[-2, 6]$ sur $[0, 40]$. Elles se coupent trois fois, mais à partir de $x > 4$, la courbe de $f(x) = 2^x$ est au-dessus de celle de $g(x) = x^2$. La figure 7 donne une vue plus globale et fait voir, sans doute possible, que pour de grandes valeurs de x la fonction exponentielle $y = 2^x$ croît considérablement plus vite que la fonction puissance $y = x^2$.

L'exemple 2 montre que $y = 2^x$ croît plus vite que $y = x^2$. Pour insister sur la rapidité de croissance de 2^x faisons l'expérience mentale suivante. Prenons une feuille de papier de 0,005 cm d'épaisseur et plions-la en deux 50 fois de suite. Chaque fois que nous la plions, l'épaisseur du papier double. À la fin, l'épaisseur est $5 \times 2^{50}/1000$ cm. Est-ce gros ? Cela fait plus de 56 millions de km !

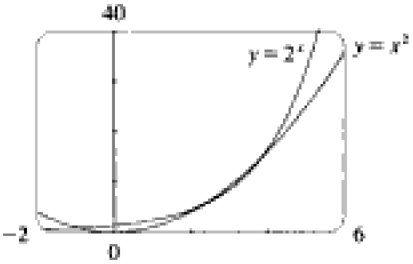


FIGURE 6

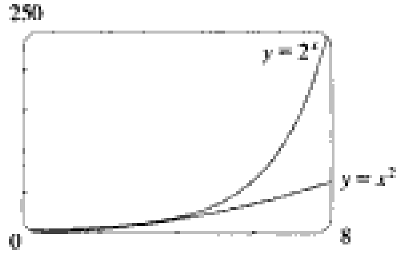


FIGURE 7

Applications des fonctions exponentielles

La fonction exponentielle intervient fréquemment dans les modèles mathématiques en sciences naturelles ou en sciences humaines. Ici, nous ne ferons qu'indiquer brièvement comment elle intervient dans la description de la croissance d'une population et de la désintégration radioactive. Dans les chapitres ultérieurs, nous étudierons ces exemples plus en détail ainsi que d'autres applications.

Nous envisageons pour commencer une population de bactéries évoluant dans un milieu homogène quant à la nourriture. Le comptage des bactéries, effectué par échantillonnage à des intervalles de temps régulier, révèle que la population double toutes les heures. Si le nombre de bactéries au temps t est $p(t)$, où t est mesuré en heures, et si la population initiale est $p(0) = 1000$, alors nous avons

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000,$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000,$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000.$$

De ce schéma, il semble qu'on puisse dire que, en général,

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t.$$

L'effectif de cette population est un multiple constant de la fonction exponentielle $y = 2^t$, ce qui laisse présager une croissance rapide semblable à celle des figures 2 et 7. Sous des conditions idéales (espace illimité, nourriture suffisante et aucune maladie), cette croissance exponentielle est conforme à ce qui se passe réellement dans la nature. Au chapitre 3, nous serons en mesure de calculer le taux de croissance de telles populations. Au chapitre 7, nous apporterons à ce modèle les modifications qui tiennent compte de certaines contraintes dans la croissance.

EXEMPLE 3 ■ La *demi-vie* du strontium-90, ^{90}Sr, est de 25 ans. Cela veut dire que la moitié de n'importe quelle quantité de ^{90}Sr se sera désintégrée au bout de 25 ans.

a) Cherchez une expression de la masse $m(t)$ après t années d'une masse de 24 mg de ^{90}Sr.

b) Calculez au milligramme près ce qui en restera après 40 ans.

c) Utilisez une calculatrice graphique pour dessiner $m(t)$ et sur le graphique estimez le temps nécessaire pour qu'il ne reste que 5 mg.

SOLUTION

a) Comme la masse initiale est de 24 mg et est réduite de moitié à la fin de chaque période de 25 ans, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} m(0) &= 24 \\ m(25) &= \frac{1}{2}(24) \\ m(50) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(24) = \frac{1}{2^2}(24) \\ m(75) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}(24) = \frac{1}{2^3}(24) \\ m(100) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}(24) = \frac{1}{2^4}(24) \end{aligned}$$

La structure de ces quelques lignes nous permet de dégager que la masse résiduelle après t années est

$$m(t) = \frac{1}{2^{t/25}}(24) = 24\cdot 2^{-t/25}.$$

C'est une fonction exponentielle de base $a = 2^{-1/25} = 1/2^{1/25}$.

b) Après 40 ans, il restera

$$m(40) = 24\cdot 2^{-40/25} \approx 7{,}9 \text{ mg}.$$

c) Grâce à un logiciel graphique, nous obtenons de la fonction $m(t) = 24\cdot 2^{-t/25}$ l'image de la figure 8. Nous faisons également tracer la droite $m = 5$ et situons ainsi le point d'intersection avec la courbe aux environs de $t \approx 57$. Cest donc au terme de 57 années qu'il ne restera que 5 mg.

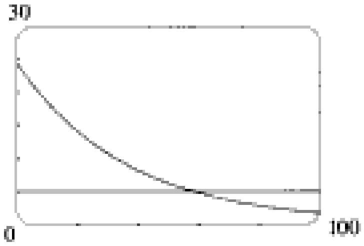


FIGURE 8
$m = 24\cdot 2^{-t/25}$

Le nombre e

De toutes les bases possibles pour la fonction exponentielle, il y en a une qui convient particulièrement au calcul différentiel et intégral. Le choix de la base a a quelque chose à voir avec la façon dont la courbe $y = a^x$ traverse l'axe Oy. Les figures 9 et 10 attirent l'attention sur la tangente aux courbes $y = 2^x$ et $y = 3^x$ au point $(0, 1)$ (la notion de tangente sera définie avec soin à la section 2.6 ; pour le moment, il suffit de voir la tangente à la courbe exponentielle en un point comme une droite qui ne touche la courbe qu'en ce point). Si nous mesurons les pentes m de ces tangentes, nous trouvons $m \approx 0{,}7$ pour $y = 2^x$ et $m \approx 1{,}1$ pour $y = 3^x$.

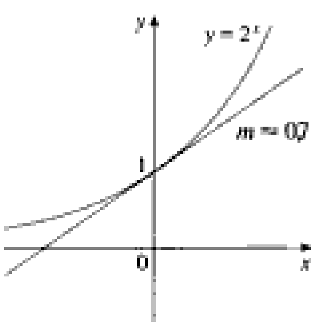


FIGURE 9

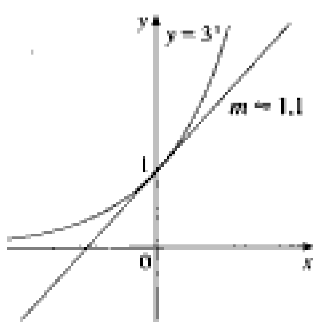


FIGURE 10

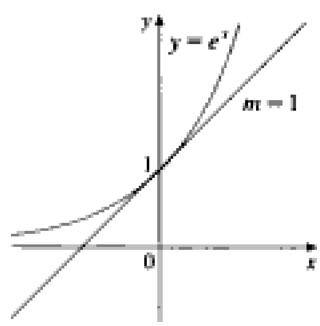


FIGURE 11

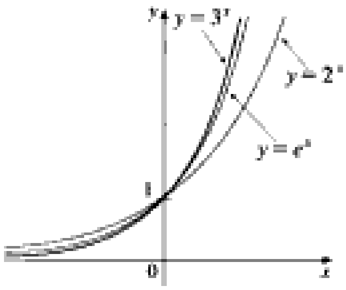


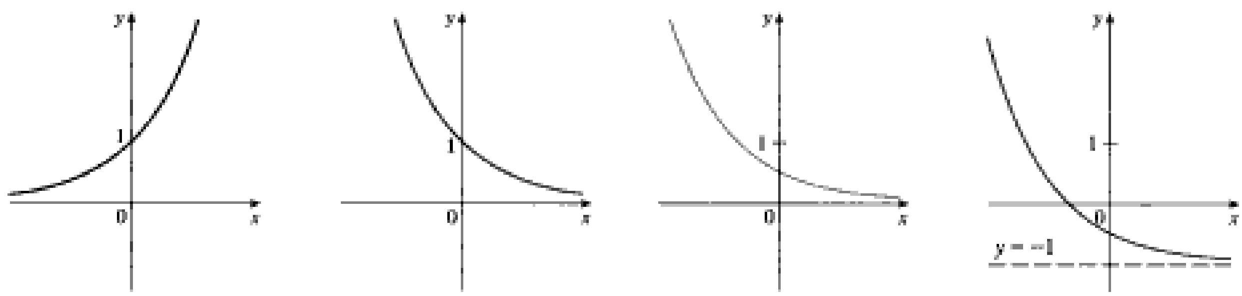
FIGURE 12

Il s'avère, comme nous le verrons au chapitre 3, que certaines formules de dérivation et d'intégration se simplifient grandement si la base a est telle que la pente de la tangente à $y = a^x$ en $(0, 1)$ est exactement égale à 1 (voyez la figure 11). Un tel nombre existe et est noté e. C'est la notation qu'a choisie le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1727, probablement parce que c'était la première lettre du mot *exponentiel*. Au vu des figures 9 et 10, il n'est pas étonnant que ce nombre soit situé entre 2 et 3 et que la courbe $y = e^x$ tombe entre les courbes $y = 2^x$ et $y = 3^x$ (voyez la figure 12). Au chapitre 3, nous calculerons la valeur de e avec 5 décimales exactes,

$$e \approx 2{,}71828.$$

EXEMPLE 4 ■ Tracez la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ et déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de cette fonction.

SOLUTION Nous reproduisons à la figure 13 (a) le graphique de la figure 11, celui de $y = e^x$, et nous en prenons l'image par symétrie autour de l'axe Oy. C'est le graphique de $y = e^{-x}$ à la figure 13 (b). Remarquons au passage que cette courbe coupe l'axe Oy avec une pente -1. Ensuite, nous faisons subir à cette courbe une compression de facteur 2 pour qu'elle devienne la représentation de la fonction $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ [figure 13 (c)]. Enfin, nous la translatons d'une unité vers le bas pour arriver au graphique voulu de $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ [figure 13 (d)]. Le domaine de définition est R et l'ensemble image $]-1, +\infty[$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURE 13

Jusqu'où faut-il aller du côté droit du graphique de $y = e^x$ pour dépasser un million ? L'exemple que voici rend manifeste la croissance très rapide de cette fonction par une réponse qui pourrait vous surprendre.

EXEMPLE 5 ■ Utilisez un logiciel graphique pour trouver la valeur de x pour laquelle $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUTION La fenêtre de la figure 14 vous montre les graphiques de la fonction $y = e^x$ et de la droite horizontale $y = 1\,000\,000$. Ces deux courbes se coupent quand $x \approx 13{,}8$. Dès lors, $e^x > 10^6$ quand $x > 13{,}8$. Il est sans doute surprenant que la fonction exponentielle dépasse déjà un million alors que x n'est qu'à 14 unités de l'origine.

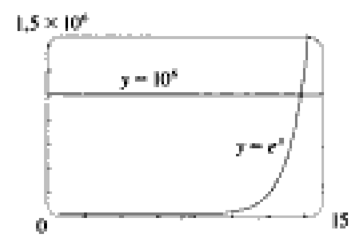


FIGURE 14

1.5 Exercices

1. a) Écrivez une équation qui définit la fonction exponentielle de base $a > 0$.
   b) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
   c) Si $a \neq 1$, quel est l'ensemble image ?
   d) Tracez l'allure générale du graphique de la fonction exponentielle dans chacun des cas suivants.
   - $a > 1$,
   - $a = 1$,
   - $0 < a < 1$.

2. a) Comment le nombre e est-il défini ?
   b) Combien vaut à peu près e ?
   c) Qu'entend-on par fonction exponentielle naturelle ?

3-6 ■ Tracez sur un même écran les fonctions données. Quels liens ont-elles entre elles ?

3. $y = 2^x, \quad y = e^x, \quad y = 5^x, \quad y = 20^x$
4. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad y = 8^x, \quad y = 8^{-x}$
5. $y = 3^x, \quad y = 10^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$
6. $y = 0{,}9^x, \quad y = 0{,}6^x, \quad y = 0{,}3^x, \quad y = 0{,}1^x$

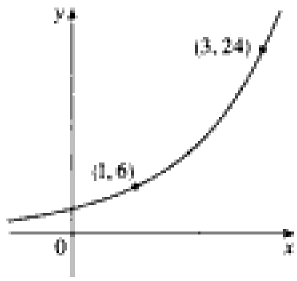
7-14 ■ Dessinez grossièrement le graphique de chaque fonction. N'utilisez pas de calculatrice graphique, mais seulement les courbes des figures 3 et 12 et, si nécessaire, les transformations de graphiques de la section 1.2.

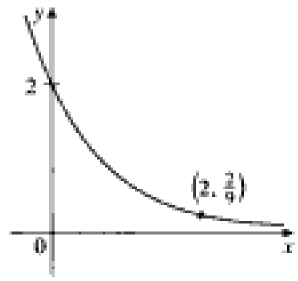
7. $y = 2^x + 1$
8. $y = 2^{x+1}$
9. $y = 3^{-x}$
10. $y = -3^x$
11. $y = -3^{-x}$
12. $y = 2^{|x|}$
13. $y = 3 - e^x$
14. $y = 2 + 5(1 - e^{-x})$

15. Quelle est l'équation du graphique qui résulte des opérations suivantes appliquées à la courbe initiale $y = e^x$?
    a) translation de deux unités vers le bas,
    b) translation de deux unités vers la droite,
    c) réflexion par rapport à l'axe Ox,
    d) réflexion par rapport à l'axe Oy,
    e) réflexion par rapport à l'axe Ox suivi d'une réflexion par rapport à l'axe Oy.

16. Quelle est l'équation du graphique qui résulte des opérations suivantes appliquées à la courbe initiale $y = e^x$?
    a) réflexion par rapport à la droite $y = 4$,
    b) réflexion par rapport à la droite $x = 2$.

17-18 ■ Déterminez la fonction exponentielle $f(x) = Ca^x$ dont le graphique est dessiné.





19. Supposons que les graphiques de $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2^x$ soient dessinés dans un système de coordonnées où l'unité est le centimètre. Montrez qu'à 10 cm à droite de l'origine, le point du graphique de f est à 1 m de haut tandis que celui de g est à plus de 10 m de haut.

20. Comparez les fonctions $f(x) = x^5$ et $g(x) = 5^x$ en les dessinant dans plusieurs fenêtres. Localisez tous les points d'intersection de ces deux graphiques avec une précision de 1 décimale. Laquelle de ces deux fonctions croît plus rapidement avec x ?

21. Comparez les fonctions $f(x) = x^{10}$ et $g(x) = e^x$ en les dessinant dans plusieurs fenêtres. Quand le graphique de g surpasse-t-il finalement celui de f ?

22. Sur un graphique, estimez la valeur de x telle que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

23. Dans certaines conditions idéales, une population de bactéries est censée doubler toutes les trois heures. Supposons qu'il y ait initialement 100 bactéries.
    a) À combien se monte la population après 15 heures ?
    b) Quel est l'effectif de la population après t heures ?
    c) Estimez la taille de la population après 20 heures.
    d) Dessinez le graphique qui rend compte de l'évolution de cette population et estimez le temps nécessaire pour que cette population atteigne un effectif de 50 000.

24. Un isotope de sodium, le ^{24}Na, a une demi-vie de 15 heures. D'un échantillon de cet isotope de 2 g,
    a) combien en reste-t-il après 60 heures ?
    b) combien en reste-t-il après t heures ?
    c) estimez ce qu'il en reste après 4 jours.
    d) Sur la base d'un graphique, estimez le temps qu'il faut pour qu'il n'en reste que 0,01 g.

1.6 Les fonctions réciproques et les logarithmes

La table 1 présente les données expérimentales d'une culture de bactéries dont l'effectif initial était 100 dans un milieu où la nourriture est contrôlée ; l'effectif de la population a été mesuré chaque heure. Le nombre N de bactéries est une fonction du temps : $N = f(t)$.

Mais voilà que le biologiste change de point de vue et souhaite connaître le moment où la population atteint certains niveaux qu'il s'est fixé. En d'autres mots, il raisonne sur t comme fonction de N. Cette fonction est appelée la *fonction réciproque* de f et est notée f^{-1} et se lit *fonction réciproque de f*. Donc, $t = f^{-1}(N)$ est le temps requis pour que la population atteigne le niveau N. Les valeurs de f^{-1} s'obtiennent soit en lisant la table de droite à gauche, soit en consultant la table 2. Par exemple, $f^{-1}(550) = 6$ car $f(6) = 550$.

TABLE 1 N en fonction de t

t (en heures)	$N = f(t)$ = population au temps t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLE 2 t en fonction de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = temps pour N bactéries
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

Toutes les fonctions n'ont pas une fonction réciproque. Comparons les fonctions f et g dont voici les diagrammes sagittaux à la figure 1.

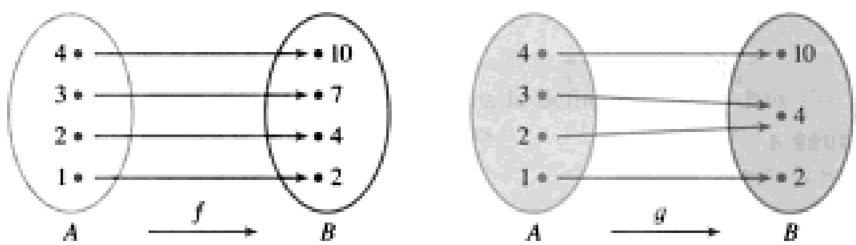


FIGURE 1

On remarque que f ne prend jamais deux fois la même valeur (deux entrées différentes quelconques conduisent à des sorties différentes), alors que g prend deux fois la même valeur (2 et 3 ont tous les deux la même image 4). Avec les symboles des fonctions, cela s'écrit

$$g(2) = g(3)$$

alors que

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{dès que } x_1 \neq x_2.$$

Les fonctions qui jouissent de cette dernière propriété sont dites *injectives*.

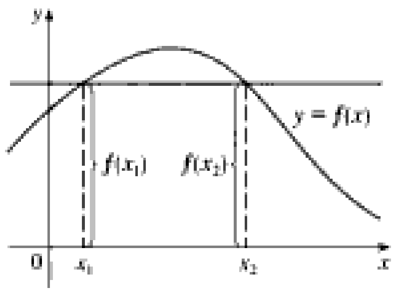


FIGURE 2
Cette fonction n'est pas injective car $f(x_1) = f(x_2)$.

1 Définition Une fonction est dite **injective** si elle ne prend jamais deux fois la même valeur ; autrement dit

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{dès que } x_1 \neq x_2.$$

Si une droite horizontale coupe le graphique de f en plus d'un point, comme sur la figure 2, nous voyons qu'en les nombres x_1 et x_2, $f(x_1) = f(x_2)$. Ce qui entraîne que f n'est pas injective. Nous disposons donc d'un test géométrique pour savoir si une fonction est injective ou non.

Test de la droite horizontale Une fonction est injective si et seulement si aucune droite horizontale ne traverse son graphique plus d'une fois.

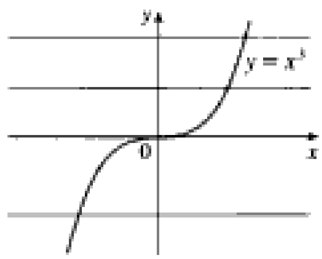


FIGURE 3
$f(x) = x^3$ est injective.

EXEMPLE 1 ■ La fonction $f(x) = x^3$ est-elle injective ?

SOLUTION 1 Prenons $x_1 \neq x_2$. Alors $x_1^3 \neq x_2^3$ (deux nombres différents ne peuvent avoir le même cube). Dès lors, selon la définition 1, $f(x) = x^3$ est injective.

SOLUTION 2 La figure 3 montre qu'aucune droite horizontale coupe le graphique de $y = x^3$ plus d'une fois. Grâce au test de la droite horizontale, on peut conclure que f est injective.

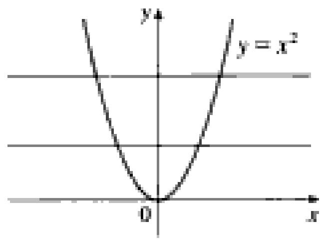


FIGURE 4
$g(x) = x^2$ n'est pas injective.

EXEMPLE 2 ■ La fonction $y = x^2$ est-elle injective ?

SOLUTION 1 Cette fonction n'est pas injective car, par exemple,

$$g(1) = 1 = g(-1).$$

Les nombres différents 1 et -1 ont la même image.

SOLUTION 2 La figure 4 montre qu'il y a des droites horizontales qui coupent le graphique de g plus d'une fois. Selon le test de la droite horizontale, la fonction n'est pas injective.

Les fonctions injectives sont importantes car ce sont justement celles qui ont une fonction réciproque d'après la définition suivante.

2 Définition Soit une fonction injective de domaine de définition A et d'ensemble image B. Alors, sa **fonction réciproque** a B comme domaine de définition et A comme ensemble image et est définie par

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

quel que soit y dans B.

FIGURE 5

Cette définition dit que si f envoie x sur y, f^{-1} renvoie y sur x. (Si f n'était pas injective, f^{-1} ne serait par univoquement définie.) Le diagramme sagittal de la figure 5 est là pour mettre en évidence que f^{-1} a l'effet inverse de celui de f. Il est à noter que

domaine de définition de f^{-1} = ensemble image de f
ensemble image de f^{-1} = domaine de définition de f

Par exemple, la fonction réciproque de $f(x) = x^3$ est $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ parce que, si $y = x^3$, alors

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x.$$

Attention, ne commettez pas l'erreur de prendre -1 dans f^{-1} comme un exposant.

$$f^{-1}(x) \text{ ne signifie pas } \frac{1}{f(x)}.$$

Cela n'empêche pas d'écrire $1/f(x)$ sous la forme $[f(x)]^{-1}$.

EXEMPLE 3 ■ Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ et $f(8) = -10$, calculez $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ et $f^{-1}(-10)$.

SOLUTION Selon la définition de f^{-1},

$$\begin{aligned} f^{-1}(7) &= 3 \quad \text{parce que} \quad f(3) = 7 \\ f^{-1}(5) &= 1 \quad \text{parce que} \quad f(1) = 5 \\ f^{-1}(-10) &= 8 \quad \text{parce que} \quad f(8) = -10. \end{aligned}$$

Le diagramme de la figure 6 rend manifeste que f^{-1} a l'effet contraire de celui de f.

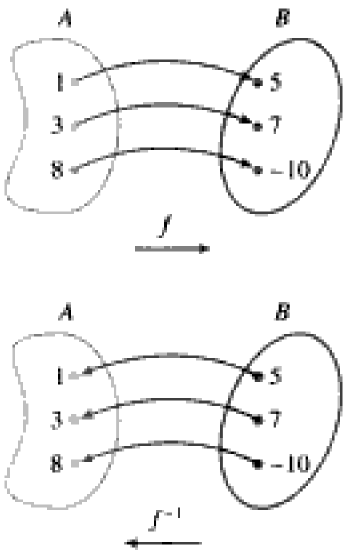


FIGURE 6
La fonction réciproque intervertit entrée et sortie.

Comme la lettre x est généralement réservée à la variable indépendante, il est normal, quand nous parlons plus spécialement de f^{-1}, d'intervertir les lettres x et y dans la définition 2 et d'écrire

3 $$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x.}$$

Si maintenant, nous remplaçons y dans la définition 2 et x dans (3), nous arrivons aux **équations d'annulation** suivantes :

4
$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } A. \\ f(f^{-1}(y)) &= y \qquad \text{pour tout } y \text{ dans } B. \end{aligned}}$$

La première équation d'annulation dit que si nous partons de x, lui appliquons f, puis appliquons au résultat f^{-1}, nous revenons à x d'où nous étions parti (voyez le diagramme sous forme de machine de la figure 7). En quelque sorte, f^{-1} défait ce qu'a fait f. La deuxième de ces équations dit que f défait ce que f^{-1} a fait.

FIGURE 7

Par exemple, si $f(x) = x^3$, alors $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ et les équations d'annulation deviennent

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x) = (x^{1/3})^3 = x.$$

Ces équations expriment simplement que les fonctions puissance 3 et racine cubique s'annulent l'une l'autre quand elles sont appliquées à la suite l'une de l'autre.

Voyons maintenant comment calculer des fonctions réciproques. Si nous avons une fonction $y = f(x)$ et que nous pouvons résoudre cette équation par rapport à x, alors, en accord avec la définition 2, nous devons avoir $x = f^{-1}(y)$. Si maintenant nous voulons désigner la variable indépendante par la lettre x, nous échangeons x et y et aboutissons à l'équation $y = f^{-1}(x)$.

5 Comment obtenir la fonction réciproque d'une fonction injective f

1 Écrire $y = f(x)$

2 Résoudre (si possible) l'équation en x.

3 Échanger x et y afin d'exprimer f^{-1} comme une fonction de x. L'équation finale est $y = f^{-1}(x)$

EXEMPLE 4 ■ Quelle est la fonction réciproque de $f(x) = x^3 + 2$?

SOLUTION Conformément à la méthode 5, nous écrivons d'abord

$$y = x^3 + 2.$$

Ensuite, nous résolvons cette équation par rapport à x :

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}.$$

Dans l'exemple 4, on remarque que la fonction f^{-1} fait le contraire de f. La fonction f est la règle « cube, puis ajouter 2 » ; f^{-1} est la règle « soustraire 2, puis prendre la racine cubique ».

Enfin, nous échangeons x et y :

$$y = \sqrt[3]{x - 2}.$$

La fonction réciproque cherchée est $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. ■

Le fait qu'on doive échanger x et y pour obtenir la fonction réciproque intervient aussi quand il s'agit d'obtenir le graphique de f^{-1} à partir de celui de f. Puisque $f(a) = b$ si et seulement si $f^{-1}(b) = a$, le point (a, b) appartient au graphique de f si et seulement si le point (b, a) appartient au graphique de f^{-1}. Or, les points (a, b) et (b, a) sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (voyez la figure 8).

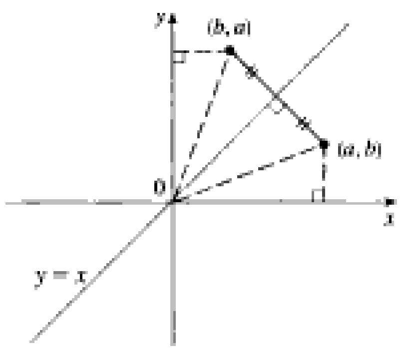


FIGURE 8

Dès lors, comme illustré à la figure 9 :

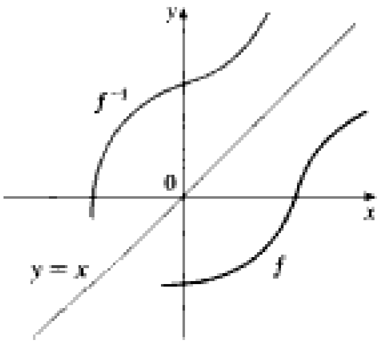


FIGURE 9

> Le graphique de f^{-1} s'obtient en prenant l'image symétrique par rapport à la droite $y = x$ du graphique de f.

EXEMPLE 5 ■ Dessinez les graphiques de la fonction $f(x) = \sqrt{-1-x}$ et de sa réciproque dans le même repère.

SOLUTION Nous commençons par tracer la courbe $y = \sqrt{-1-x}$ (la moitié supérieure de la parabole $y^2 = -1 - x$ ou $x = -y^2 - 1$), puis nous en prenons l'image symétrique par rapport à la droite $y = x$, c'est le graphique de f^{-1} (voyez la figure 10). En guise de vérification de notre graphique, nous écrivons l'expression de f^{-1}, à savoir $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geqslant 0$. De cette façon, il apparaît que le graphique de f^{-1} doit être la moitié droite de la parabole $y = -x^2 - 1$, et c'est bien ce qui est dessiné à la figure 10.

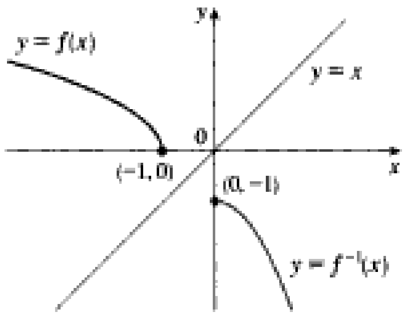


FIGURE 10

Si votre outil graphique ne prévoit pas de fournir le graphique de la fonction réciproque d'une fonction donnée, vous pouvez y arriver tout de même en recourant aux équations paramétriques. Nous avons vu à la section 1.4 que la courbe d'équation $y = f(x)$ pouvait être vue comme une courbe paramétrée d'équations

$$x = t \qquad y = f(t).$$

Comme il suffit d'échanger les rôles de x et y pour obtenir le graphique de la fonction réciproque, il suffit aussi de faire dessiner la courbe paramétrée d'équations

$$x = f(t) \qquad y = t.$$

EXEMPLE 6 ■ Démontrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ est injective et dessinez les graphiques de f et de f^{-1}.

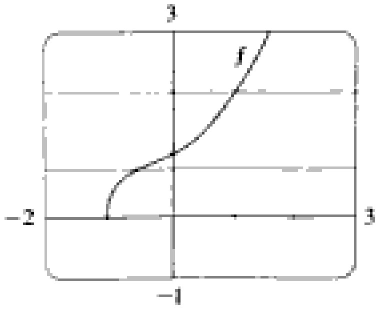


FIGURE 11

SOLUTION La figure 11 montre le graphique de f et, grâce au test de la droite horizontale, on peut dire que la fonction est injective.

Pour faire apparaître les courbes représentatives de f et f^{-1} dans la même fenêtre, nous employons la description paramétrique. La courbe représentative de f admet des équations paramétriques

$$x = t \qquad y = \sqrt{t^3 + t^2 + t + 1}$$

et la courbe représentative de f^{-1},

$$x = \sqrt{t^3 + t^2 + t + 1} \qquad y = t.$$

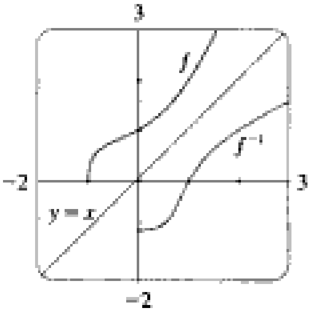


FIGURE 12

Commandons également le graphique de la droite $y = x$:

$$x = t, \qquad y = t.$$

La figure 12 reproduit ces trois graphiques et effectivement, il semble bien que le graphique de f^{-1} soit le symétrique de celui de f par rapport à la droite $y = x$. ▪

N'est-il pas remarquable qu'à l'exemple 6 on ait pu obtenir le graphique de f^{-1} sans même disposer d'une formule explicite pour cette fonction ? En fait, il aurait été possible de trouver une telle formule explicite, mais elle aurait été très compliquée (c'est l'objet de l'exercice 55 avec l'aide d'un logiciel de calcul symbolique). Par contre, il s'avère impossible de trouver une formule explicite de la fonction réciproque de $f(x) = x + \sin x$, mais la méthode utilisée à l'exemple 6 fournit quand même le graphique de f^{-1} (voyez l'exercice 54).

Fonctions logarithmes

Dans le cas où $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Elle est donc injective et possède une fonction réciproque f^{-1}, appelée **fonction logarithme de base** a et notée $\log_a$. En adoptant l'écriture de la formule 3 sur la fonction réciproque

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x,$$

nous avons ici

6
$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x.}$$

Ainsi, lorsque $x > 0$, $\log_a x$ est l'exposant auquel il faut élever la base a pour obtenir x. Par exemple, $\log_{10} 0{,}001 = -3$ parce que $10^{-3} = 0{,}001$.

Les équations d'annulation (4) appliquées aux fonctions $f(x) = a^x$ et $f^{-1}(x) = \log_a x$ s'écrivent ici

7
$$\boxed{\begin{array}{c}\log_a(a^x) = x \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.\\ a^{\log_a x} = x \text{ pour tout } x > 0.\end{array}}$$

Le domaine de définition de la fonction logarithme $\log_a$ est $]0, +\infty[$ et son ensemble image $\mathbb{R}$. Son graphique est l'image du graphique de $y = a^x$ par la réflexion d'axe $y = x$.

La figure 13 montre ces graphiques dans le cas où $a > 1$ (les fonctions logarithmes les plus importantes sont celles de base $a > 1$). Le pendant de la croissance extrêmement rapide de $y = a^x$ du côté des x positifs est une croissance très lente de la fonction $y = \log_a x$ pour les valeurs de x supérieures à 1.

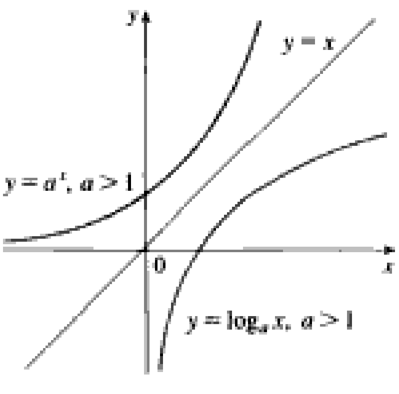


FIGURE 13

La figure 14 présente les courbes de quelques fonctions logarithmes qui diffèrent par leur base a. Comme $\log_a 1 = 0$, dans toutes les bases a, toutes ces courbes passent par le point $(1, 0)$.

Les propriétés des fonctions logarithmes, énumérées ci-après, découlent des propriétés correspondantes des fonctions exponentielles énoncées à la section 1.5.

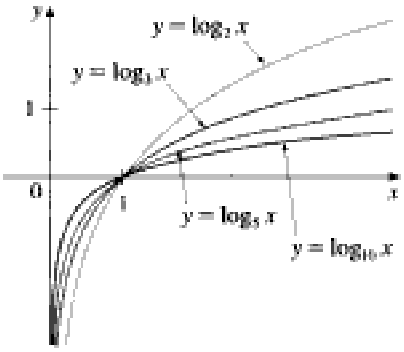


FIGURE 14

Lois des logarithmes Si x et y sont des nombres strictement positifs,

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (où r est un nombre réel quelconque)

EXEMPLE 7 ■ Employez les règles de calcul ci-dessus pour calculer $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUTION Selon la deuxième loi,

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4,$$

parce que $2^4 = 16$.

■ Les logarithmes naturels

Nous verrons au chapitre 3 que parmi toutes les bases a possibles le choix du nombre e est particulièrement indiqué. Le logarithme de cette base e s'appelle **logarithme naturel** et reçoit une notation spéciale

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Notation des logarithmes

La plupart des manuels scolaires de calcul différentiel et intégral et de sciences adoptent la notation ln pour le logarithme naturel et $\log x$ pour le logarithme de base 10. Il en est de même pour les touches des calculatrices scientifiques. La littérature scientifique et mathématique plus avancée et les langages de programmation utilisent $\log x$ pour les logarithmes naturels.

Si nous posons $a = e$ et $\log_e = \ln$ dans les formules (6) et (7), les propriétés qui définissent la fonction logarithme naturel deviennent

8 $$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x.}$$

9 $$\boxed{\begin{array}{c}\ln(e^x) = x \text{ pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.\\ e^{\ln x} = x \text{ pour tout } x > 0.\end{array}}$$

Dans le cas particulier $x = 1$, cela donne

$$\boxed{\ln e = 1}$$

EXEMPLE 8 ■ Calculez x étant donnée l'équation $\ln x = 5$.

SOLUTION 1 Selon la formule (8), nous voyons que

$$\ln x = 5 \text{ signifie } e^5 = x.$$

Donc, $x = e^5$. (Si la notation ln vous fait problème, remplacez-la par $\log_e$. L'équation proposée est alors $\log_e x = 5$ et la solution, par définition du logarithme, $e^5 = x$.)

SOLUTION 2 Partez de l'équation

$$\ln x = 5$$

et appliquez la fonction exponentielle aux deux membres de celle-ci

$$e^{\ln x} = e^5.$$

Par la deuxième équation d'annulation (9), le membre de gauche devient $e^{\ln x} = x$. Et, de là, $x = e^5$. ■

EXEMPLE 9 ■ Résolvez l'équation $e^{5-3x} = 10$.

SOLUTION Nous appliquons la fonction ln aux deux membres de l'équation et simplifions, grâce aux équations d'annulation (9) :

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \frac{1}{3}(5 - \ln 10). \end{aligned}$$

À l'aide d'une calculatrice scientifique qui dispose de la touche ln, nous pouvons obtenir la solution avec quelques décimales correctes : $x \approx 0{,}8991$. ■

EXEMPLE 10 ■ Écrivez avec un seul logarithme l'expression $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$.

SOLUTION En utilisant les lois 3 et 1 des logarithmes, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} \ln a + \frac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln\sqrt{b} \\ &= \ln(a\sqrt{b}). \end{aligned}$$ ■

La formule suivante montre que les logarithmes de n'importe quelle base peuvent s'exprimer en fonction des logarithmes naturels.

10 Quel que soit a, $(a \neq 1)$,

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Démonstration Posons $y = \log_a x$. De (6), on déduit $a^y = x$. On prend maintenant le logarithme naturel des deux membres de cette équation et on obtient $y \ln a = \ln x$. D'où

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$ ■

La formule 10 rend possible le calcul, avec une calculatrice scientifique qui a la touche ln, de tous les logarithmes, quelle que soit leur base (voyez l'exemple suivant). De plus, elle donne la clé pour faire dessiner le graphique de n'importe quelle fonction logarithme par une calculatrice graphique (voyez les exercices 43 et 44).

EXEMPLE 11 ■ Déterminez la valeur de $\log_8 5$ avec 6 décimales correctes.

SOLUTION Grâce à la formule 10,

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0{,}773976.$$

EXEMPLE 12 ■ À l'exemple 3 de la section 1.5, nous avons établi que ce qui reste de 24 mg de ^{90}Sr après t années est donné par la formule $m = f(t) = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Cherchez la fonction réciproque de cette fonction et donnez-en une interprétation.

SOLUTION Nous avons à résoudre par rapport à t l'équation $m = 24 \cdot 2^{-t/25}$. Commençons par prendre le logarithme naturel des deux membres. Il vient successivement

$$\begin{aligned}
\ln m &= \ln(24 \cdot 2^{-t/25}) = \ln 24 + \ln(2^{-t/25}) \\
\ln m &= \ln 24 - \frac{t}{25}\ln 2 \\
\frac{t}{25}\ln 2 &= \ln 24 - \ln m \\
t &= \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m).
\end{aligned}$$

La fonction réciproque est donc

$$f^{-1}(m) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln m).$$

Cette fonction donne le temps requis pour que, par désintégration, la masse de 24 mg soit réduite à m mg. En particulier, elle sera réduite à 5 mg après

$$t = f^{-1}(5) = \frac{25}{\ln 2}(\ln 24 - \ln 5) \approx 56{,}58 \text{ années.}$$

Cette réponse concorde avec l'estimation graphique que nous avions faite à l'exemple 3 de la section 1.5.

La figure 15 reproduit les graphiques de la fonction exponentielle $y = e^x$ et de sa réciproque $y = \ln x$. Puisque la courbe $y = e^x$ coupe l'axe Oy avec une pente 1, il en est de même pour la courbe $y = \ln x$ quand elle coupe l'axe Ox.

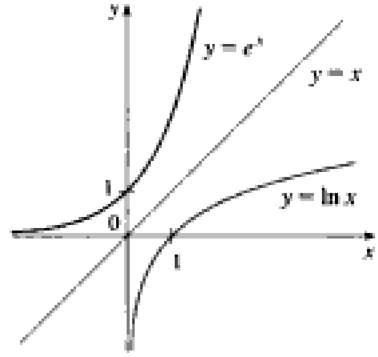


FIGURE 15

La fonction logarithme naturel partage avec toutes les fonctions logarithmes de base supérieure à 1 la propriété d'être strictement croissante, d'être définie sur $]0, +\infty[$ et d'admettre l'axe Oy comme asymptote verticale. (Ce qui veut dire que les valeurs de $\ln x$ sont négatives et deviennent très grandes en valeur absolue lorsque x s'approche de 0. Voyez la section 2.5).

EXEMPLE 13 ■ Tracez le graphique de la fonction $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUTION Nous partons du graphique de $y = \ln x$ tel qu'il est donné par la figure 15. Puis, nous mettons en oeuvre les transformations de la section 1.2 : d'abord, une translation de 2 unités vers la droite pour produire le graphique de $y = \ln(x - 2)$, ensuite, une translation de 1 unité vers le bas pour produire le graphique de $y = \ln(x - 2) - 1$ (voyez la figure 16).

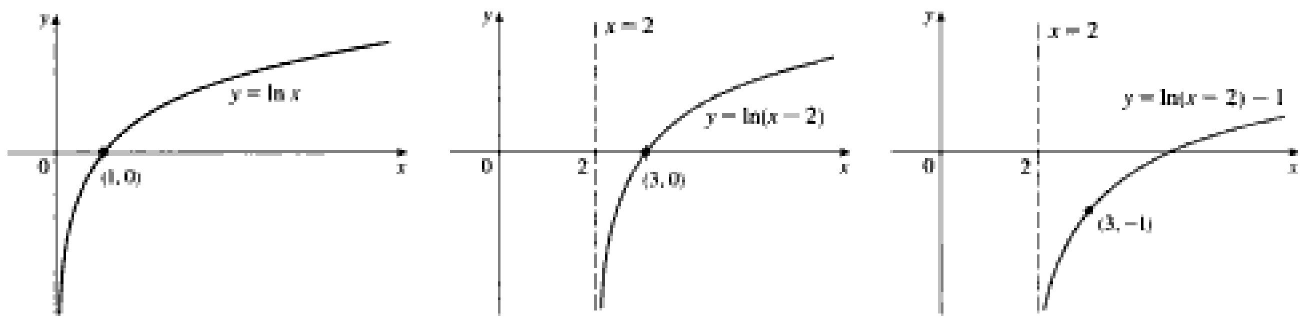


FIGURE 16

Bien que $\ln x$ soit une fonction strictement croissante, elle croît *très* lentement à partir de x plus grand que 1. En fait, elle croît plus lentement que n'importe quelle puissance de x. À titre d'illustration, comparons les valeurs approximatives prises par les fonctions $y = \ln x$ et $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$. Elles sont consignées dans le tableau ci-dessous. Les graphiques sont présentés dans les figures 17 et 18. Vous remarquerez qu'au début, la croissance des deux fonctions est comparable mais qu'à la longue la fonction racine l'emporte de loin sur la fonction logarithme.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0,69	1,61	2,30	3,91	4,6	6,2	6,9	9,2	11,5
$\sqrt{x}$	1	1,41	2,24	3,16	7,07	10,0	22,4	31,6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0,49	0,72	0,73	0,55	0,46	0,28	0,22	0,09	0,04

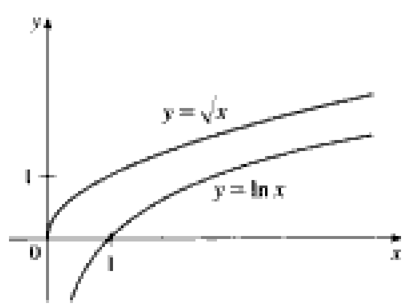


FIGURE 17

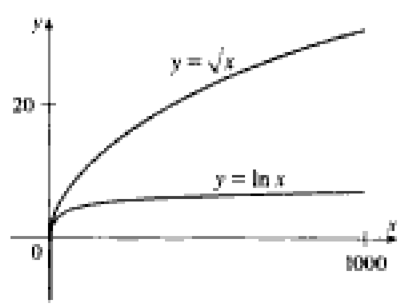


FIGURE 18

1.6 Exercices

1. a) Qu'est-ce qu'une fonction injective ?
   b) Comment peut-on reconnaître au graphique d'une fonction si elle est injective ?

2. a) Supposons que f soit une fonction injective dont le domaine de définition est A et l'ensemble image B. Comment la fonction réciproque f^{-1} est-elle définie ? Quel est son ensemble de définition ? Quel est son ensemble image ?
   b) Si vous disposez d'une formule qui définit f, comment trouvez-vous la formule qui définit f^{-1} ?
   c) Si vous disposez du graphique de f, comment procédez-vous pour obtenir le graphique de f^{-1} ?

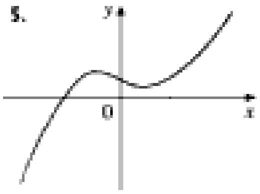
3-14 ■ Une fonction f est donnée, soit par une table de valeurs, soit par un graphique, soit par une formule ou encore verbalement. Déterminez si f est injective.

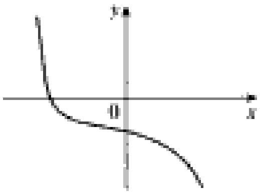
3.

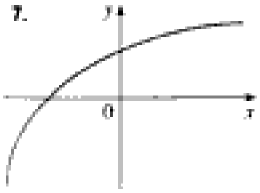
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1,5	2,0	3,6	5,3	2,8	2,0

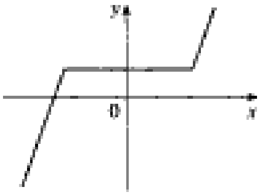
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

5.


6.


7.


8.


9. $f(x) = 7x - 3$ 10. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

11. $g(x) = |x|$ 12. $g(x) = \sqrt{x}$

13. $f(t)$ est la hauteur d'un ballon de football t secondes après l'engagement.

14. $f(t)$ est votre taille à l'âge t.

15-16 ■ Décidez sur la base du graphique si la fonction est injective.

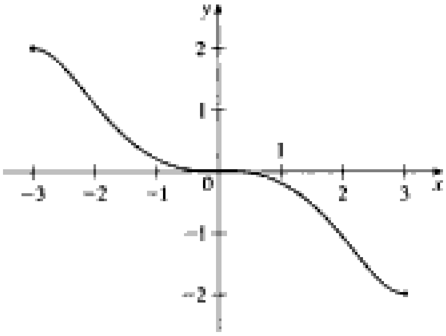
15. $f(x) = x^3 - x$ 16. $f(x) = x^3 + x$

17. Si f est une fonction injective telle que $f(2) = 9$, que vaut $f^{-1}(9)$?

18. Soit $f(x) = 3 + x^2 + \operatorname{tg}(\pi x/2)$, avec $-1 < x < 1$. Calculez $f^{-1}(3)$.

19. Soit $g(x) = 3 + x + e^x$, calculez $g^{-1}(4)$.

20. Voici le graphique de f.
   a) Pourquoi f est-elle injective ?
   b) Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de f^{-1}.
   c) Estimez la valeur de $f^{-1}(1)$.



21. La formule $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, où $F \geqslant -459{,}67$ exprime la température en degrés Celsius en fonction de la température en degrés Fahrenheit. Cherchez une formule pour la fonction réciproque et interprétez-la. Quel est le domaine de définition de la fonction réciproque ?

22. En théorie de la relativité, la masse d'une particule animée d'une vitesse v est

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

où m_0 est la masse au repos de la particule et c la vitesse de la lumière dans le vide. Cherchez une formule qui définit la fonction réciproque de f et donnez-en la signification.

23-28 ■ Cherchez une formule pour la fonction réciproque.

23. $f(x) = \dfrac{1 + 3x}{5 - 2x}$ 24. $f(x) = 5 - 4x^3$

25. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$ 26. $y = 2^{10^x}$

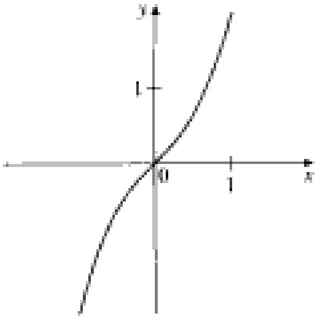
27. $y = \ln(x + 3)$ 28. $y = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$

29-30 ■ Cherchez une formule explicite pour f^{-1} et servez-vous en pour dessiner le graphique de f^{-1}, et sur le même écran, dessinez le graphique de f et la droite $y = x$. En guise de vérification, regardez si les courbes de f et f^{-1} sont bien symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite.

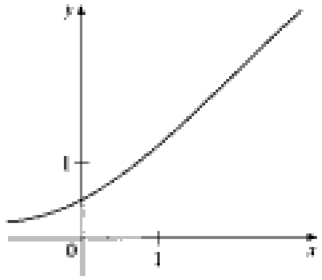
29. $f(x) = 1 - 2/x^2, \quad x > 0$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}, \quad x > 0$

31. Servez-vous du graphique de f pour tracer celui de f^{-1}.



32. Servez-vous du graphique de f pour tracer celui de f^{-1} et de $1/f$.



33. a) Quelle est la définition de la fonction logarithme $y = \log_a x$?
b) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
c) Quel est l'ensemble image de cette fonction ?
d) Tracez l'allure générale de la courbe $y = \log_a x$ pour le cas $a > 1$.

34. a) Qu'appelle-t-on logarithme naturel ?
b) Qu'appelle-t-on logarithme ordinaire ?
c) Dessinez les courbes de la fonction logarithme naturel et de la fonction exponentielle de base e dans le même système d'axes.

35-38 ■ Calculez la valeur exacte de chaque expression.

35. (a) $\log_2 64$ (b) $\log_6 \frac{1}{36}$

36. (a) $\log_8 2$ (b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

37. (a) $\log_{10} 1{,}25 + \log_{10} 80$
(b) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3 \log_5 2$

38. (a) $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$ (b) $e^{3 \ln 2}$

39-40 ■ Remplacez l'expression par un simple logarithme.

39. $2 \ln 4 - \ln 2$ **40.** $\ln x + a \ln y - b \ln z$

41. Utilisez la formule 10 pour calculer, avec une précision de 6 décimales,
a) $\log_2 5$ b) $\log_5 26{,}05$.

42. Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction $g(x) = \ln(4 - x^2)$.

43-44 ■ Utilisez la formule 10 pour dessiner le graphique des fonctions données sur un même écran. Quels liens ont ces graphiques entre eux ?

43. $y = \log_{1,5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$

44. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

45. Le graphique de la courbe $y = \log_2 x$ est dessinée dans un repère dont l'unité est le centimètre. De combien de km faut-il se déplacer vers la droite avant que la courbe atteigne la hauteur de 25 cm ?

46. Comparez les fonctions $f(x) = x^{0,1}$ et $g(x) = \ln x$ en les dessinant dans plusieurs fenêtres. Quand le graphique de f surpasse-t-il finalement celui de g ?

47-48 ■ Dessinez grossièrement le graphique de chaque fonction. N'utilisez pas de calculatrice graphique, mais seulement les courbes des figures 14 et 15 et, si nécessaire, les transformations de graphiques de la section 1.2.

47. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

48. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln |x|$

49-52 ■ Résolvez en x chaque équation.

49. (a) $e^x = 16$ (b) $\ln x = -1$

50. (a) $\ln(2x - 1) = 3$ (b) $e^{3x-4} = 2$

51. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

52. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, où $a \neq b$

53-54 ■ Montrez que f est injective. Dessinez ensuite f, f^{-1} et $y = x$ sur le même écran à l'aide des équations paramétriques.

53. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

54. $f(x) = x + \sin x$

55. Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour trouver une expression explicite de la fonction réciproque de $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ que nous avons envisagée à l'exemple 6. (Votre logiciel va vous fournir trois expressions possibles. Expliquer pourquoi deux d'entre elles sont sans valeur dans ce contexte.)

56. a) Soit $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$. Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour trouver une expression explicite de $g^{-1}(x)$.
b) Dessinez maintenant dans une même fenêtre $y = g(x)$, $y = x$ et $y = g^{-1}(x)$.

57. Si une population de bactéries, qui se monte initialement à 100 unités, double toutes les trois heures, alors le nombre de bactéries présentes après t heures est $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ (voyez l'exercice 23 de la section 1.5).
a) Déterminez la fonction réciproque et expliquez sa signification.

b) À quel moment la population atteint-elle 50 000 unités ?

58. Dès que le flash d'un appareil photo a fonctionné, les batteries commencent immédiatement à en recharger la capacité qui met en réserve une charge électrique donnée par

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a}).$$

(La charge maximale de la capacité est Q_0 et le temps est mesuré en secondes).

a) Écrivez la fonction réciproque de cette fonction et expliquez sa signification.

b) Combien de temps faut-il pour recharger la capacité à 90 % dans le cas où $a = 2$?

59. Quelle est l'équation du graphique qui résulte des opérations suivantes appliquées à la courbe initiale $y = \ln x$?

a) translation de trois unités vers le haut,

b) translation de trois unités vers la gauche,

c) réflexion par rapport à l'axe Ox

d) réflexion par rapport à l'axe Oy

e) réflexion par rapport à l'axe Ox suivi d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$.

f) réflexion par rapport à l'axe Oy suivi d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$.

g) translation de 3 unités vers la gauche suivi d'une réflexion par rapport à la droite $y = x$.

60. a) Si on translate une courbe vers la gauche, qu'advient-il à son image symétrique par rapport à la droite $y = x$? Étant donné ce principe géométrique, trouvez une expression de la réciproque de $g(x) = f(x + c)$, où f est une fonction injective.

b) Déterminez une expression de la fonction réciproque de $h(x) = f(cx)$, où $c \neq 0$.

1.7 Modèles et ajustement de courbe

Un **modèle mathématique** est une description mathématique (qui souvent revêt la forme d'une équation ou d'une fonction) d'un phénomène issu du monde réel, telle la taille d'une population, la demande d'un produit, la vitesse d'un objet qui tombe, la concentration d'un produit au cours d'une réaction chimique, l'espérance de vie d'une personne à sa naissance ou le coût de la réduction de certaines émissions. La construction d'un modèle vise à comprendre le phénomène et peut-être à pouvoir faire des prédictions sur le comportement futur.

Le schéma de la figure 1 illustre le processus de modélisation. Face à une situation réelle, notre première tâche en vue de la modélisation mathématique est d'identifier et de dénommer les variables indépendantes et dépendantes et d'émettre des hypothèses suffisamment simplificatrices pour que la situation devienne traitable mathématiquement. Nous exploitons notre maîtrise des conditions physiques et nos aptitudes mathématiques pour écrire des équations qui lient les variables. Dans le cas où aucune loi physique ne peut nous guider, nous sommes obligés de récolter des données (en provenance soit des livres, soit du réseau internet, soit en menant notre propre expérimentation) et d'examiner ces données en les ordonnant de façon à discerner des régularités. Il peut être souhaitable alors de passer des données numériques de la fonction à une représentation graphique en reportant ces données dans un repère. L'allure de cette représentation graphique peut même alors suggérer une formule algébrique dans certains cas.

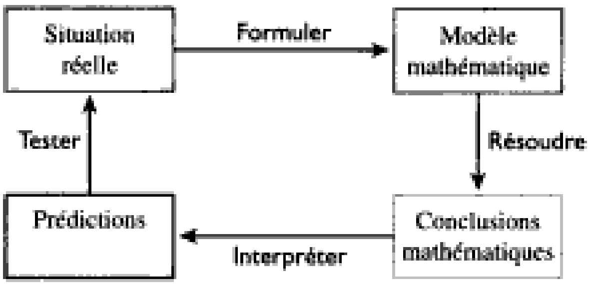


FIGURE 1
Le processus de modélisation

La deuxième étape est de mettre en oeuvre les mathématiques que nous connaissons (comme le calcul différentiel et intégral qui est développé tout au long de ce livre) sur le modèle mathématique afin d'en tirer des conclucions mathématiques. En troisième lieu, nous replaçons ces conclusions mathématiques dans le contexte de la situation réelle et en tirons des informations qui peuvent prendre la forme d'explications ou de prédictions. L'étape finale consiste à vérifier les prédictions en les confrontant à de nouvelles données réelles. Si les prédictions ne collent pas bien avec la réalité, il convient de raffiner le modèle ou d'en construire un nouveau et de recommencer le cycle.

Un modèle mathématique n'est jamais une représentation tout à fait précise d'une situation réelle—ce n'en est qu'une *idéalisation*. Un bon modèle est celui qui simplifie suffisamment la réalité pour permettre des calculs mathématiques mais qui, en même temps, reste suffisamment proche de la réalité pour fournir des conclusions valables. Il est important d'avoir conscience des limites d'un modèle. Car en définitive, c'est Dame Nature qui a le dernier mot.

■ Modèles empiriques

Dans le cas où aucune loi physique ou aucun principe ne vient nous aider à élaborer un modèle, nous construisons un **modèle empirique**, basé seulement sur les données récoltées. Nous cherchons une courbe qui « s'ajuste » aux données au sens où elle suit la tendance principale des points observés. La table 1 présente le niveau moyen d'oxyde de carbone dans l'atmosphère, relevé entre 1972 et 1990 à l'observatoire de Mauna Loa. Les points correspondant à ces données sont reportés dans le repère de la figure 2, où t désigne le temps (en années) et C le niveau de CO_2 (en parts par million, ppm).

TABLE 1

Année	CO_2 (en ppm)
1972	327,3
1974	330,0
1976	332,0
1978	335,3
1980	338,5
1982	341,0
1984	344,3
1986	347,0
1988	351,3
1990	354,0

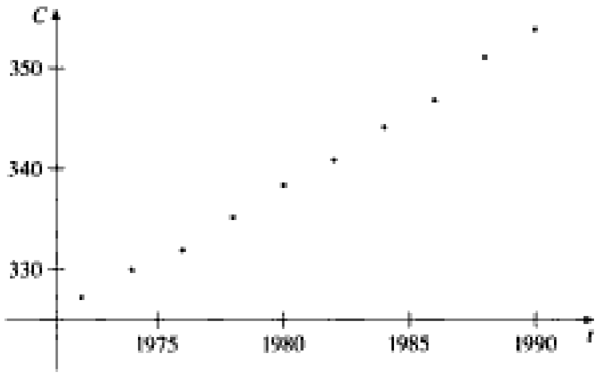


FIGURE 2 Graphique de points du niveau de CO_2

Comme les points sont presqu'alignés, il est normal, dans un tel cas, de penser à un modèle linéaire. Mais il y a beaucoup de droites qui passent plus ou moins à travers ces points, aussi, laquelle faut-il choisir ? On pourrait, par exemple, choisir la droite qui passe par le premier et le dernier point. Elle aurait alors comme pente

$$\frac{354,0 - 327,3}{1990 - 1972} = \frac{26,7}{18} \approx 1,48333$$

et son équation serait

$$C - 327,3 = 1,48333(t - 1972),$$

ou

1 $$C = 1,48333t - 2597,83.$$

L'équation (1) constitue un modèle linéaire possible pour le niveau d'oxyde de carbone (voyez la figure 3), mais il y a d'autres possiblités.

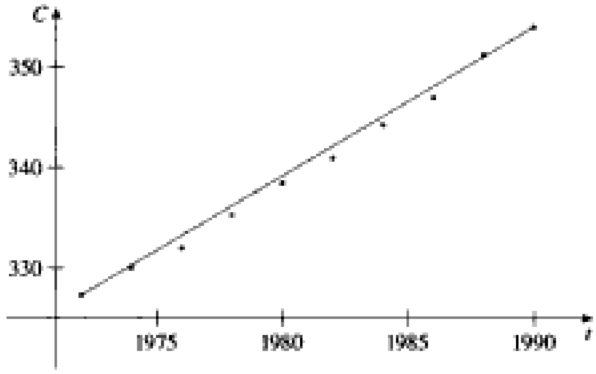


FIGURE 3
Modèle linéaire basé sur le premier et le dernier point

La situation générale est celle où nous avons des points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$ par lesquels nous voulons faire passer une droite $y = mx + b$ le mieux possible, selon un certain critère. Posons

$$d_i = |y_i - (mx_i + b)|,$$

la distance verticale entre le $i^{\text{ème}}$ point et la droite (voyez la figure 4).

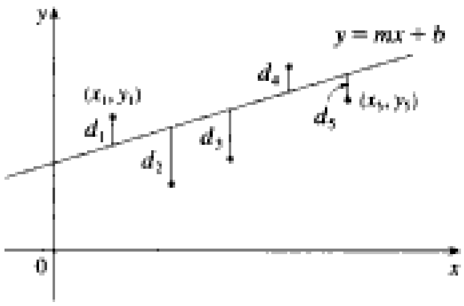


FIGURE 4

On pourrait décider que la meilleure droite serait celle qui minimiserait le plus grand des nombres $d_1, d_2, d_3, \ldots$ afin que la droite ne soit pas trop loin d'un quelconque des points. Parfois le critère de choix est de minimiser la somme $d_1 + d_2 + d_3 + \cdots$. Mais le critère le plus souvent employé est celui qui porte le nom de **méthode des moindres carrés** et qui rend minimale la somme des carrés des distances $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \cdots$. (Les statisticiens justifient ce critère en faisant l'hypothèse que les erreurs possibles dans les mesures sont distribuées aléatoirement.) En faisant appel aux méthodes du calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables, on arrive à des formules (compliquées) pour les coefficients m et b de la droite, appelée **droite de régression**. Heureusement la plupart des calculatrices ou ordinateurs sont programmés pour calculer les valeurs de m et b et tracent la droite de régression en même temps que les points.

EXEMPLE 1 ■ Sur la base des données sur le niveau de l'oxyde de carbone de la table 1 trouvez le modèle linéaire qui satisfait au critère des moindres carrés. Une fois que vous disposez de ce modèle, estimez le niveau de CO_2 en 1987 et prévoyez celui de l'an 2000. Selon ce modèle, en quelle année le niveau de CO_2 dépassera-t-il 400 parts par million ?

SOLUTION Après avoir entré les données de la table 1 on demande à l'ordinateur ou à la calculatrice dont on dispose l'exécution du programme relatif à la régression linéaire qui fait partie du progiciel statistique. Il en sort la pente m et l'ordonnée à l'origine b de la droite de régression

$$m = 1{,}496667 \quad b = -2624{,}826667.$$

Le modèle des moindres carrés du niveau de CO_2 est

$$C = 1{,}496667t - 2624{,}826667. \tag{2}$$

La figure 5 montre la droite de régression ainsi que les points de la table 1. Ce modèle linéaire-ci est manifestement meilleur que celui de la figure 3.

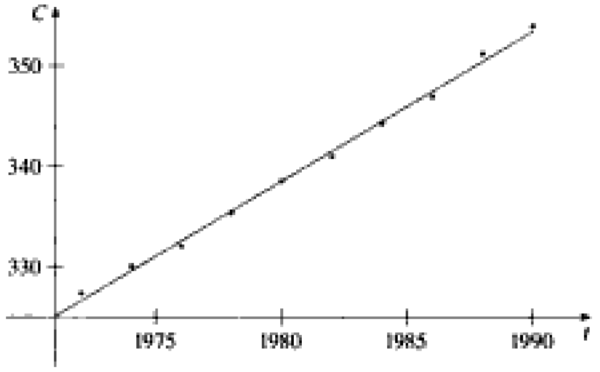


FIGURE 5
La droite de régression

Calculée en $t = 1987$, l'équation (2) donne un niveau moyen de CO_2 d'environ

$$C(1987) = (1{,}496667)(1987) - 2624{,}826667 \approx 349{,}05.$$

Un tel calcul s'appelle une *interpolation* car nous avons calculé une valeur située *entre* les valeurs observées. (En fait, l'observatoire de Mauna Loa avait noté que le niveau moyen de CO_2 en 1987 était de 348,8 ppm, ce qui est proche de notre estimation.)

Dans la même équation, nous faisons $t = 2000$ et nous obtenons

$$C(2000) = (1{,}496667)(2000) - 2624{,}826667 \approx 368{,}51.$$

Nous prévoyons donc que le niveau moyen de CO_2 sera en l'an 2000 de 368,51 ppm. Ce calcul s'appelle une *extrapolation* parce que nous avons calculé une valeur située en dehors de notre champ d'observations. Par conséquent, nous sommes beaucoup moins sûrs quant à la précision de notre prédiction.

Nous pouvons encore calculer quand, toujours selon l'équation (2), le niveau moyen de CO_2 excédera 400 ppm, c'est la valeur de t telle que

$$1{,}4966671t - 2624{,}826667 > 400,$$

ou

$$t > \frac{3024{,}826667}{1{,}496667} \approx 2021{,}04.$$

Le niveau moyen de CO_2 pourrait donc excéder 400 ppm vers 2021. Cette prévision est assez risquée parce qu'elle se situe dans un temps assez éloigné de nos observations.

TABLE 2

Année	Population (en millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

EXEMPLE 2 ■ Cherchez un modèle qui convienne pour la population mondiale au 20^e siècle sur la base des données de la table 2.

SOLUTION La figure 6 présente le graphique des points donnés.

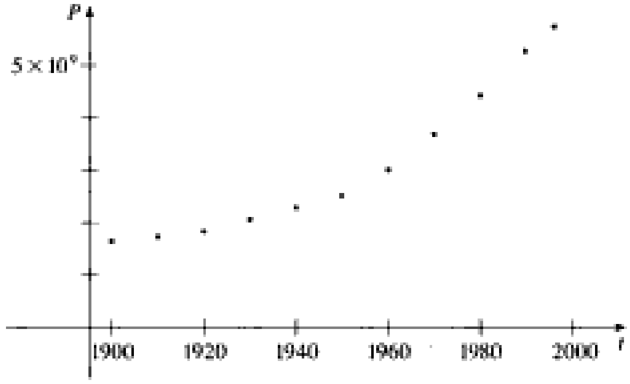


FIGURE 6 Graphique de points de la population mondiale

Nous voyons que la population croît trop vite pour qu'un modèle linéaire convienne ; l'allure générale est plutôt celle de la fonction exponentielle que nous avons étudiée à la section 1.5. Aussi, cherchons parmi les membres de la famille de fonctions

$$y = Ce^{kt}$$

celle qui représentera le mieux la croissance de la population. En prenant le logarithme de chaque membre de l'équation, nous trouvons

$$\ln y = \ln(Ce^{kt}) = \ln C + \ln e^{kt}$$
$$\ln y = \ln C + kt.$$

Alors que y était une fonction exponentielle de la variable t, la dernière équation exprime $\ln y$ comme une fonction affine de t.

Pour s'assurer que le modèle exponentiel convient, remplaçons la colonne population P de la table 2 par une colonne $\ln P$ et faisons dessiner un nouveau graphique de points, c'est celui de la figure 7.

TABLE 3

Année	$\ln P$
1900	21.224
1910	21.283
1920	21.344
1930	21.451
1940	21,556
1950	21.648
1960	21.829
1970	22.032
1980	22.216
1990	22.391
1996	22.476

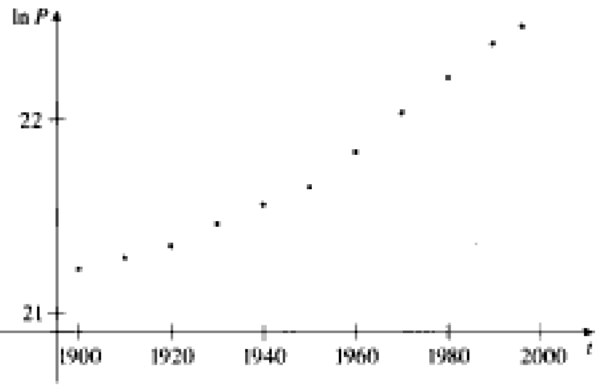


FIGURE 7

Malgré que les points ne soient pas aussi nettement alignés qu'à l'exemple 1, un modèle linéaire pour $\ln P$ est vraisemblable. Nous soumettons les données du tableau 3 au progiciel statistique qui nous fournit la droite de régression. La pente et l'ordonnée à l'origine sont

$$m = 0{,}013623 \quad b = -4{,}7911,$$

et notre modèle prend la forme de l'équation

3 $$\ln P = 0{,}013623t - 4{,}7911.$$

La figure 8 montre cette droite de régression.

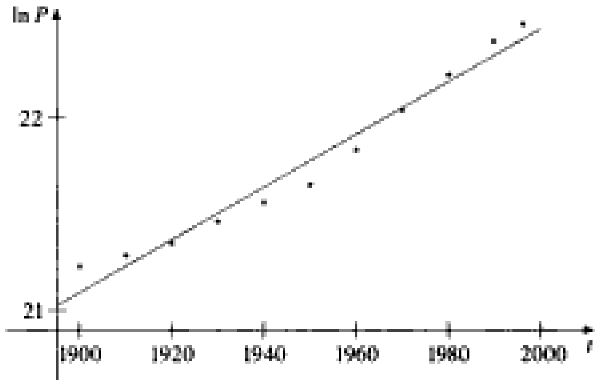


FIGURE 8

Nous résolvons l'équation (3) par rapport à P

$$P = e^{0{,}013623t} \cdot e^{-4{,}7911}$$

ou encore

4 $$P = 0{,}008303e^{0{,}013623t}.$$

Tel est le modèle exponentiel auquel nous sommes arrivés en calculant les logarithmes, en appliquant une régression linéaire, puis en résolvant par rapport à P au moyen de la fonction exponentielle. C'est le chemin qu'il faut faire avec la plupart des logiciels de calcul symbolique. Il existe néanmoins des calculatrices capables de traiter *directement* selon les moindres carrés une équation exponentielle. En employant un tel programme de régression exponentielle sur les données de la table 2, nous aurions obtenu la fonction

$$P = (0{,}008306312) \cdot (1{,}013716)^t.$$

Afin de pouvoir comparer avec l'équation (4), nous passons en base e en écrivant $1{,}013716 = e^k$, ce qui donne $k = \ln 1{,}013716 \approx 0{,}013623$ et finalement

5 $$P = 0{,}008306312e^{0{,}013623t}.$$

La très légère différence entre cette dernière équation et l'équation (4) s'explique par le fait que le critère des moindres carrés a été appliqué, dans un cas sur les données transformées de la table 3, et dans l'autre cas directement aux données originales.

La figure 9 montre le modèle exponentiel, des équations (4) ou (5), superposé aux points initiaux. Cette courbe s'ajuste assez bien à l'ensemble de points. La période de croissance lente de la population s'explique par les deux guerres et la crise des années trente.

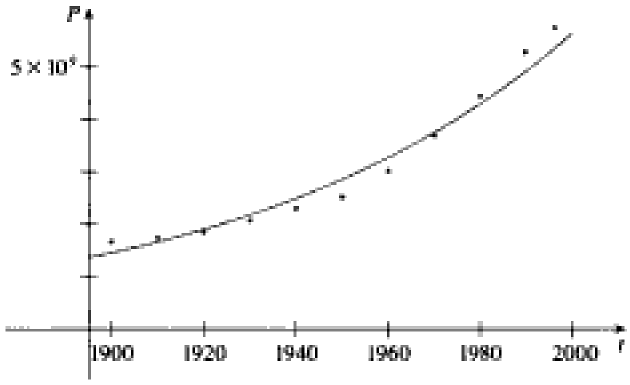


FIGURE 9
Modèle exponentiel pour la croissance de la population mondiale

Il y aurait d'autres modèles possibles pour les données de la table 2. Par exemple, un polynôme du troisième degré. Une calculatrice graphique ou un ordinateur renvoie, selon le critère des moindres carrés, le modèle

6 $$P = at^3 + bt^2 + ct + d$$

où

$$a = 2325{,}67 \qquad b = -1{,}306488 \times 10^7$$
$$c = 2{,}44631 \times 10^{10} \quad d = -1{,}52658 \times 10^{13}.$$

Nous faisons dessiner cette cubique et les points, cela donne la figure 10. Ce modèle s'ajuste vraiment très bien avec les chiffres de la population mondiale du 20^e siècle. C'est peut-être surprenant qu'il soit un meilleur modèle que l'exponentiel et qu'il soit particulièrement bon pour estimer la population en 1925 ou en 1985. Par contre, pour prédire la population mondiale en 2050 ou en 2100, il n'est sans doute pas aussi précis. Au chapitre 7, nous reprendrons en grands détails ce thème de la modélisation de la population mondiale.

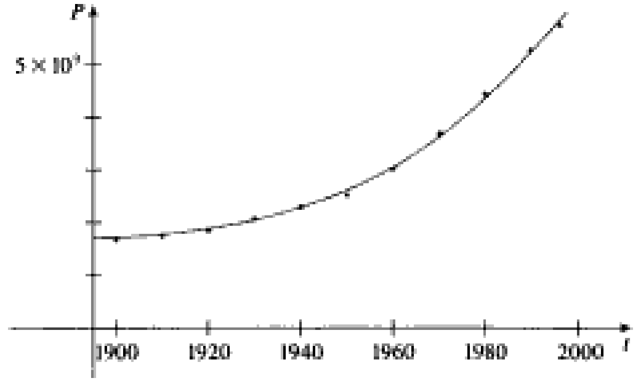


FIGURE 10
Modèle cubique pour la croissance de la population mondiale

Nous avons vu que les calculatrices graphiques ou les ordinateurs étaient capables de mettre au point des modèles du premier degré ou exponentiels sur des données selon le critère des moindres carrés. Deux autres types de fonctions sont souvent prévues comme modèles sur les machines.

Un modèle *potentiel* est une fonction de la forme $y = ax^n$, où a est une constante positive et n un nombre réel quelconque, défini sur le domaine de définition $[0, +\infty[$. On remarque que $\ln y = \ln a + n \ln x$, ce qui fait apparaître $\ln y$ comme une fonction du premier degré de $\ln x$. Dès lors, pour juger si ce modèle convient, on peut placer dans un repère les points de coordonnées $(\ln x, \ln y)$ et regarder si ces points sont plus ou moins alignés. Si c'est le cas, on utilise la régression linéaire pour établir le modèle linéaire entre $\ln x$ et $\ln y$, puis on résout par rapport à y. À moins que votre calculatrice graphique dispose d'une commande directe de calcul de a et n pour le modèle $y = ax^n$.

Les logiciels de calcul algébrique sont programmés pour exécuter le calcul des coefficients d'un polynôme de n'importe quel degré ajusté selon le critère des moindres carrés sur un ensemble de données. C'est ainsi qu'à l'exemple 2, nous avons utilisé un polynôme du troisième degré. Bien que des polynômes de degré supérieurs sont susceptibles de simuler un plus grand nombre de fluctuations des données, ils ne sont pas conseillés. Il vaut mieux opter pour une expression plus simple qui inclut la tendance principale des données. Les calculatrices graphiques sont généralement capables d'ajuster des polynômes de degré 2 (fonction quadratique), 3 (fonction cubique) et 4.

1.7 Exercices

1. La table présente les taux d'ulcère gastro-duodénal (par 100 personnes) pour différents revenus tel que les rapporte le sondage national de 1989 sur la santé.

Revenu (en euros)	Taux d'ulcère (par 100 personnes)
4 000	14,1
6 000	13,0
8 000	13,4
12 000	12,5
16 000	12,0
20 000	12,4
30 000	10,5
45 000	9,4
60 000	8,2

a) Faites un graphique de points de ces données et décidez si un modèle linéaire serait approprié.

b) Tracez le modèle linéaire basé sur les premier et dernier points et donnez-en l'expression.

c) Tracez le modèle linéaire basé sur les moindres carrés et donnez-en l'expression.

d) Quel taux d'ulcère ce dernier modèle attribue-t-il à un revenu de 25 000 euros ?

e) Selon ce modèle, quelle est la probabilité qu'une personne dont le revenu est de 80 000 euros souffre d'un ulcère gastro-duodénal ?

2. a) Prenez les données de la table 2 relatives aux années 1950-1996 pour modéliser la population mondiale durant la seconde moitié du 20^e^ siècle. Choisissez un modèle linéaire, un modèle exponentiel et un modèle cubique. Lequel de ces modèles vous paraît le meilleur ?

b) Quelle estimation de la population mondiale en 1985 et quelle estimation future de la population mondiale en 2000 et en 2100 ces différents modèles donnent-ils ? Parmi ces prédictions, laquelle vous semble la plus fiable ?

c) Utilisez encore ces modèles pour prévoir quand la population mondiale atteindra les 8 milliards.

3. Voici une table des émissions de plomb dans l'environnement aux USA en millions de tonnes, entre 1970 et 1992.

Année	Émissions (en millions de tonnes)
1970	199,1
1975	143,8
1980	68,0
1985	18,3
1988	5,9
1989	5,5
1990	5,1
1991	4,5
1992	4,7

a) Ajuster à ces données un modèle exponentiel et un polynôme du quatrième degré (Faites correspondre $t = 0$ à l'année 1970).

b) Estimez les émissions de plomb en 1972 et en 1982.

4. Une étude du bureau américain de la Science et de la Technologie estimait en 1972 le coût (en dollars de 1972) de la réduction des émissions automobiles selon certains pourcentages :

Réduction en émissions (%)	Coût par voiture (en $)	Réduction en émissions (%)	Coût par voiture (en $)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Établissez un modèle qui rende compte de la tendance aux rendements décroissants de ces données.

5. La table reprend le pourcentage d'élèves de dernière année de l'école secondaire qui confesse avoir fait usage de marijuana dans les 30 jours précédents.

Année	1980	1983	1985	1986	1987	1988
Pourcentage	33,7	27,0	25,7	23,4	21,0	18,0

Année	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Pourcentage	16,7	14,0	13,8	11,9	15,5	19,0

Cherchez un modèle qui convienne à ces données et utilisez-le pour évaluer le pourcentage en 1982 et pour prédire le pourcentage en 1995. Jusqu'où dans le futur êtes-vous disposés à vous servir de votre modèle pour faire des prédictions ?

6. La table reprend à quelle distance moyenne se trouvent les planètes du Soleil (prenant comme unité de distance, la distance Terre Soleil) ainsi que la durée T de leur révolution (durée de révolution en années)

Planète	d	T
Mercure	0,387	0,241
Vénus	0,723	0,615
Terre	1,000	1,000
Mars	1,523	1,881
Jupiter	5,203	11,861
Saturne	9,541	29,457
Uranus	19,190	84,008
Neptune	30,086	164,784
Pluton	39,507	248,350

a) Faites un graphique de points de T par rapport à d et un autre de $\ln T$ par rapport à $\ln d$. Un modèle potentiel vous semble-t-il convenir ?

b) Ajustez un modèle potentiel aux données ?

c) La troisième loi de Kepler sur le mouvement des planètes établit que « Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube de sa distance moyenne au Soleil ». Votre modèle corrobore-t-il la troisième loi de Kepler ?

Chapitre 1 Révision

• CONTRÔLE DES CONCEPTS •

1. Donnez une définition dans vos propres termes (Vérifiez votre réponse en vous référant à la définition du texte.)
   a) Fonction
   b) Domaine de définition et ensemble image
   c) Graphique d'une fonction
   d) Fonction strictement croissante
   e) Composition de deux fonctions
   f) Courbe paramétrique
2. a) Qu'est-ce qu'une fonction paire ? Comment reconnaissez-vous à son graphique qu'elle est paire ?
   b) Qu'est-ce qu'une fonction impaire ? Comment reconnaissez-vous à son graphique qu'elle est impaire ?
3. a) Qu'est-ce qu'une fonction injective ? Comment reconnaissez-vous à son graphique qu'elle est injective ?
   b) Si f est une fonction injective, comment est définie sa réciproque f^{-1} ? Comment pouvez-vous obtenir le graphique de f^{-1} à partir de celui de f ?
4. a) Expliquez le test de la droite verticale.
   b) Expliquez le test de la droite horizontale.
5. Donnez un exemple de chaque type de fonction.
   a) Une fonction constante
   b) Une fonction puissance
   c) Une fonction exponentielle
   d) Une fonction affine
   e) Une fonction polynomiale de degré 5
   f) Une fonction rationnelle
6. Faites à main levée un rapide graphique de la fonction.

   a) $y = x^3$ b) $y = x^4$
   c) $y = \sin x$ d) $y = \operatorname{tg} x$
   e) $y = e^x$ f) $y = \ln x$
   g) $y = 1/x$ h) $y = |x|$
   i) $y = \sqrt{x}$

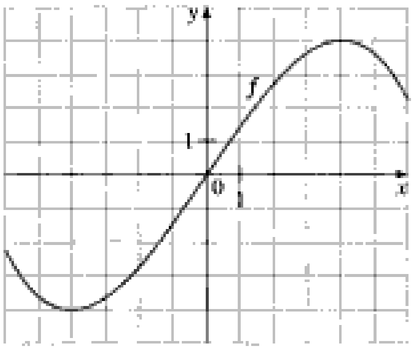
▲ VRAI-FAUX ▲

Dites si la proposition est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquez pourquoi. Si elle est fausse, expliquez pourquoi et donnez un exemple qui contredit la proposition.

1. Si f est injective, alors $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
2. Si $x_1 < x_2$ et si f est une fonction strictement décroissante, alors $f(x_1) > f(x_2)$.
3. Si f est une fonction, alors $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
4. Si $f(s) = f(t)$, alors $s = t$.
5. Une droite verticale coupe le graphique d'une fonction au plus une fois.
6. Vous pouvez toujours diviser par e^x.
7. Si $0 < a < b$, alors $\ln a < \ln b$.
8. Si $x > 0$, alors $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

◆ EXERCICES ◆

1. Voici le graphique d'une fonction f.



   a) Évaluez $f(2)$.
   b) Évaluez x tel que $f(x) = 3$.
   c) Déterminez le domaine de définition de f.
   d) Déterminez l'ensemble image de f.
   e) Sur quel intervalle f est-elle strictement croissante ?
   f) Est-ce que f est injective ? Expliquez.
   g) Est-ce que f est paire, impaire, ou aucun des deux ? Expliquez.

2. Voici le graphique d'une fonction g.

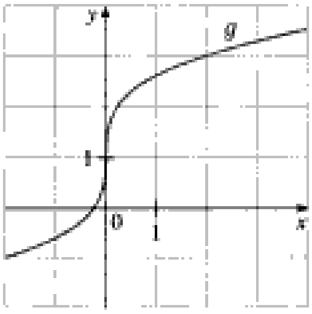
a) Évaluez $g(2)$.

b) Pourquoi g est-elle injective ?

c) Estimez la valeur de $g^{-1}(2)$.

d) Déterminez le domaine de définition de g^{-1}.

e) Dessinez le graphique de g^{-1}



3. La distance parcourue par un vélo est donnée dans la table.

t (en secondes)	0	1	2	3	4	5
d (en m)	0	10	32	70	119	178

a) Sur la base de ces données tracez le graphique de d en fonction de t.

b) Lisez sur le graphique la distance parcourue après 4,5 s.

4. Esquissez grossièrement le graphique du rendement d'une culture en fonction de la quantité d'engrais utilisée.

5-8 ■ Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction.

5. $f(x) = \sqrt{4 - 3x^2}$ **6.** $g(x) = 1/(x + 1)$

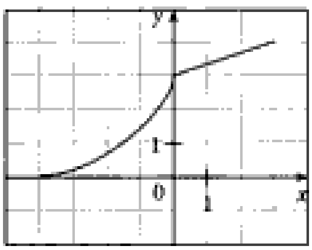
7. $h(t) = e^{-t^2}$ **8.** $y = \ln(1 - x)$

9. Expliquez comment obtenir le graphique des fonctions suivantes à partir du graphique de f, que l'on suppose donné.

a) $y = f(x) + 8$ b) $y = f(x + 8)$
c) $y = 1 + 2f(x)$ d) $y = f(x - 2) - 2$
e) $y = -f(x)$ f) $y = f^{-1}(x)$

10. Le graphique de f est dessiné ci-dessous. Faites celui des fonctions suivantes.

a) $y = f(x - 8)$ b) $y = -f(x)$
c) $y = 2 - f(x)$ d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
e) $y = f^{-1}(x)$ f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11-16 ■ Dessinez le graphique de la fonction.

11. $y = 1 + \sqrt{x + 2}$ **12.** $y = (x - 1)^4 - 1$

13. $y = \cos 3x$ **14.** $y = 3 - 2\sin x$

15. $f(x) = -e^x$ **16.** $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

17. Dites si f est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ b) $f(x) = x^3 - x^7$
c) $f(x) = e^{-x^2}$ d) $f(x) = 1 + \sin x$

18. Donnez une expression de la fonction dont le graphique se compose du segment qui joint le point $(-2, 2)$ au point $(-1, 0)$ et de la moitié supérieure du cercle centré à l'origine de rayon 1.

19. Soit $f(x) = \ln x$ et $g(x) = x^2 - 9$. Cherchez les expressions des fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, ainsi que leur domaine de définition.

20. Exprimez la fonction $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ comme la composée de trois fonctions.

21. Si $f(x) = 2x + \ln x$, que vaut $f^{-1}(2)$?

22. Déterminez la fonction réciproque de la fonction $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

23. Quelle est la valeur exacte de chaque expression ?

a) $e^{2\ln 3}$ b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

24. Résolvez chaque équation par rapport à x.

a) $e^x = 5$ b) $\ln x = 2$ c) $e^{e^x} = 2$.

25. Le palladium-100, ^{100}Pd, a une demi-vie de 4 jours (la moitié de n'importe quelle quantité de ^{100}Pd se désintègre donc en 4 jours). D'un échantillon de cet isotope de 1 g,

a) combien en reste-t-il après 16 jours ?

b) quelle quantité $m(t)$ en reste-t-il après t jours ?

c) donnez la fonction réciproque de $m(t)$ et expliquez sa signification.

d) estimez le temps qu'il faut pour qu'il n'en reste que 0,01 g.

26. Une certaine espèce d'animaux vit dans un environnement restreint et est capable d'accueillir 1000 unités au maximum. L'effectif est de 100 initialement et puis se monte à

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}},$$

où t est mesuré en années.

a) Dessinez le graphique de cette fonction et estimez le temps nécessaire à ce que cette population atteigne 900 unités.

b) Quelle est la fonction réciproque de cette fonction et quelle est sa signification ?

c) Utilisez cette fonction réciproque pour déterminer le temps nécessaire à ce que la population atteigne 900 unités. Comparez avec le résultat obtenu au point a).

27. Faites le graphique de quelques-uns des membres de la famille des fonctions $f(x) = \ln(x^2 - c)$ pour quelques valeurs de c. Comment la variation de c affecte-t-elle le graphique ?

28. Dessinez dans la même fenêtre les trois fonctions $y = x^a$, a^x et $y = \log_a x$ pour deux ou trois valeurs différentes de $a > 1$. Pour les grandes valeurs de x, laquelle de ces trois fonctions prend les plus grandes valeurs et les plus petites valeurs ?

29. a) Dessinez la courbe caractérisée par les équations paramétriques $x = e^t$, $y = \sqrt{t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Indiquez avec une flèche le sens de parcours pour les valeurs croissantes de t.

b) Éliminez le paramètre pour obtenir une équation cartésienne de la courbe.

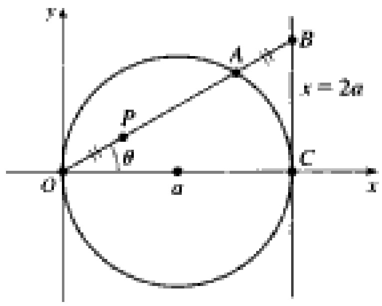
30. a) Écrivez des équations paramétriques pour décrire le mouvement d'un point qui fait un demi-tour en sens contraire des aiguilles d'une montre sur le cercle $(x-2)^2 + y^2 = 4$, de haut en bas.

b) Grâce aux équations de la première partie, dessinez ce trajet semi-circulaire.

31. Utilisez les équations paramétriques pour faire dessiner dans la même fenêtre le graphique de la fonction $f(x) = 2x + \ln x$ et de sa réciproque.

32. a) Donnez des équations paramétriques pour l'ensemble des points P situés, comme celui de la figure, de telle sorte que $|OP| = |AB|$. (Cette courbe porte le nom de **Cissoïde de Dioclès**, d'après le nom du savant grec Dioclès, qui introduisit cette courbe comme une méthode graphique de construction du sommet d'un cube de volume double d'un cube donné.)

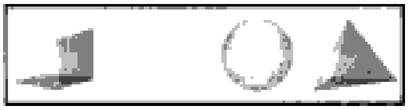
b) Utilisez la description géométrique de la courbe pour l'esquisser grossièrement. Vérifiez votre tracé en la faisant dessiner par ses équations paramétriques.



33. L'espérance de vie a crû de façon spectaculaire au cours de ce siècle. La table donne l'espérance de vie à la naissance (en années) d'un enfant mâle né aux États-Unis.

Année de naissance	Espérance de vie
1900	48,3
1910	51,1
1920	55,2
1930	57,4
1940	62,5
1950	65,6
1960	66,6
1970	67,1
1980	70,0
1990	71,8

Sur la base du diagramme de points, choisissez un modèle approprié. Selon votre modèle, quelle sera la durée de vie d'un enfant mâle né en l'an 2000 ?



Les principes de la résolution de problèmes

Il n'y a pas à proprement parler de règles strictes et rapides qui permettent à coup sûr de résoudre des problèmes. Toutefois, il est possible de dégager quelques étapes générales qui jalonnent la résolution d'un problème et de donner quelques principes qui peuvent s'avérer utiles pour résoudre certains problèmes. Ces étapes et ces principes ne sont rien d'autre qu'une explicitation du sens commun. Ils sont inspirés du livre de Georges Polya *Comment poser et résoudre un problème*.

1 Comprendre le problème

La première étape est de lire le problème et de s'assurer de l'avoir bien compris. Posez-vous les questions suivantes :

Quelle est l'inconnue ?
Quelles sont les données ?
Quelles sont les conditions données ?

Pour beaucoup de problèmes il est utile de

faire un dessin

et de distinguer sur le dessin ce qui est donné et ce qui est demandé.
Habituellement, il est nécessaire

d'introduire des notations convenables.

Nous choisissons souvent des lettres, telles a, b, c, m, n, x et y pour désigner les quantités inconnues, mais, dans certains cas, il est préférable de prendre des symboles plus suggestifs, par exemple V pour un volume, t pour le temps.

2 Élaborer un plan

Il s'agit de trouver le lien entre l'information donnée et l'inconnue de manière à dégager un calcul de cette inconnue. Se poser explicitement la question : « Comment puis-je relier les données et l'inconnue ? » peut aider. Si vous ne voyez pas de connexions immédiates, voici quelques suggestions pour vous aider à concevoir un plan.

Essayer de reconnaître quelque chose de familier Relier la situation donnée à vos connaissances antérieures. Regarder l'inconnue et essayer de retrouver un problème plus familier qui a une inconnue du même genre.

Essayer de reconnaître une structure Pour résoudre certains problèmes il suffit parfois d'observer qu'une même forme s'y reproduit. Cela peut concerner un élément géométrique, numérique ou algébrique. Si vous réussissez à voir une régularité ou une répétition dans un problème vous pouvez deviner comment cette régularité se prolonge et la démontrer.

Procéder par analogie Essayer de penser à un problème analogue, à savoir, un problème semblable, un problème connexe mais qui soit plus facile que le problème posé. Si vous êtes capable de résoudre le problème semblable plus simple, vous y trouverez les indices qui vous mèneront à la solution du problème posé, plus difficile. Par exemple, face à un problème qui implique des grands nombres, essayez d'abord de le résoudre avec des nombres plus petits. Face à un problème géométrique dans l'espace, essayez de regarder le problème analogue dans le plan. Ou encore, si le problème posé est général, envisagez d'abord de traiter un cas particulier.

Introduire quelque chose de nouveau Il peut parfois être nécessaire d'introduire quelque chose de nouveau, une aide auxiliaire qui facilite la connexion entre les données et l'inconnue. Ce peut être ajouter une ligne dans le dessin d'un problème géométrique, passer par une inconnue auxiliaire, liée à l'inconnue, dans un problème algébrique.

Décomposer en cas Nous pouvons parfois envisager différents cas d'un problème et donner une solution distincte dans chacun. Ce procédé est presque toujours d'application lorsqu'il y a des valeurs absolues.

Travailler à l'envers Il est parfois utile de faire comme si le problème était résolu et de remonter, étape par étape, jusqu'à retrouver les données. Il devient alors possible de renverser les étapes et de cette façon de construire une solution au problème original. La résolution d'équations se fait souvent de cette façon. Supposons avoir à résoudre l'équation $3x - 5 = 7$. Nous supposons que x est le nombre qui satisfait à l'équation $3x - 5 = 7$ et retournons en arrière. Nous ajoutons 5 aux deux membres de l'équation et divisons par 3, ce qui nous donne $x = 4$. Puisque chaque étape est réversible, nous avons résolu le problème.

Se fixer des objectifs moindres Face à un problème complexe, il est souvent utile de viser des objectifs qui ne sont que partiellement ceux de la situation souhaitée. Une fois ces objectifs partiels atteints, on peut leur greffer des compléments et atteindre le but final.

Raisonnement indirect Il convient parfois d'attaquer le problème indirectement. Le raisonnement par l'absurde fait partie de cette stratégie, où, pour prouver que P implique Q, on suppose que P est vrai et que Q est faux et on essaie alors de voir que cela est impossible. D'une façon ou d'une autre, nous devons employer cette information jusqu'à arriver à contredire quelque chose que nous savons être absolument vrai.

Raisonnement par récurrence Lorsqu'il s'agit de démontrer des propositions dans lesquelles intervient un entier positif n, il est souvent requis de suivre le raisonnement suivant.

> **Principe de récurrence** Soit S_n un énoncé qui comprend l'entier positif n. Supposons que
>
> **1.** S_1 soit vrai.
>
> **2.** S_{k+1} soit vrai lorsque S_k est vrai.
>
> Alors S_n est vrai quelles que soient les valeurs entières positives de n.

C'est tout à fait compréhensible puisque, lorsque S_1 est vrai, S_2 l'est aussi (d'après la condition 2 utilisée dans le cas $k = 1$). Puis, d'après la condition 2, utilisée dans le cas $k = 2$, S_3 est vrai. Puis encore, toujours d'après la condition 2, utilisée cette fois dans le cas $k = 3$, S_4 est vrai. Ce procédé peut être poursuivi indéfiniment.

3 Exécuter le plan

Un plan a été mis au point à l'étape 2. Au cours de l'exécution de ce plan, nous devons vérifier chaque étape et écrire les détails qui prouvent que chaque étape est correcte.

4 Revenir sur ce qui a été fait

Une fois la solution achevée, il est sage de la revoir, en partie pour vérifier qu'elle ne contient aucune erreur, en partie pour réfléchir s'il n'y a pas de solution plus simple. Une autre raison encore justifie de regarder en arrière, c'est de se familiariser avec la méthode de résolution qui pourra éventuellement servir dans un autre problème, plus tard. Descartes disait : « Chaque problème que j'ai résolu est devenu une règle qui m'a servi après coup pour résoudre d'autres problèmes ».

Ces principes de résolution de problèmes sont illustrés dans les exemples ci-après. Avant de lire leur solution, essayez de les résoudre par vous-même, en vous référant à ces principes de résolution de problèmes si vous êtes dans l'embarras. Vous trouverez utile de revenir à cette section de temps en temps quand vous chercherez à faire les exercices de chacun des chapitres de ce livre.

EXEMPLE 1 ■ Cherchez une expression de l'hypoténuse h d'un triangle rectangle dont l'aire mesure 25 m^2 en fonction de son périmètre P.

■ Comprendre le problème

SOLUTION Mettons d'abord de l'ordre dans l'information en distinguant l'inconnue et les données :

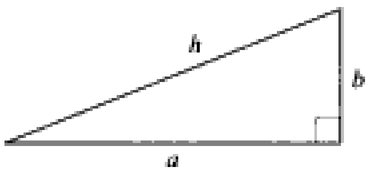
Inconnue : hypoténuse h

Données : périmètre P, aire 25m^2

■ Faire un croquis

Il est bon de faire un croquis, ce qui est fait dans la figure 1.

Figure 1



■ Établir le lien entre les données et l'inconnue
■ Introduire des éléments nouveaux

En vue d'établir le lien entre les données et l'inconnue, nous introduisons deux variables supplémentaires qui sont les mesures des deux autres côtés du triangle. Nous pouvons alors exprimer sous la forme du théorème de Pythagore le fait que le triangle est rectangle :

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

Les autres relations entre les variables proviennent des formules d'aire et de périmètre

$$25 = \frac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h.$$

Comme P est supposé donné, nous dénombrons trois équations et trois inconnues a, b et h :

1 $$h^2 = a^2 + b^2$$

2 $$25 = \tfrac{1}{2}ab$$

3 $$P = a + b + h$$

Même si les équations sont en nombre suffisant, il n'est pas facile de les résoudre de façon immédiate. La stratégie de résolution de problèmes nous dit encore d'essayer de reconnaître quelque chose de familier afin de résoudre ces équations plus facilement. Regardons seulement les membres de droite de ces équations. Ne nous rappellent-ils pas quelque chose de familier ? Ils contiennent les éléments d'une formule bien connue :

■ Reconnaître quelque chose de familier

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Cette observation nous conduit à deux expressions de $(a+b)^2$. De (1) et (2), nous obtenons

$$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab = h^2 + 4(25).$$

De (3), nous avons

$$(a+b)^2 = (P-h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2.$$

De là, en égalant,

$$\begin{aligned} h^2 + 100 &= P^2 - 2Ph + h^2 \\ 2Ph &= P^2 - 100 \\ h &= \frac{P^2 - 100}{2P} \end{aligned}$$

Telle est l'expression demandée de h en fonction de P.

Comme la marche à suivre pour résoudre des problèmes le suggère, il faut distinguer des cas dans les problèmes où interviennent des valeurs absolues. En voici une illustration.

EXEMPLE 2 ■ Résoudre l'inégalité $|x-3| + |x+2| < 11$.

SOLUTION Rappelons le définition de la valeur absolue :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |x-3| &= \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geqslant 0 \\ -x+3 & \text{si } x-3 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3. \end{cases} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} |x+2| &= \begin{cases} x+2 & \text{si } x+2 \geqslant 0 \\ -(x+2) & \text{si } x+2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x-2 & \text{si } x < -2. \end{cases} \end{aligned}$$

■ Distinguer des cas

Ces expressions forcent à distinguer 3 cas :

$$x < -2 \quad -2 \leqslant x < 3 \quad x \geqslant 3$$

CAS 1 ● Si $x < -2$, nous avons

$$\begin{aligned} |x-3| + |x+2| &< 11 \\ -x+3-x-2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

CAS 2 ● Si $-2 \leqslant x < 3$, l'inégalité originale devient

$$\begin{aligned} -x+3+x+2 &< 11 \\ 5 &< 11 \qquad \text{(toujours vrai)} \end{aligned}$$

CAS 3 ● Si $x \geqslant 3$, l'inégalité devient

$$\begin{aligned} x-3+x+2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Compte tenu des trois cas, l'inégalité est satisfaite quand $-5 < x < 6$. La solution est donc l'intervalle $]-5, 6[$. ■

Dans l'exemple qui suit, nous conjecturons la réponse après avoir examiné quelques cas et reconnu une régularité. Ensuite, nous faisons la démonstration par récurrence.

Conformément au Principe de récurrence, nous parcourons trois étapes.

Étape 1. Démontrer que S_n est vrai pour $n = 1$.

Étape 2. Supposer que S_n est vrai quand $n = k$ et en déduire que S_n est vrai quand $n = k + 1$.

Étape 3. Conclure que S_n est vrai pour tout n entier naturel grâce au Principe de récurrence.

EXEMPLE 3 ■ Si $f_0(x) = \dfrac{x}{x+1}$ et $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, trouvez une formule pour $f_n(x)$.

■ Analogie : Essayer un problème semblable, plus simple

SOLUTION Nous commençons par chercher des formules pour $f_n(x)$ dans les cas $n = 1$, 2 et 3.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1} \end{aligned}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

■ Observer une régularité

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Nous observons une régularité : le coefficient de x au dénominateur de $f_n(x)$ est d'une unité supérieur à n, dans chacun des cas que nous avons calculés. De là, notre conjecture

$$f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}. \tag{4}$$

Pour démontrer que cette formule est correcte quel que soit n, nous faisons appel au Principe de récurrence. Nous avons déjà vérifié qu'elle est correcte pour $n = 1$. Maintenant, nous la supposons correcte pour $n = k$, autrement dit, nous supposons que

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x+1}.$$

Alors,

$$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}.$$

Cette dernière expression montre que (4) est vraie pour $n = k + 1$. Conformément au Principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier positif n.

Problèmes

1. Un des côtés d'un triangle rectangle mesure 4 cm. Cherchez une expression de la hauteur perpendiculaire à l'hypoténuse en fonction de la longueur de l'hypoténuse.

2. La hauteur perpendiculaire à l'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 12 cm. Exprimez la longueur de l'hypoténuse comme une fonction du périmètre.

3. Résoudre l'équation $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.

4. Résoudre l'inégalité $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.

5. Dessiner le graphique de la fonction $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.

6. Dessiner le graphique de l'équation $|x| + |y| = 1 + |xy|$.

7. Délimiter la région du plan dont les points (x, y) satisfont à

$$|x| + |y| \leqslant 1.$$

8. Délimiter la région du plan dont les points (x, y) satisfont à

$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2.$$

9. Calculer $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5) \cdots (\log_{31} 32)$.

10. a) Montrer que la fonction $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ est une fonction impaire.

b) Déterminer sa fonction réciproque.

11. Résoudre l'inégalité $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.

12. Par un raisonnement indirect, démontrer que $\log_2 5$ est un nombre irrationnel.

13. Montrer que

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} y = \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2})$$

dans le cas où le membre de gauche de cette équation est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

14. Est-il vrai que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?

15. Démontrer que $7^n - 1$ est divisible par 6 (n est un entier positif).

16. Démontrer que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

17. Si $f_0(x) = x^2$ et $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, trouver une formule pour $f_n(x)$.

18. a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ et $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, trouver une expression pour $f_n(x)$ et la démontrer par récurrence.

b) Tracer dans la même fenêtre f_0, f_1, f_2, f_3 et décrire les effets des compositions successives.

Dans *Un aperçu du calcul différentiel et intégral*, nous avons vu combien l'idée de limite sous-tend les différentes parties du calcul différentiel et intégral. Il est donc opportun de commencer notre étude par l'examen des limites et de leurs propriétés. Le type de limite employé pour déterminer des tangentes et des vitesses donne naissance à la notion centrale, en calcul différentiel et intégral, de dérivée. Nous voyons comment des dérivées peuvent être interprétées comme taux de variation dans diverses situations et nous apprenons comment la dérivée d'une fonction nous renseigne sur la fonction elle-même.

2

Les limites et les dérivées

2.1 Les problèmes de tangente et de vitesse

Dans cette section, nous allons voir comment des limites surviennent lorsque nous cherchons la tangente à une courbe ou la vitesse d'un objet.

Le problème de la tangente

Le mot *tangente* vient du latin *tangens*, qui signifie « toucher ». Donc, une tangente à une courbe est une droite qui touche la courbe. Voyons comment préciser cette première idée.

Quand il s'agit d'un cercle, nous pouvons simplement suivre Euclide et dire qu'une tangente est une droite qui coupe le cercle une et une seule fois comme à la figure 1(a). Mais pour d'autres courbes, cette définition ne convient plus. La figure 1(b) montre deux droites l et t passant par un point P d'une courbe C. La droite l ne coupe C qu'une seule fois mais elle ne ressemble pas à l'idée que nous avons d'une tangente. La droite t, pour sa part, ressemble à une tangente, mais elle coupe C deux fois.

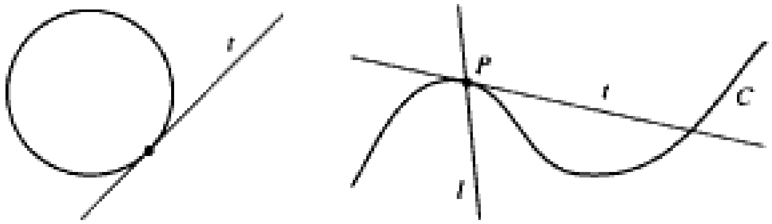


FIGURE 1

Pour ne pas rester dans le vague, posons-nous le problème de déterminer une tangente t à la parabole $y = x^2$. C'est l'exemple suivant.

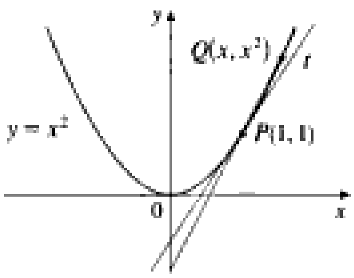


FIGURE 2

EXEMPLE 1 ■ Déterminez une équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $P(1, 1)$.

SOLUTION Nous pourrons écrire l'équation de la tangente dès que nous aurons déterminé sa pente m. Or, nous ne connaissons qu'un seul point de t et il nous en faudrait deux pour pouvoir calculer sa pente. Qu'à cela ne tienne, nous pouvons obtenir une valeur approchée de m en choisissant un point voisin $Q(x, x^2)$ sur la parabole (comme celui de la figure 2) et en calculant la pente m_{PQ} de la sécante PQ.

Nous décidons que $x \neq 1$ pour que Q ne coïncide pas avec P. Alors

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Par exemple, pour $Q(1{,}5; 2{,}25)$, nous avons

$$m_{PQ} = \frac{2{,}25 - 1}{1{,}5 - 1} = \frac{1{,}25}{0{,}5} = 2{,}5.$$

x	m_{PQ}
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001

x	m_{PQ}
0	1
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

Les tables dans la marge montrent les valeurs de m_{PQ} pour quelques valeurs de x proches de 1. Plus Q est proche de P, plus x est proche de 1 et, d'après les tables, plus m_{PQ} est proche de 2. Ce qui fait penser que la pente m de la tangente serait égale à 2.

Nous déclarons que la pente de la tangente est la *limite* des pentes des sécantes, et nous écrivons cela symboliquement comme suit :

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m$$

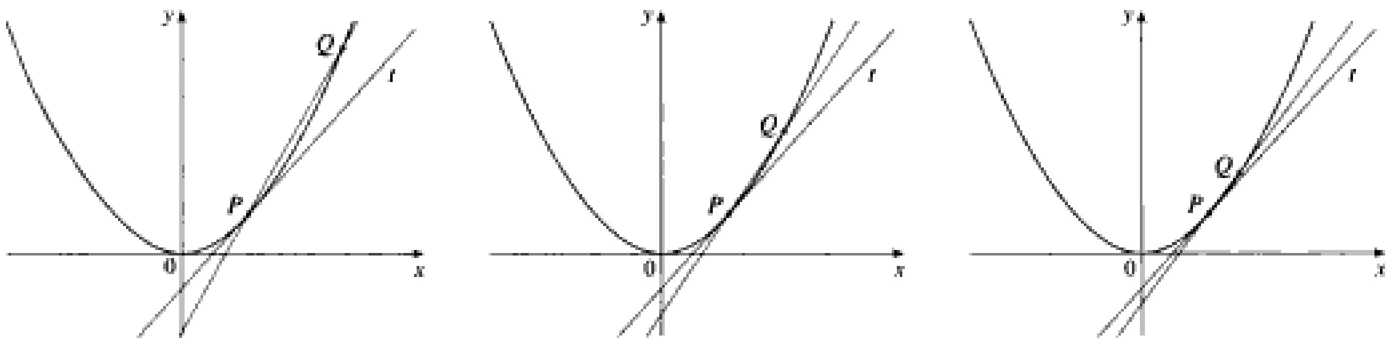
et

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

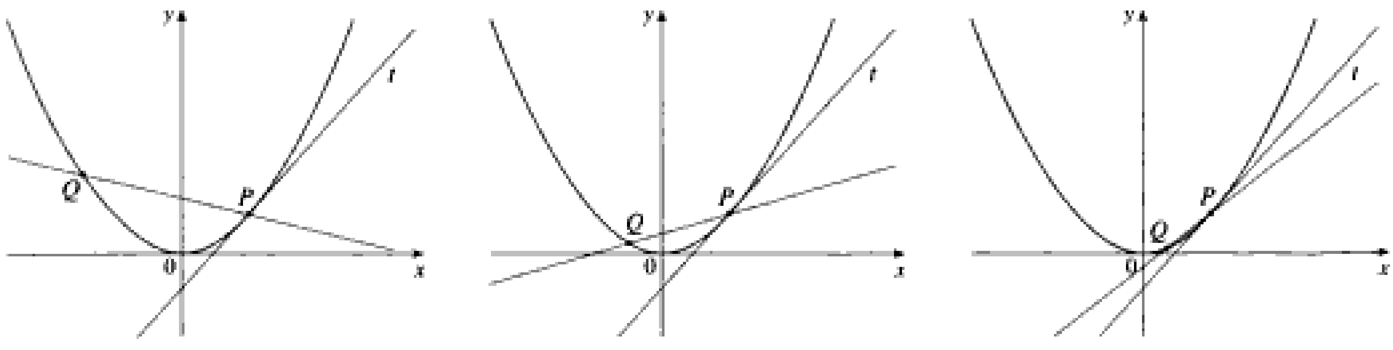
En supposant que la pente de la tangente est effectivement 2, nous employons la formule (voyez l'annexe B) de l'équation d'une droite passant par un point et de pente connue pour écrire l'équation de la tangente en $(1, 1)$

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1.$$

La figure 3 tente d'illustrer le processus de limite présent dans cet exemple. Lorsque Q se rapproche de P le long de la parabole, les sécantes correspondantes tournent autour de P et sont sur le point de coïncider avec la tangente t.



Q s'approche de P par la droite



Q s'approche de P par la gauche

FIGURE 3

Beaucoup de fonctions qui interviennent en science ne sont pas connues par leur expression analytique, mais seulement par des données expérimentales. L'exemple que voici montre comment estimer la pente de la tangente au graphique dans ce cas.

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

EXEMPLE 2 ■ Le principe de fonctionnement du flash d'un appareil photo est le suivant. Une charge, accumulée sur une capacité, est soudainement libérée quand le flash se déclenche. Les données dans la marge décrivent la charge Q résiduelle de la capacité (mesurée en microcoulombs) au temps t (mesuré en secondes). Sur la base de ces données, dessinez le graphique de cette fonction et évaluez la pente de la tangente au point correspondant à $t = 0{,}04$. [*Remarque :* La pente de la tangente représente le courant électrique qui passe de la capacité vers la lampe du flash (mesuré en microampères)].

SOLUTION À la figure 4 sont reportées les données et une courbe passe par les points, ce qui donne un graphique approximatif de la fonction.

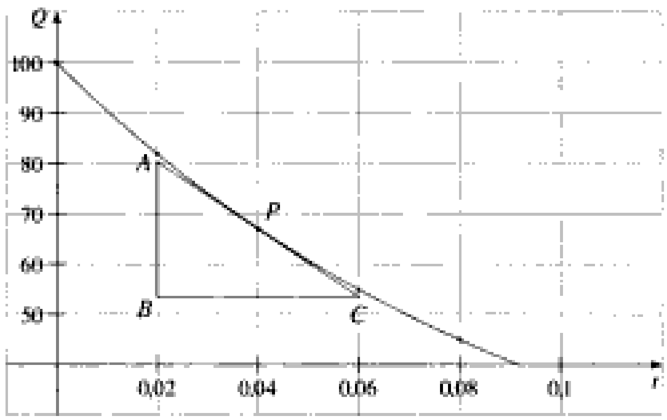


FIGURE 4

La pente de la sécante PQ passant par les points $P(0{,}04; 67{,}03)$ et $Q(0{,}00; 100{,}00)$ du graphique est égale à

$$m_{PQ} = \frac{100{,}00 - 67{,}03}{0{,}00 - 0{,}04} = -824{,}25.$$

Q	m_{PQ}
(0,00 ; 100,00)	−824,25
(0,02 ; 81,87)	−742,00
(0,06 ; 54,88)	−607,50
(0,08 ; 44,93)	−552,50
(0,10 ; 36,76)	−504,50

La table dans la marge présente les résultats des calculs analogues pour d'autres sécantes. À partir de cette table, nous devrions nous attendre à ce que la pente de la tangente se situe quelque part entre −742 et −607,5. En fait, la moyenne des pentes des deux sécantes les plus proches est égale à

$$\frac{1}{2}(-742 - 607{,}5) = -674{,}75.$$

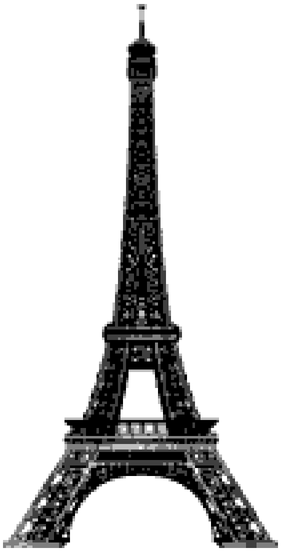
Par cette méthode, nous estimons que la pente de la tangente vaut −675.

Nous pourrions aussi tracer une tangente approximative en P et mesurer les côtés du triangle ABC de la figure 4. Voici ce que cela donne comme résultat

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80{,}4 - 53{,}6}{0{,}06 - 0{,}02} = -670.$$

■ Le problème de la vitesse

Si vous regardez le tachymètre de votre voiture pendant que vous circulez en ville, vous constatez que l'aiguille ne reste pas en place très longtemps ; autrement dit, la vitesse de la voiture n'est pas constante. Cette observation du tachymètre nous convainc que la voiture est animée d'une certaine vitesse à chaque instant, mais comment définir cette vitesse instantanée ? Examinons l'exemple d'une balle en chute libre.



La Tour Eiffel à Paris.

EXEMPLE 3 ■ Supposons qu'une balle soit lâchée du faîte de la tour Eiffel, à 300 m au-dessus du niveau du sol. Quelle est la vitesse de la balle 5 secondes plus tard ?

SOLUTION Pour résoudre ce problème nous utilisons le fait, découvert par Galilée il y a presque 4 siècles, que la distance parcourue par un corps qui tombe librement est proportionnelle au carré du temps (il est fait abstraction de la résistance de l'air). Si $s(t)$ désigne la distance de chute après t secondes et est mesurée en mètres, la loi de Galilée dit que

$$s(t) = 4{,}9t^2.$$

Il est difficile de déterminer la vitesse après 5 secondes car il s'agit d'envisager un seul instant ($t = 5$) et non pas un intervalle de temps. Nous pouvons néanmoins penser à approximer la quantité demandée par la vitesse moyenne sur un bref intervalle de temps d'un dixième de seconde, de $t = 5$ à $t = 5{,}1$:

$$\begin{aligned} \text{vitesse moyenne} &= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps écoulé}} \\ &= \frac{s(5{,}1) - s(5)}{0{,}1} \\ &= \frac{4{,}9(5{,}1)^2 - 4{,}9(5)^2}{0{,}1} = 49{,}49 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Dans la table que voici figurent les vitesses moyennes, calculées de la même façon, sur des intervalles de temps de plus en plus petits.

Intervalle de temps	Vitesse moyenne (m/s)
$5 \leqslant t \leqslant 6$	53,9
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}1$	49,49
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}05$	49,245
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}01$	49,049
$5 \leqslant t \leqslant 5{,}001$	49,0049

Nous pouvons constater en raccourcissant les intervalles de temps que la vitesse moyenne devient proche de 49 m/s. La **vitesse instantanée** quand $t = 5$ est par définition la valeur limite de ces vitesses moyennes sur des périodes de plus en plus courtes à partir de $t = 5$. Nous concluons donc que la vitesse (instantanée) après 5 s est

$$v = 49 \text{ m/s.}$$

Vous avez sans doute l'impression que les calculs qui ont été effectués dans ce problème sont très semblables à ceux de la section précédente dans le problème de la tangente. De fait, il y a un lien très étroit entre le problème de la tangente et le problème de la vitesse. Si nous traçons le graphique de la fonction distance de chute de la balle (la courbe de la figure 5) et que nous considérons les points $P(a; 4{,}9a^2)$ et $Q(a+h; 4{,}9(a+h)^2)$ sur la courbe, la pente de la sécante PQ est donnée par

$$m_{PQ} = \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9a^2}{(a+h) - a},$$

qui est la même formule que celle qui donnait la vitesse moyenne sur l'intervalle de temps $[a, a+h]$. Dès lors, la vitesse au moment $t = a$ (la limite de ces vitesses moyennes lorsque h tend vers 0) doit être égale à la pente de la tangente en P (la limite des pentes des sécantes).

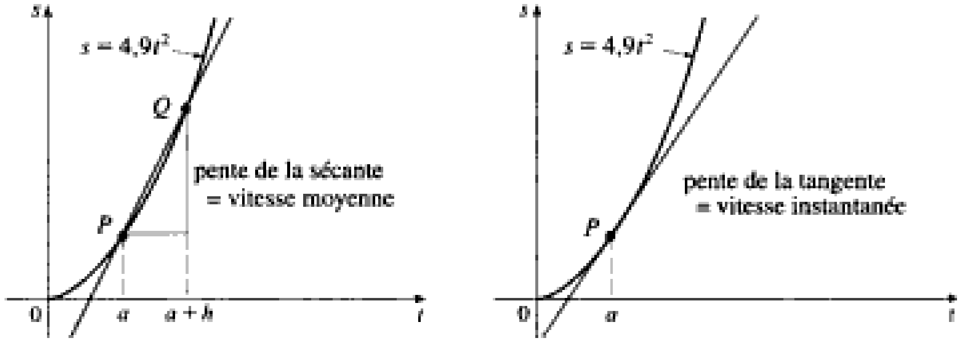


FIGURE 5 (a) (b)

Les exemples 1 et 3 démontrent que pour résoudre des problèmes de tangente ou de vitesse, il faut être capable de calculer des limites. Après avoir consacré les quatre prochaines sections aux méthodes de calcul des limites, nous reviendrons donc, à la section 2.6, aux problèmes de tangente et de vitesse.

2.1 Exercices

1. Une fonction y de x est définie par les données expérimentales que voici.

x	0	1	2	3	4	5
y	2,6	2,0	1,1	1,3	2,1	3,5

a) Si P est le point $(3; 1{,}3)$, calculez les pentes des sécantes PQ quand Q est le point du graphique d'abscisse $x = 0, 1, 2, 4$ et 5.

b) Évaluez la pente de la tangente en P en faisant la moyenne des pentes de deux sécantes.

c) Employez le graphique de la fonction pour estimer la pente de la tangente en P.

2. Un moniteur surveille le rythme cardiaque d'un patient qui vient d'être opéré. Celui-ci compte le nombre de battements après t minutes. Quand les données de la table sont reportées dans un système d'axes, la pente de la tangente représente le rythme cardiaque en nombre de coups par minute.

t (min)	36	38	40	42	44
Battements	2530	2661	2806	2948	3080

Le moniteur estime cette valeur en calculant la pente de la sécante. Sur la base de ces données, estimez le rythme cardiaque du patient après 42 minutes à partir des sécantes entre

a) $t = 36$ et $t = 42$

b) $t = 38$ et $t = 42$

c) $t = 40$ et $t = 42$

d) $t = 42$ et $t = 44$.

Quelles sont vos conclusions ?

3. Le point $P(4, 2)$ appartient à la courbe $y = \sqrt{x}$.

a) Si Q est le point $(x, \sqrt{x})$, calculez avec votre calculatrice la pente de la sécante PQ (avec 6 décimales correctes) pour les valeurs suivantes de x :

■ 5 ■ 4,5
■ 4,1 ■ 4,01
■ 4,001 ■ 3
■ 3,5 ■ 3,9
■ 3,99 ■ 3,999

b) Des résultats de la partie a), déduisez une valeur de la pente de la tangente à la courbe en $P(4, 2)$.

c) Écrivez une équation de la tangente à la courbe en $P(4, 2)$ dont la pente est celle obtenue au point b).

4. Le point $P(0{,}5; 2)$ appartient à la courbe $y = 1/x$.

a) Si Q est le point $(x, 1/x)$, calculez avec votre calculatrice la pente de la sécante PQ (avec 6 décimales correctes) pour les valeurs suivantes de x :

■ 2 ■ 1
■ 0,9 ■ 0,8
■ 0,7 ■ 0,6
■ 0,55 ■ 0,51
■ 0,45 ■ 0,49

b) Des résultats de la partie (a), déduisez une valeur de la pente de la tangente à la courbe en $P(0{,}5; 2)$.

c) Écrivez une équation de la tangente à la courbe en $P(0{,}5; 2)$ dont la pente est celle obtenue au point (b).

d) Dessinez la courbe, deux des sécantes et la tangente.

5. Si une balle est lancée en l'air avec une vitesse de 12 m/s, sa hauteur en mètres après t secondes est donnée par $y = 12t - 4{,}9t^2$.

a) Calculez la vitesse moyenne sur des périodes commençant en $t = 2$ et d'une durée de

■ 0,5 s ■ 0,1 s
■ 0,05 s ■ 0,01 s

b) Calculez la vitesse instantanée en $t = 2$.

6. Si une flèche est décochée verticalement sur la lune à la vitesse de 58 m/s, sa hauteur en mètres après t secondes est donnée par $h = 58t - 0{,}83t^2$.

a) Calculez la vitesse moyenne sur les intervalles de temps donnés :

■ [1, 2] ■ [1 ; 1,5] ■ [1 ; 1,1]
■ [1 ; 1,01] ■ [1 ; 1,001]

b) Calculez la vitesse de la flèche 1 s après son lancer.

7. La distance parcourue (en m) d'un mobile qui se déplace en ligne droite est donnée par $s = t^3/6$, où t est mesuré en secondes.

a) Calculez la vitesse moyenne sur les intervalles de temps suivants :

■ [1, 3] ■ [1, 2]
■ [1 ; 1,5] ■ [1 ; 1,1]

b) Calculez la vitesse instantanée au moment $t = 1$.

c) Représentez le graphique de s en fonction de t et tracez les sécantes qui ont comme pente les vitesses moyennes calculées au point a).

d) Tracez la tangente qui a comme pente la vitesse instantanée obtenue au point b).

8. La position d'une moto est donnée par les valeurs de la table

t (en s)	0	1	2	3	4	5
s (en m)	0	10	32	70	119	178

a) Calculez la vitesse moyenne pour les intervalles de temps commençant au moment $t = 2$ et d'une durée

■ 3 s ■ 2 s ■ 1 s

b) Utilisez le graphique de s en fonction de t pour estimer la vitesse instantanée au moment $t = 2$.

9. Le point $P(1, 0)$ appartient à la courbe $y = \sin(10\pi/x)$.

a) Si Q est un point de coordonnées $(x, \sin(10\pi/x))$, calculez (avec une précision de 4 décimales) la pente de la sécante PQ pour $x = 2 ; 1{,}5 ; 1{,}4 ; 1{,}3 ; 1{,}2 ; 1{,}1 ; 0{,}5 ; 0{,}6 ; 0{,}7 ; 0{,}8$ et $0{,}9$. Est-ce que les pentes semblent s'approcher d'une limite ?

b) Utilisez un graphique de la courbe pour expliquer pourquoi les pentes des sécantes de la partie a) ne sont pas proches de la pente de la tangente en P.

c) En choisissant des sécantes convenables, évaluez la pente de la tangente en P.

2.2 La limite d'une fonction

Après avoir vu dans la section précédente comment les limites interviennent lorsqu'il s'agit de déterminer la tangente à une courbe ou la vitesse d'un objet, nous nous tournons maintenant vers les limites en général et la manière de les calculer.

Examinons le comportement de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 2$ pour des valeurs de x proches de 2. La table que voici reprend les valeurs de $f(x)$ pour un certain nombre de valeurs de x proches de 2, mais différentes de 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,000000	3,0	8,000000
1,5	2,750000	2,5	5,750000
1,8	3,440000	2,2	4,640000
1,9	3,710000	2,1	4,310000
1,95	3,852500	2,05	4,152500
1,99	3,970100	2,01	4,030100
1,995	3,985025	2,005	4,015025
1,999	3,997001	2,001	4,003001

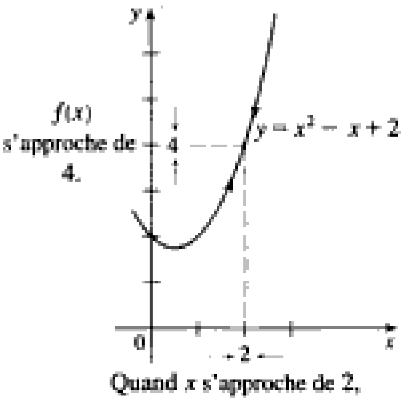


FIGURE 1

En nous référant tant à la table qu'au graphique de f (une parabole) présenté à la figure 1, nous voyons que lorsque x est proche de 2 (de part et d'autre), les valeurs de $f(x)$ sont proches de 4. En fait, il semble que nous puissions rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de 4 en choisissant x suffisamment proche de 2. C'est le sens de l'expression « la limite de $f(x) = x^2 - x + 2$ quand x s'approche de 2 est 4 ». Cela s'écrit

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4.$$

1 Définition Nous écrivons

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

et nous énonçons

« la limite de $f(x)$, quand x tend vers a, est égale à L »

si nous pouvons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de L (aussi proches que nous le voulons) en prenant x suffisamment proche de a, mais non égal à a.

Grosso modo, cela revient à dire que les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus proches du nombre L lorsque x s'approche du nombre a (des deux côtés de a) mais $x \neq a$.

Une autre façon de noter

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

est

$$f(x) \to L \quad \text{quand} \quad x \to a$$

qui se lit « $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a. »

Arrêtons-nous un moment à la proposition « mais $x \neq a$ » dans la définition de la limite. Elle signifie que dans la recherche de la limite de $f(x)$ quand x est proche de a, nous n'envisageons jamais $x = a$. En fait, $f(x)$ ne doit même pas être définie en $x = a$. La seule chose qui importe est que f soit définie tout à côté de a.

La figure 2 montre les graphiques de trois fonctions. On voit sur le graphique (c) que $f(a)$ n'est même pas définie et sur le graphique (b) que $f(a) \neq L$. Et pourtant, dans chaque cas, indépendemment de ce qui se passe en a, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

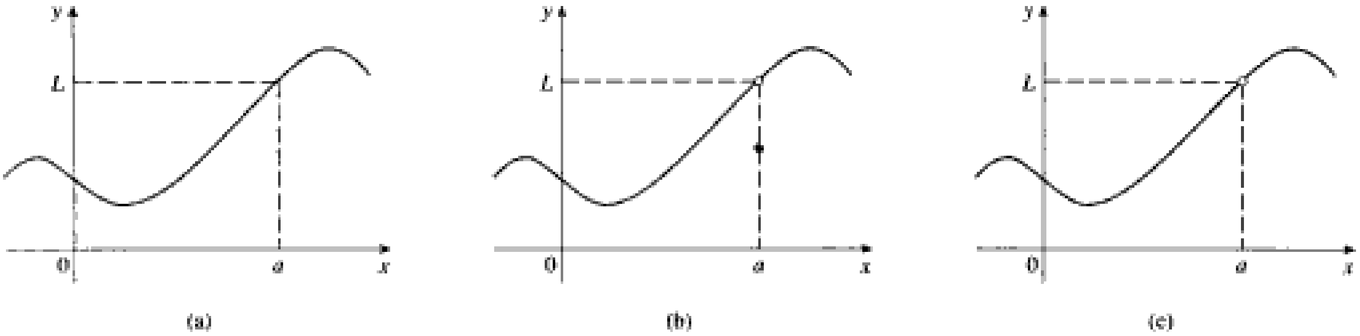


FIGURE 2
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ dans les trois cas.

EXEMPLE 1 ■ Conjecturez la valeur de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$.

SOLUTION On remarque tout de suite que la fonction $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ n'est pas définie en $x = 1$, mais cela n'a pas d'importance puisque la définition de $\lim_{x \to a} f(x)$ dit que seules les valeurs de x proches de a comptent, mais pas $x = a$. Les tables dans la marge donnent les valeurs de $f(x)$ avec 6 décimales correctes pour des valeurs de x proches de 1 mais différentes de 1. D'après ces valeurs, il semble que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0{,}5.$$

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

La figure 3 illustre graphiquement l'exemple 1. Maintenant changeons légèrement f en lui attribuant la valeur 2 en $x = 1$ et en appelant la nouvelle fonction g :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Cette nouvelle fonction g a toujours la même limite quand x tend vers 1 (voyez la figure 4).

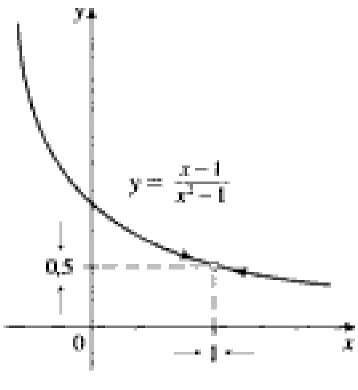


FIGURE 3

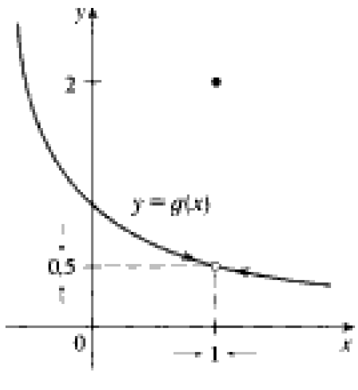


FIGURE 4

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

SOLUTION Les valeurs que prend la fonction pour quelques valeurs de t proches de 0 figurent dans la table ci-dessous.

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 1{,}0$	0,16228
$\pm 0{,}5$	0,16553
$\pm 0{,}1$	0,16662
$\pm 0{,}05$	0,16666
$\pm 0{,}01$	0,16667

Lorsque t est proche de 0, les valeurs de la fonction semblent être proches de 0,1666 . . .. Aussi, nous conjecturons

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}.$$

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
$\pm 0{,}0005$	0,16800
$\pm 0{,}0001$	0,20000
$\pm 0{,}00005$	0,00000
$\pm 0{,}00001$	0,00000

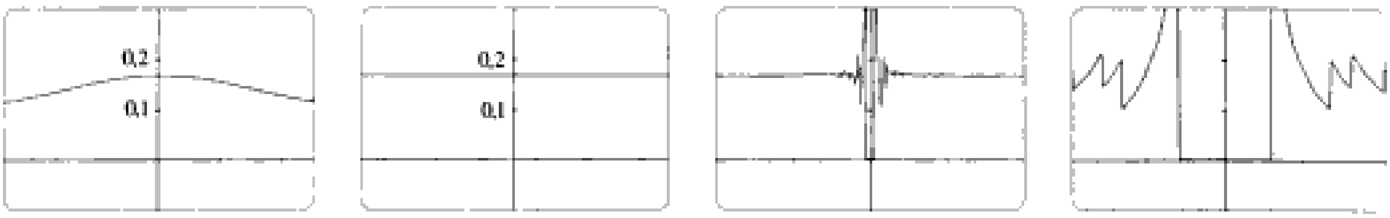
Que se passerait-il si nous prenions des valeurs de t encore plus proches de 0 ? La table dans la marge montre les résultats fournis par une calculatrice ; vous pouvez remarquer qu'il se passe quelque chose de bizarre.

Si vous effectuez ces calculs sur votre propre calculatrice, il se peut que vous trouviez des valeurs quelque peu différentes, mais en définitive, si vous prenez t suffisamment petit, vous allez vous aussi tomber sur 0. Est-ce que cela veut dire que la réponse est 0 et non pas 1/6 ? Non, la limite est bien 1/6, comme nous allons le confirmer dans la section suivante. Le problème provient de ce que la calculatrice donne des réponses fausses et elles sont fausses parce que $\sqrt{t^2+9}$ est très proche de 3 lorsque t est très petit. (De fait, quand t est suffisamment petit, la valeur attribuée à $\sqrt{t^2+9}$ par une calculatrice est 3,0000 . . . avec autant de chiffres que la machine est capable de retenir).

Il se passe quelque chose de semblable lorsque nous essayons d'obtenir le graphique de la fonction

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

de l'exemple 2 avec un outil graphique. Les images (a) et (b) de la figure 5 présentent des graphiques très précis de f sur lesquels il est possible d'estimer que la limite est environ 1/6. Mais lorsque nous zoomons de trop près, comme sur les images (c) et (d), nous obtenons des graphiques incorrects, à nouveau à cause du problème de la soustraction de deux nombres très voisins.



(a) $[-5, 5]$ sur $[-0{,}1, 0{,}3]$ (b) $[-0{,}1, 0{,}1]$ sur $[-0{,}1, 0{,}3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ sur $[-0{,}1, 0{,}3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ sur $[-0{,}1, 0{,}3]$

FIGURE 5

EXEMPLE 3 ■ Calculez $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

SOLUTION À nouveau, la fonction $f(x) = (\sin x)/x$ n'est pas définie quand $x = 0$. À l'aide d'une calculatrice (et en se souvenant que quand $x \in \mathbb{R}$, $\sin x$ signifie le sinus de l'angle dont la mesure en radians est x), on construit la table suivante des valeurs de la fonction en retenant 8 décimales. La table et le graphique nous font penser que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Cette conjecture est correcte, comme une argumentation géométrique nous le prouvera à la section 3.4.

x	$\frac{\sin x}{x}$
$\pm 1,0$	0,84147098
$\pm 0,5$	0,95885108
$\pm 0,4$	0,97354586
$\pm 0,3$	0,98506736
$\pm 0,2$	0,99334665
$\pm 0,1$	0,99833417
$\pm 0,05$	0,99958339
$\pm 0,01$	0,99998333
$\pm 0,005$	0,99999583
$\pm 0,001$	0,99999983

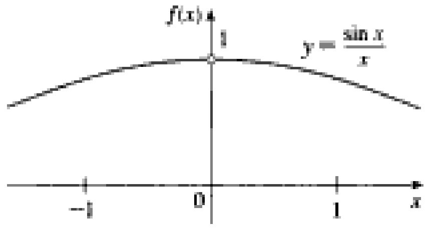


FIGURE 6

EXEMPLE 4 ■ Cherchez $\lim_{x \to 0} \sin \frac{\pi}{x}$.

SOLUTION Une fois de plus, la fonction $f(x) = \sin(\pi/x)$ n'est pas définie en 0. On calcule les valeurs de la fonction pour de petites valeurs de x et cela donne les résultats que voici :

$$f(1) = \sin \pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \sin 2\pi = 0$$
$$f(\tfrac{1}{3}) = \sin 3\pi = 0 \qquad f(\tfrac{1}{4}) = \sin 4\pi = 0$$
$$f(0,1) = \sin 10\pi = 0 \qquad f(0,01) = \sin 100\pi = 0$$

Logiciel de calcul symbolique

Les logiciels de calcul symbolique offrent la possibilité de calculer des limites. Mais, à cause justement des pièges que nous venons de mettre en évidence aux exemples 2, 4 et 5, ils ne procèdent pas numériquement. Ils recourent à des techniques plus sophistiquées, tels des développements en séries. Si vous disposez d'un tel logiciel, ordonnez-lui de calculer les limites des exemples de cette section et vérifier vos réponses dans les exercices de ce chapitre.

De même, $f(0,001) = f(0,0001) = 0$. D'après ces informations, on est tenté de conjecturer que

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{\pi}{x} = 0$$

mais cette fois cette conjecture est fausse. On remarque que $f(1/n) = \sin(n\pi) = 0$ quel que soit n entier naturel, mais aussi que $f(x) = 1$ pour une infinité de valeurs de x qui tendent vers 0. Plus précisément, $\sin(\pi/x) = 1$ quand

$$\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

La solution par rapport à x de cette équation donne $x = 2/(4n+1)$. Le graphique de f est présenté à la figure 7. Le tracé en tirets indique que les valeurs de $\sin(\pi/x)$ oscillent indéfiniment entre $+1$ et -1 lorsque x s'approche de 0. (Employez un outil graphique pour dessiner f et zoomez sur l'origine plusieurs fois. Qu'observez-vous ?)

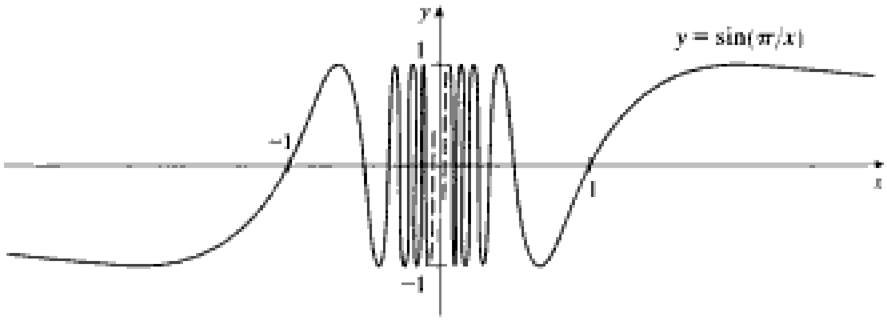


FIGURE 7

Comme les valeurs de $f(x)$ ne s'approchent d'aucun nombre fixé lorsque x tend vers 0,

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x} \text{ n'existe pas.}$$

EXEMPLE 5 ■ Cherchez $\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right)$.

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1,000028
0,5	0,124920
0,1	0,001088
0,05	0,000222
0,01	0,000101

x	$x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}$
0,005	0,00010009
0,001	0,00010000

SOLUTION Comme précédemment, nous construisons une table de valeurs. La table qui figure dans la marge semble indiquer que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0.$$

Mais en poursuivant la table avec des valeurs encore plus petites de x, il semble maintenant que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0{,}000100 = \frac{1}{10\,000}.$$

Plus loin nous verrons que $\lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$, et il s'ensuivra alors que la limite est égale à 0,0001.

Les exemples 4 et 5 sont là pour mettre en garde contre les dangers de deviner la valeur d'une limite. Il est facile de conjecturer une valeur erronée à partir de valeurs inappropriées de x, mais il est aussi difficile de juger quand les valeurs utilisées sont suffisamment proches de la limite proposée pour la variable indépendante. De plus, comme l'a montré la discussion qui a suivi l'exemple 2, les calculatrices donnent parfois des valeurs fausses. Plus tard, néanmoins, nous développerons des méthodes infaillibles de calcul des limites.

EXEMPLE 6 ■ La fonction de Heaviside H est définie par

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Cette fonction tient son nom de l'ingénieur en électricité Oliver Heaviside (1850-1925) et est utilisée pour décrire un courant électrique déclenché au moment $t = 0$. Son graphique est représenté à la figure 8.

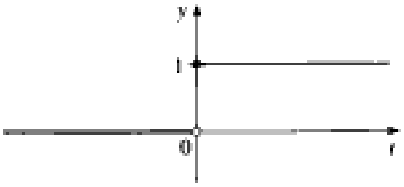


FIGURE 8

Lorsque t s'approche de 0 par la gauche, $H(t)$ s'approche de 0. Lorsque t s'approche de 0 par la droite, $H(t)$ s'approche de 1. Il n'y a pas un nombre unique duquel $H(t)$ s'approche lorsque t tend vers 0. Par conséquent, $\lim_{t\to 0} H(t)$ n'existe pas.

Limites unilatères

Nous avons pu remarquer, à l'exemple 6, que $H(t)$ s'approche de 0 quand t tend vers 0 par la gauche et que $H(t)$ s'approche de 1 quand t tend vers 0 par la droite. Nous écrivons cela symboliquement de la manière suivante

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1.$$

Le symbole « $t \to 0^-$ » est là pour indiquer que seules sont retenues les valeurs de t inférieures à 0. De même, « $t \to 0^+$ » signifie que seules sont retenues les valeurs de t supérieures à 0.

2 Définition Nous écrivons

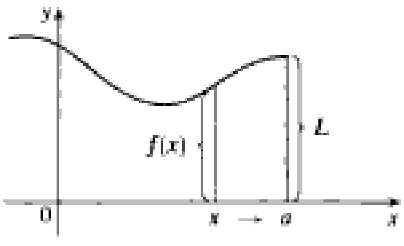
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

et nous affirmons **la limite à gauche de $f(x)$, quand x tend vers a (ou la limite de $f(x)$ quand x tend vers a par la gauche),** est égale à L si nous pouvons rendre les valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de L en prenant x suffisamment proche de a et strictement inférieur à a.

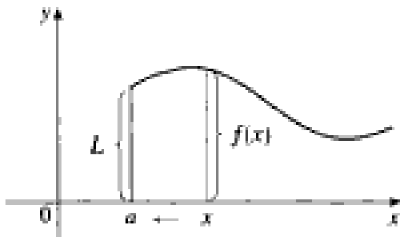
La définition 2 ne diffère de la définition 1 que pour ce qui est d'exiger que x soit inférieur à a. De même, si nous exigeons que x soit supérieur à a, nous arrivons à **la limite à droite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égale à L** et nous écrivons

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Le symbole « $x \to a^+$ » signifie que nous n'admettons que $x > a$. Ces définitions sont illustrées à la figure 9.



(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$



(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

FIGURE 9

La comparaison de la définition 1 avec celle des limites unilatères nous conduit à la conclusion

3 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si et seulement si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

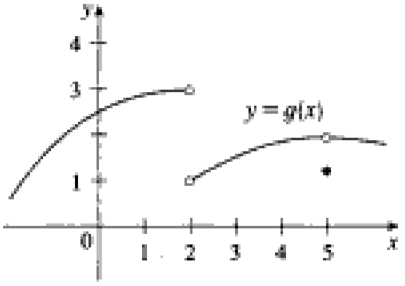


FIGURE 10

EXEMPLE 7 ■ La fonction g est donnée par son graphique à la figure 10. Par lecture du graphique, dites ce que valent (si elles existent) les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

c) $\lim_{x \to 2} g(x)$ d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$

e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUTION Lorsque x s'approche de 2 par la gauche, les valeurs de $g(x)$ s'approchent de 3, tandis que lorsque x s'approche de 2 par la droite, les valeurs de $g(x)$ s'approchent de 1. Nous pouvons donc écrire

$$\text{a) } \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{b) } \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1.$$

c) Comme les limites à droite et à gauche sont différentes, la définition 3 entraîne que $\lim_{x \to 2} g(x)$ n'existe pas.

Le graphique montre encore que

$$\text{d) } \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{e) } \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2.$$

f) Cette fois, les limites à droite et à gauche sont égales et, en vertu de (3), nous pouvons écrire

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2.$$

Malgré cela, remarquez que $g(5) \neq 2$.

x	$1/x^2$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10 000
$\pm 0{,}001$	1 000 000

EXEMPLE 8 ■ Si elle existe, déterminez $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

SOLUTION Lorsque x est proche de 0, x^2 l'est aussi et $1/x^2$ est très grand. La table ci-contre vous le confirme. En fait, au vu du graphique de la fonction $y = 1/x^2$ (figure 11), il semble que $f(x)$ puisse être rendu arbitrairement grand pourvu que x soit suffisamment proche de 0. Les valeurs de $f(x)$ ne s'approchent donc pas d'un nombre et $\lim_{x \to 0}(1/x^2)$ n'existe donc pas.

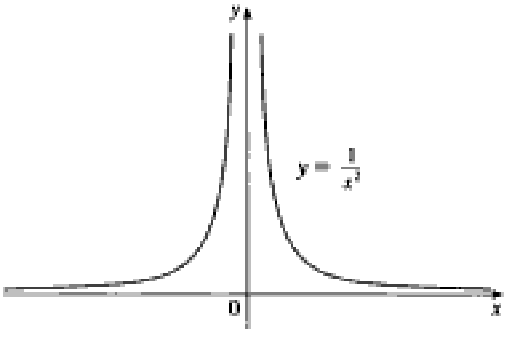


FIGURE 11

Au début de cette section, nous avons envisagé la fonction $f(x) = x^2 - x + 2$ et, s'appuyant sur des évidences graphiques et numériques, nous avons établi que

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - x + 2) = 4.$$

Selon la définition 1, cela veut dire que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de 4, du moment que x est pris suffisamment proche de 2. Dans l'exemple suivant, nous essayons de voir graphiquement quelle proximité est suffisante.

EXEMPLE 9 ■ Dans le cas de la fonction $f(x) = x^2 - x + 2$, à quelle distance de 2 doit être x pour que $f(x)$ soit à une distance de 4 inférieure à 0,1 ?

SOLUTION Si la distance entre $f(x)$ et 4 ne dépasse pas 0,1, cela signifie que $f(x)$ se situe entre 3,9 et 4,1. La condition requise est donc

$$3{,}9 < x^2 - x + 2 < 4{,}1.$$

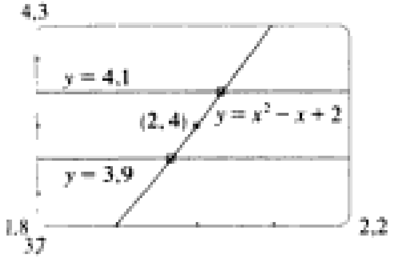


FIGURE 12

Nous avons donc à déterminer les valeurs de x telles que la courbe $y = x^2 - x + 2$ se trouve entre les droites horizontales $y = 3{,}9$ et $y = 4{,}1$. Nous traçons la courbe et les droites aux environs du point $(2, 4)$ (figure 12). Par lecture, à l'aide du curseur, nous pouvons dire que la courbe traverse la droite $y = 3{,}9$ approximativement en $x = 1{,}966$ et la droite $y = 4{,}1$ quand $x \approx 2{,}033$. Ainsi, après avoir arrondi pour plus de sûreté, nous concluons que

$$3{,}9 < x^2 - x + 2 < 4{,}1 \quad \text{quand} \quad 1{,}97 < x < 2{,}03.$$

Dès lors, $f(x)$ est à moins de 0,1 de 4 lorsque x est à moins de 0,03 de 2.

L'idée sous-jacente à l'exemple 9 prépare à formuler la définition précise d'une limite, étudiée dans l'annexe D.

2.2 Exercices

1. Expliquez dans vos propres mots ce que signifie l'équation

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5.$$

Est-il possible que cet énoncé soit vrai en même temps que $f(2) = 3$? Expliquez.

2. Expliquez ce que veut dire

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7.$$

Dans cette situation est-il possible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe ? Expliquez.

3. Pour la fonction dont voici le graphique, donnez la valeur demandée, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquez pourquoi.

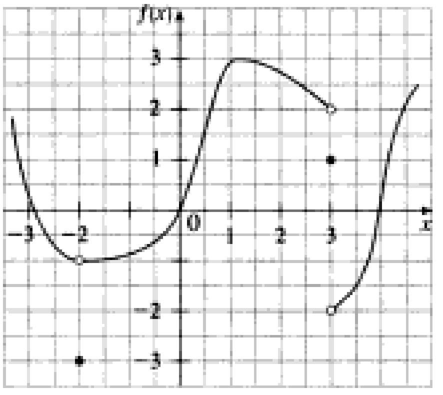
a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

e) $f(3)$ f) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

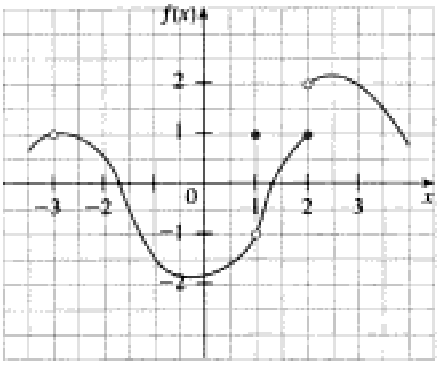
i) $f(-2)$



4. Pour la fonction dont voici le graphique, donnez la valeur demandée, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquez pourquoi.

a) $\lim_{x \to 3} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim_{x \to -3} f(x)$

d) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim_{x \to 2} f(x)$



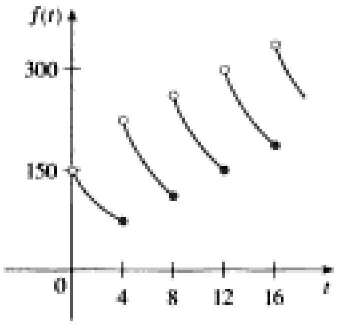
5. Faites dessiner le graphique de la fonction $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ pour y lire la valeur de chaque limite, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquez pourquoi.

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

6. Toutes les 4 heures, un patient reçoit une injection de 150 mg d'un médicament. Le graphique montre la quantité de produit encore présente dans le sang après t heures (Plus tard, nous serons capables de calculer la dose et l'intervalle de temps qui assurent que la concentration du médicament n'atteint pas un niveau nocif). Cherchez

$$\lim_{t \to 12^-} f(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 12^+} f(t).$$

Expliquez ce que signifient ces limites unilatères.



7-8 ■ Faites le graphique d'une fonction qui satisfait à toutes les conditions.

7. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$, $f(3) = 3$, $f(-2) = 1$.

8. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ non défini.

9-12 ■ Calculez, avec une précision de 6 décimales, les valeurs de la fonction aux abscisses données. À partir de ces résultats numériques, conjecturez la valeur de la limite ou expliquez pourquoi elle n'existe pas.

9. $g(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$;

$x = 0{,}2$; $0{,}4$; $0{,}6$; $0{,}8$; $0{,}9$; $0{,}99$; $1{,}8$; $1{,}6$; $1{,}4$; $1{,}2$; $1{,}1$; $1{,}01$;

$\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$.

10. $F(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}$;

$t = 1{,}5$; $1{,}2$; $1{,}1$; $1{,}01$; $1{,}001$;

$\lim_{t \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt{t} - 1}$.

11. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

$x = 1$; $0{,}5$; $0{,}4$; $0{,}3$; $0{,}2$; $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}001$;

$\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

12. $g(x) = \sqrt{x} \ln x$;

$x = 1$; $0{,}5$; $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}01$; $0{,}005$; $0{,}001$;

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$.

13. a) Dessinez le graphique de la fonction $f(x) = (\mathrm{tg}\, 4x)/x$ et zoomez sur le point où la courbe traverse l'axe Oy pour déterminer la valeur de $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Vérifiez votre réponse en calculant des valeurs de la fonction pour x proche de 0.

14. a) Évaluez

$$\lim_{x \to 0} \frac{6^x - 2^x}{x},$$

sur le graphique de la fonction $y = (6^x - 2^x)/x$. Donnez la réponse avec deux décimales correctes.

b) Vérifiez votre réponse en calculant des valeurs de la fonction pour x proche de 0.

15. a) Évaluez

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x},$$

avec 5 décimales. Reconnaissez-vous ce nombre ?

b) Illustrez la première partie en traçant le graphique de la fonction

$$y = (1 + x)^{1/x}.$$

16. La pente de la tangente au graphique de la fonction exponentielle $y = 2^x$ au point $(0, 1)$ est donnée par $\lim_{x \to 0} (2^x - 1)/x$. Calculez cette pente avec trois décimales.

17. a) Calculez la fonction $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ en $x = 1$; 0,8 ; 0,6 ; 0,4 ; 0,2 ; 0,1 et 0,05 et conjecturez ensuite la valeur de

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 - \frac{2^x}{1000}\right).$$

b) Calculez $f(x)$ en $x = 0{,}04$; 0,02 ; 0,01 ; 0,005 ; 0,003 et 0,001. Conjecturez à nouveau.

18. a) Calculez $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ pour $x = 1$; 0,5 ; 0,1 ; 0,05 ; 0,01 et 0,005.

b) Que vaut à votre avis $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.

c) Évaluez $h(x)$ en des valeurs de plus en plus petites de x jusqu'à ce que vous obteniez 0 comme valeur de $h(x)$. Avez-vous encore confiance dans la réponse que vous avez donnée au point b) ? Expliquez pourquoi, en fin de comptes, vous avez obtenu 0 (À la section 5.4 sera expliquée une méthode de calcul de limites).

d) Dessinez la fonction h dans la fenêtre $[-1, 1]$ sur $[0, 1]$. Ensuite, zoomez sur le point où la courbe traverse l'axe Oy afin de lire la limite de $h(x)$ lorsque x tend vers 0. Continuez à zoomer jusqu'à ce que vous voyez apparaître des distorsions dans le graphique de h. Comparez avec les résultats du point c).

19. Utilisez un graphique pour déterminer à quelle distance il faut prendre x de 0 pour être certain que e^x soit à moins de 0,2 du point 1. Et s'il est exigé que e^x soit à moins de 0,1 du point 1 ?

20. a) Quelle est à votre avis, selon des évidences numériques et graphiques, la valeur de

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

b) À quelle distance maximale de 1 doit se trouver x pour que la fonction du point a) soit à une distance maximum de 0,5 de sa limite ?

2.3 Le calcul des limites par les lois algébriques des limites

Tout au long de la section 2.2, nous avons conjecturé des limites en nous aidant de calculatrices ou d'ordinateurs, et nous avons pu nous rendre compte que cette façon de faire n'était pas sans risque d'erreur. Dans cette section nous allons calculer des limites en appliquant les propriétés des limites, appelées lois des limites.

Lois algébriques des limites Supposons que c est une constante et que les limites

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x)$$

existent. Alors

1. $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\displaystyle\lim_{x\to a} [cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

4. $\displaystyle\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

Ces cinq lois s'énoncent en raccourci comme suit :

1. La limite d'une somme est égale la somme des limites. *(Loi de la somme)*

2. La limite d'une différence est égale à la différence des limites. *(Loi de la différence)*

3. La limite du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la limite par cette constante. *(Loi de la multiplication par une constante)*

Loi du produit

Loi du quotient

4. La limite d'un produit est égale au produit des limites.
5. La limite d'un quotient est égale au quotient des limites (à condition que la limite du dénominateur ne soit pas nulle).

Que ces propriétés soient vraies, il n'est pas difficile de s'en convaincre. Par exemple, si $f(x)$ est près de L et $g(x)$ près de M, il est raisonnable de penser que $f(x) + g(x)$ est près de $L + M$. Telle est la base intuitive qui fait croire que la loi de la somme est vérifiée. Toutes ces lois ne peuvent être démontrées que par la définition rigoureuse d'une limite. Nous donnons dans l'annexe E la démonstration de la loi 1.

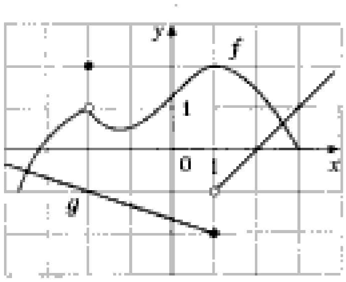


FIGURE 1

EXEMPLE 1 ■ Grâce aux Lois algébriques des limites et au vu des graphiques de f et g présentés à la figure 1, calculez les limites suivantes, si elles existent.

a) $\lim_{x\to -2}[f(x) + 5g(x)]$ b) $\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ c) $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

SOLUTION

a) Sur les graphiques de f et g, nous lisons

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to -2} g(x) = -1.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}[f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)] && \text{(par la loi 1)}\\ &= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x) && \text{(par la loi 3)}\\ &= 1 + 5(-1) = -4\end{aligned}$$

b) Nous pouvons constater sur le dessin que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, mais que $\lim_{x\to 1} g(x)$ n'existe pas parce que les limites à gauche et à droite au point 1 ne sont pas égales :

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1.$$

La loi 4 n'est donc pas applicable. La limite demandée n'existe pas.

c) D'après les graphiques, nous avons

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1{,}4 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2} g(x) = 0.$$

Comme la limite du dénominateur est nulle, la loi 5 n'est pas applicable. La limite demandée n'existe pas.

En utilisant de façon répétée la loi du produit dans le cas $g(x) = f(x)$, nous obtenons la loi suivante.

Loi de la puissance

6. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ où n est un entier naturel

À ces six Lois algébriques viennent s'ajouter deux limites particulières :

7. $\lim_{x\to a} c = c$ 8. $\lim_{x\to a} x = a$

Intuitivement, ces deux limites sont évidentes. (Formulez-les avec des mots ou tracez les graphiques de $y = c$ et $y = x$).

Si maintenant nous envisageons la loi 6 dans le cas particulier $f(x) = x$ et appliquons la loi 8, nous obtenons une autre limite particulière.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ où n est un entier naturel.

Ce qui est vrai pour les puissances, l'est aussi pour les racines.

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ où n est un entier naturel.
(Dans le cas où n est pair, on suppose $a > 0$.)

Plus généralement, nous avons la loi suivante.

Loi de la racine

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ où n est un entier naturel.
(Dans le cas où n est pair, on suppose $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.)

EXEMPLE 2 ■ Calculez les limites suivantes en justifiant chaque étape.

a) $\lim_{x \to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUTION

a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(lois 2 et 3)} \\
&= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(loi 3)} \\
&= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(lois 9, 8 et 7)} \\
&= 39
\end{aligned}$$

b) C'est la loi 5 qui s'impose au départ, même si ce n'est qu'à la fin qu'on peut juger de sa légitimité lorsque les limites du numérateur et du dénominateur existent et que celle du dénominateur n'est pas nulle.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} && \text{(loi 5)} \\
&= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} && \text{(lois 1, 2 et 3)} \\
&= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} && \text{(lois 9, 8 et 7)} \\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

Newton et les limites

Isaac Newton est né le jour de Noël 1642, l'année de la mort de Galilée. Lorsqu'il entre à l'université de Cambridge en 1661, il ne connaît pas grand'chose en mathématiques, mais il apprend vite en lisant Euclide et Descartes et en suivant les leçons de Isaac Barrow. Cambridge est obligée de fermer ses portes en 1665 et 1666 à cause de la peste, et Newton rentre chez lui et réfléchit à tout ce qu'il a appris. Ces deux années sont étonnamment fertiles puisque c'est à ce moment qu'il fait quatre de ses plus grandes découvertes : 1) la représentation des fonctions sous forme de séries infinies ; 2) son travail sur le calcul différentiel et intégral ; 3) les lois du mouvement et de la gravitation universelle ; 4) les expériences avec un prisme sur la nature de la lumière et de la couleur. Par crainte d'être contredit ou critiqué, il se montre peu disposé à publier ses découvertes et ce n'est qu'en 1687, sous la pression de Halley, que Newton publie *Principia Mathematica*. Dans cette œuvre, le plus grand traité scientifique jamais publié, Newton expose sa version du calcul différentiel et intégral et la met en œuvre pour explorer la mécanique, la dynamique des fluides, les mouvements ondulatoires et pour expliquer le mouvement des planètes et des comètes.

Le calcul différentiel et intégral trouve son origine dans les calculs d'aires et de volumes faits par les Grecs, tels Eudoxe et Archimède. Bien que présent implicitement dans leur méthode d'exhaustion, le concept de limite n'a jamais été explicitement formulé par Eudoxe ou Archimède. De même, des mathématiciens tels que Cavalieri, Fermat ou Barrow, les précurseurs immédiats de Newton dans le développement du calcul différentiel et intégral, ne font pas à proprement parler usage de limites. Isaac Newton est le premier à avoir parlé explicitement de limite. Il explique l'idée essentielle qui sous-tend les limites, à savoir « que des quantités s'approchent plus près que n'importe quelle différence donnée ». Newton a introduit les limites comme concept de base du calcul différentiel et intégral, mais ce sont d'autres mathématiciens après lui, tel Cauchy, qui ont clarifié ses idées sur les limites.

REMARQUE • Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, alors $f(5) = 39$. En d'autres mots, on aurait obtenu le réponse exacte dans la partie a) de l'exemple 2 tout simplement en substituant 5 à x. Pareillement, la substitution directe de -2 à x dans la partie b) conduisait à la réponse correcte. Les fonctions de l'exemple 2 sont polynomiale et rationnelle respectivement, et l'application des Lois algébriques des limites dans de tels cas montre que la substitution directe marche toujours (voyez les exercices 35 et 36). Nous reprenons ce résultat comme ceci.

> Si f est une fonction polynomiale ou rationnelle et a un point de son domaine de définition, alors
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Les fonctions qui jouissent de cette dernière propriété sont appelées *continues en a* et seront étudiées à la section 2.4. Toutefois, toutes les limites ne s'obtiennent pas par substitution directe, comme en témoigne l'exemple que voici.

EXEMPLE 3 ■ Calculez $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUTION Soit $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. Il n'est pas possible de calculer la limite en substituant $x = 1$ parce que $f(1)$ n'est pas définie, pas plus que par la loi du quotient, parce que la limite du dénominateur est 0. Par contre, quelques manipulations algébriques préalables s'imposent. Nous décomposons le numérateur en un produit de deux facteurs :

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}.$$

Le facteur $x - 1$ est commun au numérateur et au dénominateur. Si on prend la limite lorsque x tend vers 1, x est différent de 1, de sorte que $x - 1 \neq 0$. Il s'ensuit que le quotient peut être simplifié en divisant numérateur et dénominateur par ce facteur commun :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Il avait déjà été question de cette limite à la section 1.2 lorsqu'on cherchait à calculer la pente de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $(1, 1)$.

EXEMPLE 4 ■ Calculez $\lim_{x \to 1} g(x)$ pour

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

SOLUTION Dans ce cas, g est définie en $x = 1$ puisque $g(1) = \pi$, mais la valeur de la limite en 1 ne dépend pas de la valeur de la fonction en 1. Comme $g(x) = x + 1$ pour $x \neq 1$, on a

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

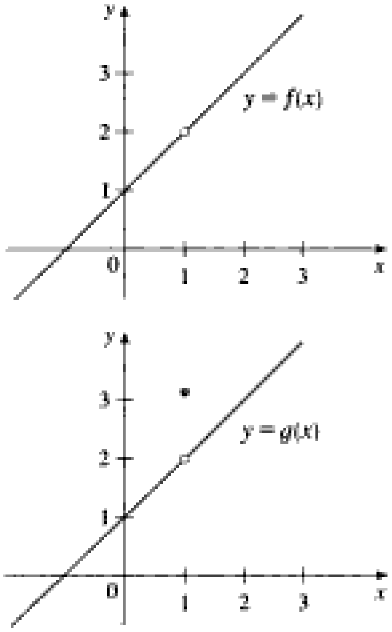


FIGURE 2
Les graphiques de f (exemple 3) et g (exemple 4)

Remarquez que les fonctions des exemples 3 et 4 prennent les mêmes valeurs partout, sauf au point $x = 1$ (voyez la figure 2), ce qui explique qu'elles ont la même limite lorsque x tend vers 1.

EXEMPLE 5 ■ Que vaut $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$?

SOLUTION Si nous posons

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h},$$

alors, comme à l'exemple 3, nous ne pouvons pas obtenir la limite demandée par substitution de 0 à h, car $F(0)$ n'est pas définie. En revanche, nous pouvons simplifier algébriquement :

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

(Rappelons-nous que h est supposé différent de 0 lorsqu'il tend vers 0.) De là,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0}(6 + h) = 6.$$

EXEMPLE 6 ■ Que vaut $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$?

SOLUTION Nous ne pouvons pas appliquer la loi du quotient immédiatement parce que la limite du dénominateur est nulle. Les manipulations algébriques préalables consistent ici à rendre le numérateur rationnel :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9) - 9}{t^2(\sqrt{t^2+9} + 3)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9} + 3)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Ces calculs viennent confirmer la conjecture que nous avions faite à l'exemple 2 de la section 2.2.

Parfois, il est plus aisé d'obtenir certaines limites en prenant d'abord les limites à droite et à gauche. Le théorème suivant est un rappel de ce que nous avions observé à la section 2.2. Il dit qu'une limite (bilatère) existe si et seulement si les deux limites unilatères existent et sont égales.

1 Théorème

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ si et seulement si } \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Lors du calcul des limites unilatères, nous faisons la supposition que les Lois algébriques des limites sont aussi valables pour les limites unilatères.

EXEMPLE 7 ■ Montrez que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUTION Rappelez-vous que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Le résultat de l'exemple 7 semble plausible quand on regarde la figure 3.

Pour $x > 0$, $|x| = x$ et donc

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

Pour $x < 0$, $|x| = -x$ et donc

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0.$$

Par conséquent, en référence au théorème 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

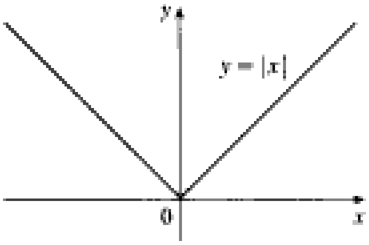


FIGURE 3

EXEMPLE 8 ■ Démontrez que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas.

SOLUTION

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

Les limites à droite et à gauche existent mais ne sont pas égales. Par conséquent, selon le théorème 1, la limite en question n'existe pas. Le graphique de cette fonction, que montre la figure 4, confirme les limites que nous avons obtenues.

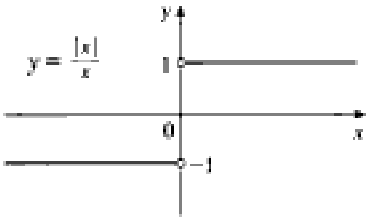


FIGURE 4

EXEMPLE 9 ■ La fonction *partie entière de x* est définie par $[\![x]\!]$ = le plus grand entier inférieur ou égal à x. (Par exemple, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4,8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Montrez que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ n'existe pas.

SOLUTION Le graphique de la fonction partie entière est présenté à la figure 5. Comme $[\![x]\!] = 3$ pour $3 \leqslant x < 4$, on a

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3.$$

Comme $[\![x]\!] = 2$ pour $2 \leqslant x < 3$, on a

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2.$$

Les limites unilatères n'étant pas égales, selon le théorème 1, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ n'existe pas.

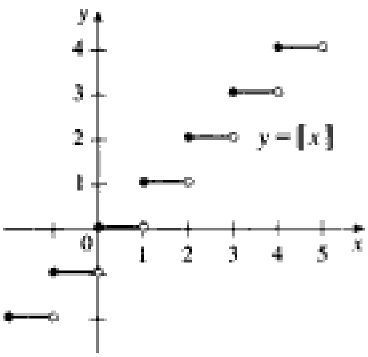


FIGURE 5
La fonction partie entière

Les deux théorèmes suivants donnent deux propriétés supplémentaires des limites.

2 Théorème Si $f(x) \leqslant g(x)$ quand x est voisin de a (sauf peut-être en a) et si les limites de f et g existent pour x tendant vers a, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

3 Théorème du sandwich Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ quand x est voisin de a (sauf peut-être en a) et si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

alors

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

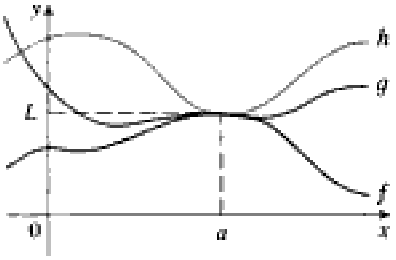


FIGURE 6

Le théorème du sandwich, parfois appelé théorème du coinçage, est illustré à la figure 6. Il dit que si $g(x)$ est coincé entre $f(x)$ et $h(x)$ au voisinage de a et si f et h ont la même limite L lorsque x tend vers a, alors g est forcée d'avoir la même limite L en a.

EXEMPLE 10 ■ Montrez que $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUTION Remarquons d'emblée que nous *ne pouvons pas* utiliser

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x},$$

parce que $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas. (Voyez l'exemple 4 à la section 2.2.) Cependant, puisque

$$-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \leqslant 1,$$

nous avons, comme le fait voir la figure 7,

$$-x^2 \leqslant x^2 \sin \frac{1}{x} \leqslant x^2.$$

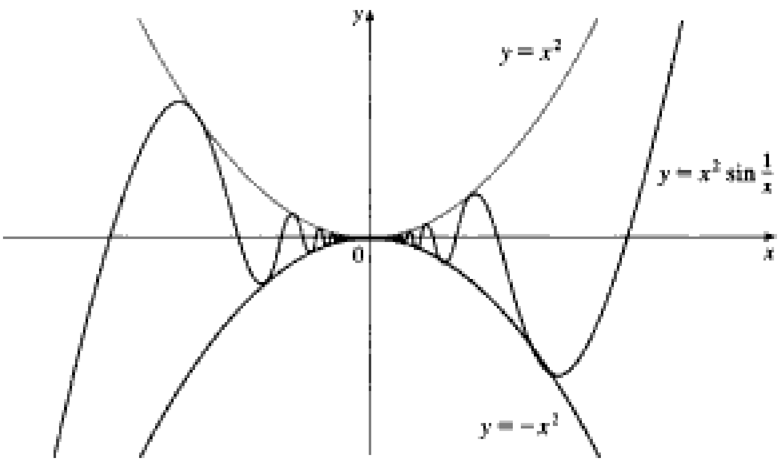


FIGURE 7

Par ailleurs, nous savons que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} -x^2 = 0.$$

Le théorème du sandwich, appliqué aux fonctions $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ et $h(x) = x^2$, conduit à la conclusion

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

2.3 Exercices

1. Étant donné que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 8$$

calculez les limites qui existent. Si la limite n'existe pas, expliquez pourquoi.

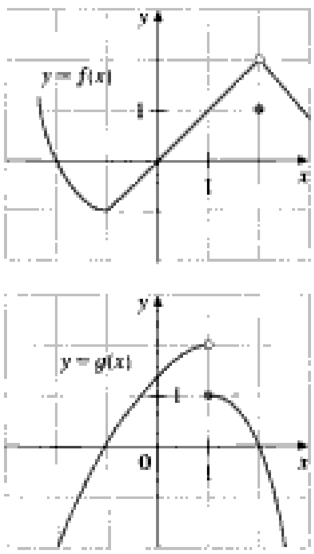
a) $\lim_{x\to a} [f(x) + h(x)]$ b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^2$

c) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$ d) $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$

e) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$ f) $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

g) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ h) $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

2. Voici les courbes représentatives de f et g. Employez-les pour évaluer chaque limite, si elle existe. Si la limite n'existe pas, expliquez pourquoi.



a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ b) $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2} x^3 f(x)$ f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3-7 ■ Évaluez la limite et justifiez chaque étape en indiquant la ou les loi(s) des limites impliquée(s).

3. $\lim_{x\to 4} (5x^2 - 2x + 3)$

4. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$

5. $\lim_{t\to -2} (t + 1)^9(t^2 - 1)$

6. $\lim_{x\to -1} \sqrt{x^3 + 2x + 7}$

7. $\lim_{x\to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

8. a) Qu'est-ce qui est faux dans l'équation suivante

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3.$$

b) Vu la partie a), expliquez pourquoi l'équation

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 3).$$

est correcte.

9-18 ■ Calculez la limite si elle existe.

9. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - x + 12}{x + 3}$

10. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

11. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h - 5)^2 - 25}{h}$

12. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

13. $\lim_{t\to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

14. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

15. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{2 - t} - \sqrt{2}}{t}$

16. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

17. $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}\right]$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

19. Montrez que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos 20\pi x = 0$ grâce au théorème du sandwich. Illustrez la situation en dessinant les fonctions $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ et $h(x) = x^2$ dans la même fenêtre.

20. Montrez que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\sin(\pi/x) = 0$ grâce au théorème du sandwich. Illustrez la situation en dessinant les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ (dans les notations du théorème du sandwich) dans la même fenêtre.

21. Si $1 \leqslant f(x) \leqslant x^2 + 2x + 2$ quel que soit x, calculez $\lim_{x\to -1} f(x)$.

22. Si $3x \leqslant f(x) \leqslant x^3 + 2$ quel que soit x, calculez $\lim_{x\to 1} f(x)$.

23. Démontrez que $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

24. Démontrez que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} = 0$.

25-28 ■ Calculez la limite si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquez pourquoi.

25. $\lim\limits_{x\to -4} |x + 4|$

26. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

27. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

29. Soit

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calculez chaque limite, si elle existe.

■ $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ ■ $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ ■ $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

■ $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)$ ■ $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)$ ■ $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

b) Tracez le graphique de h.

30. Soit $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

a) Calculez $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} F(x)$.

b) Est-ce que $\lim_{x\to 1} F(x)$ existe ?

c) Dessinez le graphique de F.

31. Si le symbole [ ] désigne la fonction partie entière de l'exemple 9, calculez

■ $\lim\limits_{x\to 2^+} [x]$ ■ $\lim\limits_{x\to -2} [x]$ ■ $\lim\limits_{x\to -2,4} [x]$

a) Si n est un entier, calculez

■ $\lim\limits_{x\to n^-} [x]$ ■ $\lim\limits_{x\to n^+} [x]$

b) Pour quelle valeur de a est-ce que $\lim_{x\to a} [x]$ existe ?

32. Soit $f(x) = x - [x]$.

a) Dessinez le graphique de f.

b) Si n est un entier, calculez

■ $\lim_{x\to n^-} f(x)$ ■ $\lim_{x\to n^+} f(x)$.

c) Pour quelle valeur de a est-ce que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe ?

33. Soit $f(x) = [x] + [-x]$. Montrez que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe, mais n'est pas égale à $f(2)$.

34. En théorie de la relativité, la formule de contraction de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

exprime la longueur L d'un objet en fonction de sa vitesse v par rapport à un observateur ; L_0 est la longueur de l'objet au repos et c la vitesse de la lumière. Trouvez $\lim_{v\to c^-} L$ et donnez une interprétation du résultat. Pourquoi faut-il une limite à gauche ?

35. Si p est un polynôme, montrez que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

36. Employez l'exercice 35 pour montrer que, si r est une fonction rationnelle, $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$ pour tout nombre a appartenant au domaine de définition de r.

37. Cherchez un exemple qui montre que $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ peut très bien exister alors que ni $\lim_{x\to a} f(x)$, ni $\lim_{x\to a} g(x)$ existent.

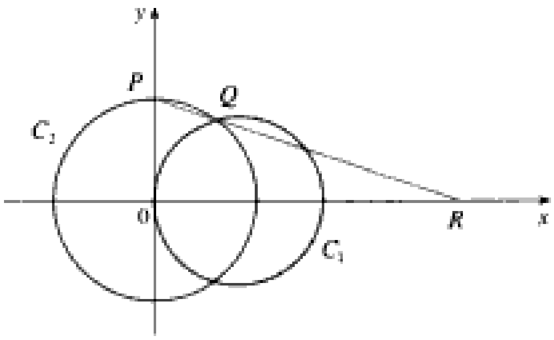
38. Cherchez un exemple qui montre que $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ peut très bien exister alors que ni $\lim_{x\to a} f(x)$, ni $\lim_{x\to a} g(x)$ existent.

39. Y a-t-il un nombre a tel que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

existe ? Si c'est le cas, quelle est la valeur de a et que vaut la limite ?

40. La figure montre un cercle fixe C_1 d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ et un cercle C_2, de rayon r et centré à l'origine. Le point de coordonnées $(0, r)$ est noté P, le point supérieur de l'intersection des deux cercles, Q et le point d'intersection de la droite PQ avec l'axe Ox, R. Qu'arrive-t-il à R si C_2 se met à rétrécir, c'est-à-dire si $r \to 0^+$?



2.4 La continuité

Nous avons remarqué à la section précédente que la limite d'une fonction pour x tendant vers a peut souvent être obtenue en calculant tout simplement la valeur de cette fonction en a. Les fonctions qui ont cette propriété sont appelée *continues en a*. Nous allons voir que la définition mathématique de la continuité est très proche du sens du mot *continuité* du langage courant. (Un processus est qualifié de continu s'il prend place progressivement, sans interruption ni à-coup.)

1 Définition Une fonction est **continue en un nombre** a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dans le cas où f n'est pas continue en a, on dit que f est **discontinue en** a ou encore que f présente une **discontinuité** en a. Implicitement, la définition 1 requiert trois choses pour que f soit continue en a :

1. que $f(a)$ soit définie (autrement dit, que a appartienne au domaine de définition de f).
2. que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (de sorte que f doit être définie sur un intervalle ouvert auquel a appartient).
3. que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Le tracé de la figure 1 le montre, si f est continue, alors les points $(x, f(x))$ sur la courbe sont proches du point $(a, f(a))$ de la courbe. Il n'y a donc pas de trou dans la courbe.

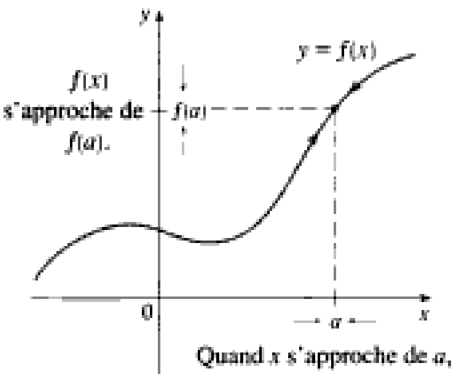


FIGURE 1

Par f est continue en a, il faut entendre que $f(x)$ tend vers $f(a)$ lorsque x tend vers a. Par conséquent, une fonction continue f est telle qu'une petite variation de x ne produit qu'une petite variation de $f(x)$. En fait, la variation de $f(x)$ peut être tenue aussi petite que l'on veut à condition de tenir la variation de x suffisamment petite.

Les phénomènes physiques sont généralement continus. Par exemple, le déplacement ou la vitesse d'un véhicule en mouvement varie de façon continue en fonction du temps, de même que la taille des personnes. Par contre, des discontinuités se produisent dans des situations comme les courants électriques (voyez l'exemple 6 à la section 2.2 de la fonction de Heaviside qui est discontinue en 0 parce que $\lim_{t \to 0} H(t)$ n'existe pas.)

D'un point de vue géométrique, vous pouvez penser à une fonction continue en tous les points d'un intervalle comme à une fonction dont la courbe représentative ne présente aucune interruption. Elle peut être tracée sans jamais lever la plume du papier.

EXEMPLE 1 ■ Au vu du graphique de la fonction f présenté à la figure 2, dites en quels points elle est discontinue et pourquoi.

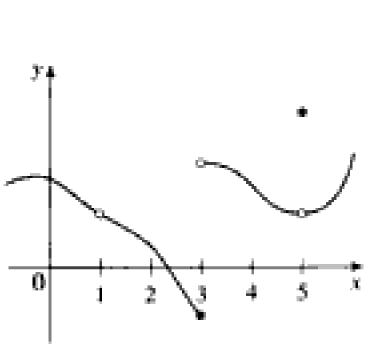


FIGURE 2

SOLUTION On dirait qu'il y a une discontinuité en $a = 1$ là où le graphique s'interrompt. La raison exacte de cette discontinuité de f en 1 est que $f(1)$ n'est pas définie.

La courbe est aussi coupée en $a = 3$, mais la cause de cette discontinuité est différente. Ici, $f(3)$ est définie, mais $\lim_{x \to 3} f(x)$ n'existe pas, les limites à gauche et à droite n'étant pas égales. Aussi, f présente une discontinuité en 3.

Que se passe-t-il en $a = 5$? Ici, $f(5)$ est définie et $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe, les limites à droite et à gauche étant égales. Mais

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5).$$

Aussi, f est discontinue en $x = 5$.

Attachons-nous maintenant à repérer des discontinuités quand une fonction est définie par une formule.

EXEMPLE 2 ■ Où les fonctions suivantes sont-elles discontinues ?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUTION

a) On remarque que $f(2)$ n'est pas défini, ce qui entraîne que f est discontinue en 2.

b) Comme $f(0) = 1$, f est définie en 0 mais

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

n'existe pas (voyez l'exemple 8 à la section 2.2). Aussi, f est discontinue en 0.

c) Comme $f(2) = 1$, f est définie en 2 et

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 1) = 3$$

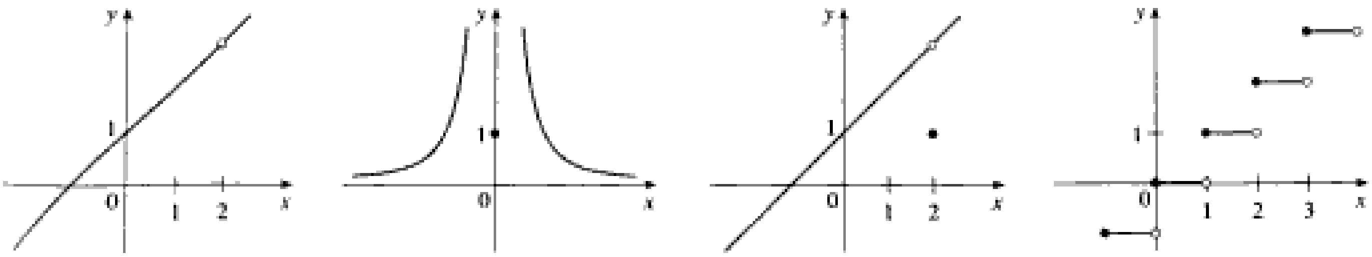
existe. Mais

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2),$$

de sorte que f n'est pas continue en 2.

d) La fonction partie entière $f(x) = [\![x]\!]$ présente une discontinuité en chaque valeur entière de x parce que $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ n'existe pas si n est un entier (voyez l'exemple 9 et l'exercice 31 à la section 2.3). ◻

La figure 3 montre les graphiques des fonctions de l'exemple 2. Aucune de ces courbes ne peut être tracée sans lever la plume du papier à cause d'un trou, d'une



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURE 3 Graphiques des fonctions de l'exemple 2 interruption ou d'un saut. Les discontinuités du type a) et c) sont **réductibles** parce qu'on peut les supprimer en redéfinissant f en $x = 2$. [La fonction $g(x) = x + 1$ est continue partout]. La discontinuité du type b) est appelée une **discontinuité infinie**. Les discontinuités du type d) sont dites par **saut** parce que la fonction « saute » d'une valeur à une autre.

2 Définition Une fonction est **continue à droite en un nombre** a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a),$$

et **continue à gauche en un nombre** a si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

EXEMPLE 3 ■ La fonction $f(x) = [x]$ est continue à droite en chaque valeur entière n de la variable [voyez la figure 3 (d)] mais discontinue à gauche car

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [x] = n = f(n),$$

tandis que

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [x] = n - 1 \neq f(n).$$

3 Définition **Une fonction** f **est continue sur un intervalle** si elle est continue en chaque point de cet intervalle. (Aux extrémités de l'intervalle, il faut comprendre *continue* comme *continue à droite* ou *continue à gauche*).

EXEMPLE 4 ■ Montrez que la fonction $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$.

SOLUTION Pour $-1 < a < 1$, les Lois algébriques des limites donnent

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (1 - \sqrt{1 - x^2}) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(par les lois 2 et 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(par la loi 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(par les lois 2, 7 et 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Selon la définition 1, la fonction est bien continue en tout point strictement compris entre -1 et 1. Des calculs semblables montrent que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1).$$

Ces deux dernières limites établissent bien la continuité à droite en -1 et à gauche en 1. Par conséquent, conformément à la définition 3, on peut dire que la fonction f est continue sur $[-1, 1]$.

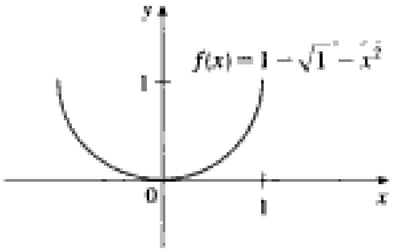


FIGURE 4

La figure 4 présente le graphique de f. C'est la moitié inférieure du cercle $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Au lieu de toujours invoquer les définitions 1, 2 et 3 pour vérifier la continuité d'une fonction, comme à l'exemple 4, il est souvent plus efficace de faire appel au théorème suivant, qui montre comment construire des fonctions continues compliquées à partir de fonctions continues élémentaires.

4 Théorème Si f et g sont des fonctions continues en a et si c est une constante, alors les fonctions que voici sont aussi continues en a :
1. $f+g$ **2.** $f-g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

Démonstration Chacun de ces cinq résultats découle de la loi des limites correspondante. Nous détaillons par exemple la démonstration de la partie 1. Puisque f et g sont continues en a, nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

De là,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f+g)(x) &= \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) && \text{(par la loi 1)} \\ &= f(a)+g(a) \\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

Ceci établit la continuité de $f+g$ en a. ■

Il résulte du théorème 4 et de la définition 3 que si f et g sont continues sur un intervalle, alors le sont aussi les fonctions $f+g$, $f-g$, cf, fg et f/g (à condition que g ne s'y annule pas). Le théorème suivant a été cité à la section 2.3.

5 Théorème
a) Une fonction polynomiale est continue partout ; autrement dit, elle est continue sur tout $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.
b) Une fonction rationnelle est continue là où elle est définie ; autrement dit, elle est continue sur son domaine de définition.

Démonstration

a) Une fonction polynomiale est de la forme

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

où $c_0, c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes. On sait que

$$\lim_{x\to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(par la loi 7)}$$

et que

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(par la loi 9)}$$

Cette dernière équation n'exprime rien d'autre que la continuité de la fonction $f(x) = x^m$. En vertu de la partie 3 du théorème 4, la fonction $g(x) = cx^m$ est continue. Comme P est une somme de fonctions de ce type et d'une constante, P est, selon la partie 1 du théorème 4, aussi une fonction continue.

b) Une fonction rationnelle est de la forme

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des polynômes. La fonction f est définie sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Grâce à la partie a), on sait que P et Q sont partout continues. De là, suivant la partie 5 du théorème 4, f est continue en tout point de D. ■

À titre d'illustration du théorème 5, nous pouvons dire que le volume d'une sphère varie de façon continue en fonction de son rayon parce que la formule $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ fait voir que V est une fonction polynomiale en la variable r. Semblablement, la hauteur atteinte par une balle jetée verticalement avec une vitesse de 15 m/s est donnée par $y = 15t - 4{,}9t^2$, t secondes plus tard. Comme il s'agit à nouveau d'une fonction polynomiale, la hauteur en question est une fonction continue du temps écoulé.

L'avantage de reconnaître le caractère continu de certaines fonctions est de pouvoir en calculer rapidement les limites. L'exemple suivant en témoigne, si on le compare à l'exemple 2 b) de la section 2.3.

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUTION La fonction

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

est rationnelle, ce qui en fait, d'après le théorème 5, une fonction continue sur son domaine de définition, à savoir sur $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. Par conséquent,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$
$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}.$$ ■

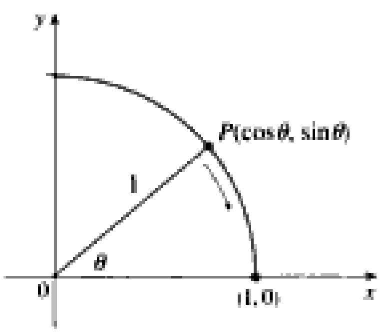


FIGURE 5

Il s'avère que la plupart des fonctions familières sont continues partout sur leur domaine de définition. Par exemple, la loi 10 des limites (page 113) exprime exactement la continuité des fonctions racine.

À en juger à leur graphique, nous pensons que les fonctions sinus et cosinus (figure 10 à la section 1.2) sont très probablement continues. En effet, par définition, les coordonnées du point P à la figure 5 sont $(\cos\theta, \sin\theta)$. Lorsque θ tend vers 0, le point P se dirige vers le point $(1, 0)$, ce qui mène $\cos\theta$ vers 1 et $\sin\theta$ vers 0. Cela s'écrit

6 $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0.$$

Comme $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, les résultats du point 6 affirment la continuité en 0 des fonctions sinus et cosinus. Leur continuité partout ailleurs se déduit des formules d'addition de ces fonctions (voyez les exercices 41 et 42).

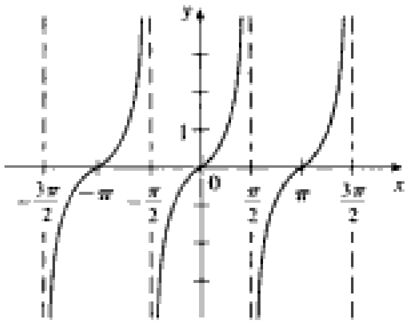


FIGURE 6
$y = \operatorname{tg} x$

En tant que quotient de deux fonctions continues, la fonction

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

est continue partout sauf là où $\cos x = 0$, ce qui arrive chaque fois que x est un multiple impair de $\pi/2$. La fonction $y = \operatorname{tg} x$ présente donc une infinité de discontinuités en $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, etc (voyez la figure 6).

La fonction réciproque d'une fonction continue, quelle qu'elle soit, est aussi continue (la courbe représentative de f^{-1} est l'image de celle de f par une réflexion autour de la droite $y = x$, de sorte que, si cette dernière courbe ne présente aucune interruption, celle qui se rapporte à f^{-1} n'en présentera pas non plus). De là, les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques sont aussi des fonctions continues.

Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques sont revues dans l'annexe C.

À la section 1.5, nous avons défini la fonction exponentielle $y = a^x$ en comblant les trous du graphique de $y = a^x$ pour x rationnel. Autrement dit, la définition même de $y = a^x$ en fait une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Et sa fonction réciproque $y = \log_a x$ est continue sur $]0, +\infty[$.

7 Théorème Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition :

polynomiales	rationnelles	racines
trigonométriques	trigonométriques réciproques	
exponentielles	logarithmes	

EXEMPLE 6 ■ Où la fonction $f(x) = \dfrac{\ln x + \operatorname{Arctg} x}{x^2 - 1}$ est-elle continue ?

SOLUTION On sait par le théorème 7 que la fonction $y = \ln x$ est continue pour $x > 0$ et $y = \operatorname{Arctg} x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction $y = \ln x + \operatorname{Arctg} x$ est continue sur $]0, +\infty[$ par application du point 1 du théorème 4. La fonction du dénominateur $y = x^2 - 1$ est polynomiale et donc partout continue. Par suite, en tant que quotient, la fonction f est continue pour tout x strictement positif à l'exception des valeurs qui annulent $x^2 - 1$. Finalement, f est continue sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. □

Il reste encore une façon de combiner les fonctions continues f et g pour en obtenir une nouvelle qui soit aussi continue, c'est la composition. Voici le théorème qui établit cela.

Ce théorème affirme que le symbole de limite peut entrer à l'intérieur du symbole de fonction si la fonction est continue et si la limite existe. Autrement dit, l'ordre de ces deux symboles peut être interverti.

8 Théorème Si f est continue en b et si $\lim_{x \to a} g(x) = b$, alors $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Cela s'écrit encore

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

Intuitivement, ce théorème semble acceptable parce que, lorsque x est proche de a, $g(x)$ est proche de b et puisque f est continue en b, lorsque $g(x)$ est proche de b, $f(g(x))$ est proche de $f(b)$.

EXEMPLE 7 ■ Calculez $\lim_{x\to 1} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

SOLUTION Grâce à la continuité de Arcsin, on peut appliquer le théorème 8 :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{Arcsin}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)\\ &= \operatorname{Arcsin}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right)\\ &= \operatorname{Arcsin}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\\ &= \operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

9 Théorème Si g est continue en a et f continue en $g(a)$, alors $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ est continue en a.

Ce théorème est souvent énoncé en abrégé « une fonction continue d'une fonction continue est une fonction continue ».

Démonstration La continuité de g en a se traduit par

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Comme f est continue en $b = g(a)$, on peut appliquer le théorème 8, ce qui donne

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a)).$$

Cette dernière expression exprime précisément la continuité de la fonction $h(x) = f(g(x))$ en a ; autrement dit, $f\circ g$ est continue au point a. ■

EXEMPLE 8 ■ Où les fonctions suivantes sont-elles continues ?

a) $h(x) = |x|$ b) $F(x) = \ln(1+\cos x)$

SOLUTION

a) En écrivant $|x| = \sqrt{x^2}$, quel que soit x, on voit que $h(x) = f(g(x))$ où

$$g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{x}.$$

En tant que fonction polynomiale, g est continue sur $\mathbb{R}$. Pour sa part, la fonction racine est continue sur $[0, +\infty[$, l'ensemble image de g. Par suite, en application du théorème 9, $h = f\circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) D'après le théorème 7, on sait que $f(x) = \ln x$ est une fonction continue de même que $g(x) = 1+\cos x$, comme somme des deux fonctions continues $y = 1$ et $y = \cos x$. Du théorème 9, il s'ensuit que $F(x) = f(g(x))$ est continue partout où elle est définie. Or, $\ln(1+\cos x)$ n'est définie que lorsque

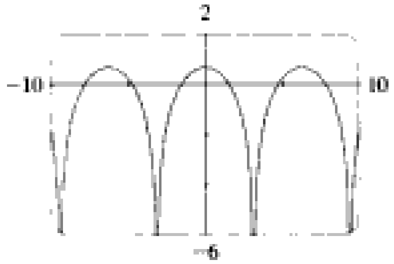


FIGURE 7

$1 + \cos x > 0$. Ainsi, F n'est pas définie quand $\cos x = -1$ et cela arrive pour $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Les discontinuités de F se présentent lorsque x est un multiple impair de π mais entre ces valeurs, elle est continue (voyez la figure 7).

Le théorème suivant énonce une importante propriété des fonctions continues dont la démonstration ne peut figurer que dans des livres d'analyse plus avancés.

10 Théorème des valeurs intermédiaires Supposons que f soit continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et appelons N un nombre strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors, il existe un nombre c dans $]a, b[$ tel que $f(c) = N$.

Le Théorème des valeurs intermédiaires certifie qu'une fonction continue passe par toutes les valeurs intermédiaires entre les valeurs $f(a)$ et $f(b)$. Il est illustré à la figure 8. La valeur N peut être atteinte une seule fois (comme dans la figure (a)) ou

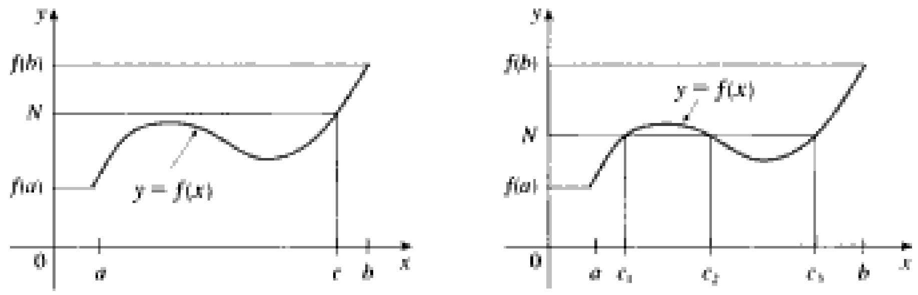


FIGURE 8 (a) (b)

plus d'une fois (comme dans la figure (b)).

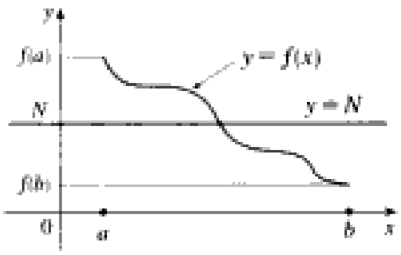


FIGURE 9

En ayant à l'esprit qu'une fonction continue est une fonction dont la courbe représentative ne présente ni coupure, ni trou, il est facile de croire en la véracité du Théorème des valeurs intermédiaires. Géométriquement parlant, il dit que la courbe représentative de f rencontre forcément quelque part toute droite horizontale $y = N$ située entre $f(a)$ et $f(b)$, comme on peut le constater à la figure 9.

Le Théorème des valeurs intermédiaires est mis à contribution dans la localisation des racines des équations, ainsi que le montre l'exemple suivant.

EXEMPLE 9 ■ Montrez qu'une racine de l'équation

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

est située entre 1 et 2 .

SOLUTION Posons $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Nous sommes à la recherche d'une solution de l'équation donnée, c'est-à-dire d'un nombre c situé entre 1 et 2 tel que $f(c) = 0$. Voilà pourquoi nous prenons $a = 1$, $b = 2$ et $N = 0$ en vue d'exploiter le théorème 10. Nous calculons

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

et

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0.$$

Donc, $f(1) < 0 < f(2)$ et $N = 0$ est bien un nombre situé entre $f(1)$ et $f(2)$. De plus, f étant une fonction polynomiale est continue. Dans ces conditions, le Théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence d'un nombre c situé entre 1 et 2 tel que $f(c) = 0$. Autrement dit, l'équation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ a au moins une racine c dans l'intervalle $]1, 2[$.

En fait, toujours à l'aide du Théorème des valeurs intermédiaires, il est possible de localiser plus précisément cette racine. Comme

$$f(1{,}2) = -0{,}128 \quad \text{et} \quad f(1{,}3) = 0{,}548,$$

il doit y avoir une racine entre 1,2 et 1,3. En procédant par essai et erreur, une calculatrice fournit encore

$$f(1{,}22) = -0{,}007008 \quad \text{et} \quad f(1{,}23) = 0{,}056068.$$

Cette racine se trouve maintenant dans l'intervalle $]1{,}22; 1{,}23[$.

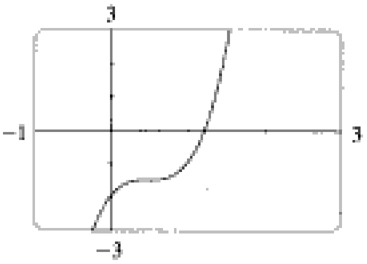


FIGURE 10

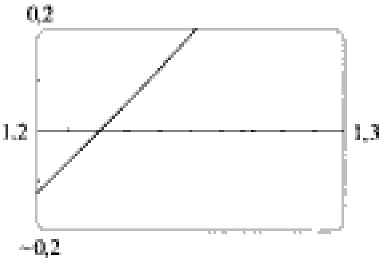


FIGURE 11

Grâce à un outil graphique, nous pouvons illustrer l'utilisation du Théorème des valeurs intermédiaires à l'exemple 9. La figure 10 montre le graphique de f affiché dans une fenêtre $[-1, 3]$ sur $[-3, 3]$ et on peut y voir la courbe croiser l'axe Ox entre 1 et 2. Une vue de plus près montre le croisement à l'intérieur de la fenêtre $[1{,}2; 1{,}3]$ sur $[-0{,}2; 0{,}2]$.

Le Théorème des valeurs intermédiaires est d'ailleurs présent dans la manière même dont travaille un outil graphique. Un ordinateur calcule un nombre fini de points du graphique et allume les pixels où se trouvent ces points. Il suppose que la fonction est continue et retient toutes les valeurs intermédiaires entre deux points consécutifs. L'ordinateur connecte alors les pixels en allumant tous les pixels intermédiaires.

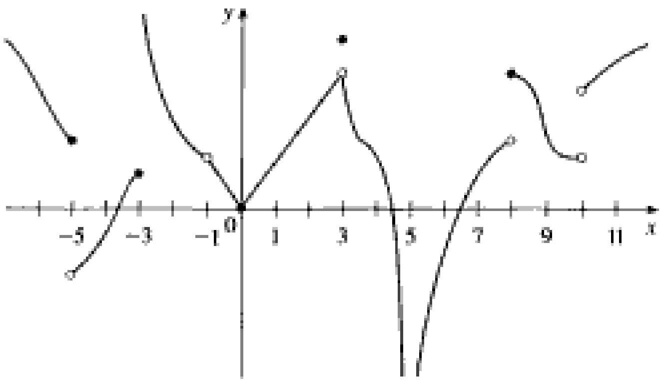
2.4 Exercices

1. Écrivez une équation qui traduise le fait qu'une fonction f soit continue au nombre 4.

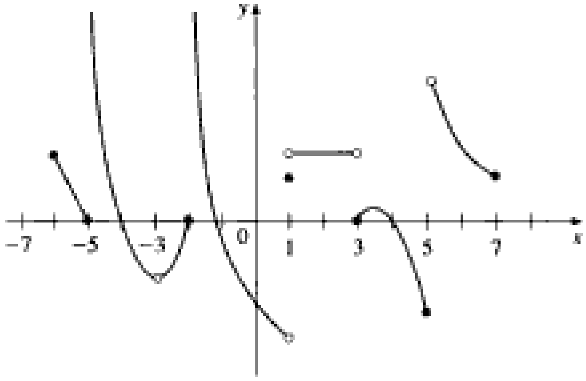
2. Si f est une fonction continue sur $]-\infty, +\infty[$, que pouvez-vous dire de son graphique ?

3. a) Regardez le graphique de f et dites en quels points f est discontinue et pourquoi.

   b) Pour chacun des points cités dans la première partie, précisez si f est continue à droite, ou à gauche, ou aucun des deux.



4. Déterminez, au vu du graphique, les intervalles sur lesquels G est continue.



5. Esquissez le graphique d'une fonction qui est continue partout sauf en $x = 3$ et qui est continue à gauche en 3.

6. Esquissez le graphique d'une fonction qui présente une discontinuité par saut en $x = 2$ et une discontinuité réductible en $x = 4$, mais qui soit continue ailleurs.

7. Un parking fait payer 3 euros pour la première heure (ou fraction d'heure) et 2 euros pour chaque heure suivante jusqu'à un maximum journalier de 10 euros.
a) Représentez graphiquement ce tarif de parking en fonction du temps.
b) Remarquez les discontinuités de cette fonction et expliquez leur signification à quelqu'un qui met sa voiture dans ce parking.

8. Expliquez pourquoi, chacune des fonctions suivantes est continue ou discontinue.
a) La température en un endroit bien précis comme une fonction du temps.
b) La température à un moment précis comme une fonction de la distance droit vers l'est de Bruxelles.
c) L'altitude par rapport au niveau de la mer comme une fonction de la distance droit vers l'est de Bruxelles.
d) Le coût d'une course en taxi en fonction de la distance parcourue.
e) La tension dans le circuit élecrique des lampes d'une pièce en fonction du temps.

9. Employez la définition de la continuité et les propriétés des limites pour montrer que la fonction

$$g(x) = (x+1)/(2x^2-1)$$

est continue en $a = 4$.

10. Employez la définition de la continuité et les propriétés des limites pour montrer que la fonction $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$ est continue sur l'intervalle $[-4, 4]$.

11-14 ■ Expliquez pourquoi la fonction est discontinue au point donné. Dessinez le graphique de la fonction.

11. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ $\qquad a = -1$

12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 6 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ $\qquad a = -1$

13. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ 3 & \text{si } x = 4 \end{cases}$ $\qquad a = 4$

14. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leqslant 2 \\ x^2-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\qquad a = 2$

15-20 ■ Expliquez, à partir des théorèmes 4, 5, 7 et 9, pourquoi la fonction est continue en chaque point de son domaine de définition. Précisez ce domaine de définition.

15. $G(x) = \dfrac{x^4+17}{6x^2+x-1}$ $\qquad$ **16.** $f(t) = 2t + \sqrt{25-t^2}$

17. $f(x) = e^x \sin 5x$ $\qquad$ **18.** $F(x) = \operatorname{Arcsin}(x^2-1)$

19. $G(t) = \ln(t^4-1)$ $\qquad$ **20.** $H(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

21-22 ■ Où sont situés les points de discontinuité de la fonction et montrez-les graphiquement.

21. $y = \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ $\qquad$ **22.** $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

23-26 ■ Grâce à la continuité, évaluez la limite.

23. $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$ $\qquad$ **24.** $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \sin(x + \sin x)$

25. $\displaystyle\lim_{x\to 1} e^{x^2-x}$ $\qquad$ **26.** $\displaystyle\lim_{x\to 2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$

27. Cherchez les nombres en lesquels la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 3x & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

est discontinue. Précisez si, en ces points, f est continue à droite, à gauche ou aucun des deux. Donnez la représentation graphique de f.

28. La force de gravité exercée par la Terre sur une masse unitaire située à une distance r du centre de la planète est donnée par

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

où M est la masse de la Terre, R son rayon et G la constante de gravitation. Est-ce que F est une fonction continue de r ?

29. Déterminez la valeur de c qui rend la fonction f continue sur $]-\infty, +\infty[$.

$$f(x) = \begin{cases} cx+1 & \text{si } x \leqslant 3 \\ cx^2-1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

30. Supposons qu'une fonction f soit continue sur $[0, 1]$ sauf au point 0,25 et que $f(0) = 1$ et $f(1) = 3$. Soit $N = 2$. Dessinez deux graphiques possibles, l'un montrant une fonction f qui ne satisfait pas à la conclusion du Théorème des valeurs intermédiaires et l'autre une fonction f qui y satisfait quand même (malgré que les hypothèses ne sont pas remplies).

31. Soit $f(x) = x^3 - x^2 + x$. Montrez qu'il y a un nombre c tel que $f(c) = 10$.

32. Montrez par le Théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un nombre strictement positif c tel que $c^2 = 2$ (Ceci prouve l'existence du nombre $\sqrt{2}$).

33-36 ■ Démontrez, à l'aide du Théorème des valeurs intermédiaires, l'existence pour chaque équation d'une racine dans l'intervalle indiqué.

33. $x^3 - 3x + 1 = 0, \quad]0, 1[$

34. $x^2 = \sqrt{x+1}$, $]1, 2[$

35. $\cos x = x$, $]0, 1[$

36. $\ln x = e^{-x}$, $]1, 2[$

37-38 ■

a) Démontrez l'existence d'au moins une racine réelle.

b) À l'aide de votre calculatrice, déterminez un intervalle de longueur 0,01 qui contienne une racine.

37. $e^x = 2 - x$

38. $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$

39-40 ■

a) Démontrez l'existence d'au moins une racine réelle.

b) À l'aide de votre outil graphique, déterminez une racine avec trois décimales correctes.

39. $\sqrt{x-5} = \dfrac{1}{x+3}$

40. $\text{Arctg}\, x = 1 - x$

41. Pour démontrer que la fonction sin est continue, nous devons montrer que $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ pour tout nombre réel a. Si nous posons $h = x - a$, alors $x = a + h$ et $x \to a$ revient à $h \to 0$. Il est alors équivalent de prouver

$$\lim_{h\to 0} \sin(a + h) = \sin a.$$

Faites-le à l'aide de (6).

42. Démontrez que la fonction cos est continue.

43. Existe-t-il un nombre qui soit égal à exactement une unité de plus que son cube ?

44. Un moine tibétain quitte son monastère à 7 h du matin, emprunte son chemin habituel pour se rendre au sommet de la montagne où il arrive à 7 h du soir. Le lendemain, il se met en route à 7 h du matin, retourne par le même chemin et est de retour dans son monastère à 7 h du soir. Utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer qu'il y a un endroit sur le chemin où le moine se trouvait à la même heure les deux jours.

2.5 Les limites infinies

Nous examinons dans cette section le comportement global des fonctions et, en particulier, si leur graphique s'approche d'une asymptote, verticale ou horizontale.

Limites infinies

À l'exemple 8 de la section 2.2, nous avons conclu que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \text{ n'existe pas,}$$

sur la base du tableau des valeurs et au vu du graphique de $y = 1/x^2$ selon lesquels les valeurs de $1/x^2$ peuvent être rendues arbitrairement grandes pourvu que x soit suffisamment proche de 0. Par conséquent, les valeurs de $f(x)$ ne s'approchent pas d'un nombre et $\lim_{x\to 0} 1/x^2$ n'existe pas.

x	$1/x^2$
± 1	1
$\pm 0{,}5$	4
$\pm 0{,}2$	25
$\pm 0{,}1$	100
$\pm 0{,}05$	400
$\pm 0{,}01$	10 000
$\pm 0{,}001$	1 000 000

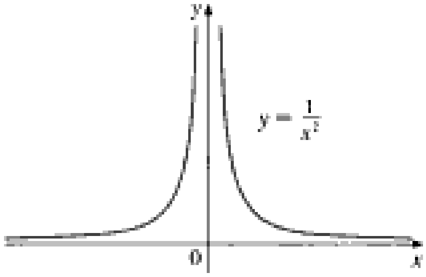


FIGURE 1

Nous traduisons ce type de comportement par l'écriture

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Ceci ne signifie nullement que nous considérons ∞ comme un nombre, ou que la limite existe. Cette notation exprime seulement la manière particulière que la limite a de ne pas exister : $1/x^2$ peut devenir aussi grand que l'on veut en prenant x suffisamment proche de 0.

De façon générale, on écrit symboliquement

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

pour signifier que les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes (ou « croissent sans borne ») lorsque x s'approche de a.

Une version plus précise de la définition 1 figure dans l'annexe D.

1 Définition Soit une fonction définie de part et d'autre de a, sauf peut-être en a même. Alors,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement grandes (aussi grandes qu'on le souhaite) à condition de prendre x suffisamment proche de a (mais non égal à a).

Voici encore une autre notation de $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$:

$$f(x) \to \infty \text{ lorsque } x \to a.$$

À nouveau, le symbole ∞ ne désigne pas un nombre alors que l'expression $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ est souvent lue comme suit

« la limite de $f(x)$ pour x tendant vers a est l'infini »

ou

« $f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers a »

ou

« $f(x)$ croît sans borne lorsque x tend vers a. »

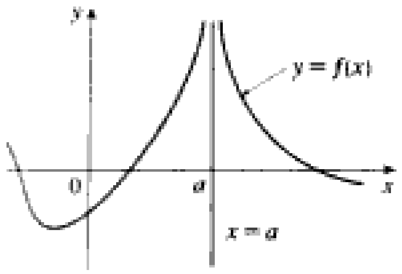


FIGURE 2
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Cette définition est illustrée graphiquement dans la figure 2.

De même, comme le montre la figure 3,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ sont négatives aussi grandes que l'on veut en valeur absolue lorsque x est suffisamment proche de a, mais non égal à a.

La notation $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se lit « la limite de $f(x)$ pour x tendant vers a est moins l'infini » ou « $f(x)$ décroît sans borne lorsque x s'approche de a ». Comme exemple, nous avons

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty.$$

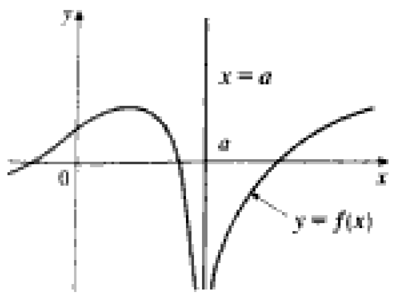


FIGURE 3
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

De pareilles définitions existent également pour les limites unilatères infinies

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty,$$

étant entendu que « $x \to a^-$ » signifie que x ne prend que des valeurs strictement inférieures à a et, semblablement, « $x \to a^+$ » signifie que x ne prend que des valeurs strictement supérieures à a. La figure 4 illustrent ces quatre cas.

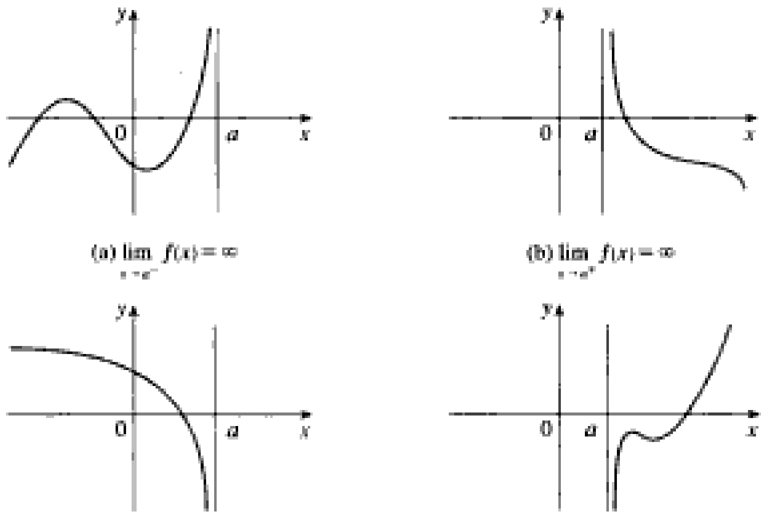


FIGURE 4

(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

2 Définition La droite $x = a$ porte le nom d'**asymptote verticale** à la courbe $y = f(x)$ si l'une au moins des situations suivantes est vérifiée

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Par exemple, l'axe Oy est une asymptote verticale à la courbe $y = 1/x^2$ parce que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. La droite $x = a$ dans chacun des graphiques de la figure 4 est une asymptote verticale.

EXEMPLE 1 ■ Cherchez $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x - 3}$ et $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{2}{x - 3}$.

SOLUTION Lorsque x est proche de 3 et supérieur à 3, le dénominateur $x - 3$ est un nombre strictement positif petit de sorte que $2/(x - 3)$ est strictement positif et grand. Par conséquent, intuitivement nous pensons que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2}{x - 3} = \infty.$$

De même, lorsque x est proche de 3 et inférieur à 3, le dénominateur $x - 3$ est un nombre petit strictement négatif de sorte que $2/(x - 3)$ est numériquement grand et négatif. Par conséquent,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2}{x - 3} = -\infty.$$

La figure 5 présente la courbe $y = 2/(x-3)$. La droite $x = 3$ est une asymptote verticale.

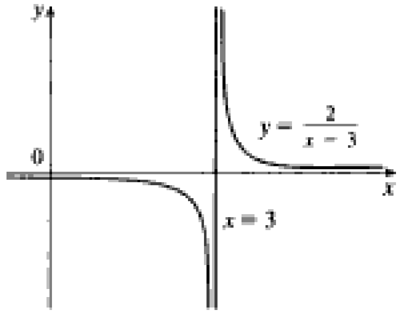


FIGURE 5

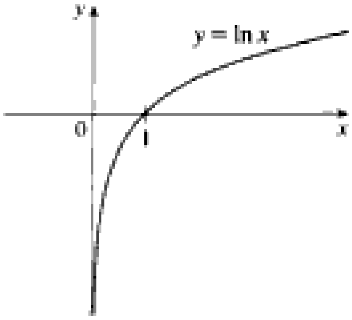


FIGURE 6

Vous connaissez deux autres fonctions qui présentent une asymptote verticale, ce sont $y = \operatorname{tg} x$ et $y = \ln x$. Sur la figure 6, nous constatons que

3 $$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty,$$

d'où la droite $x = 0$ (l'axe Oy) est une asymptote verticale. En fait, il en est de même pour $y = \log_a x$ du moment que $a > 1$ (voyez les figures 13 et 14 de la section 1.6).

La figure 7 montre que

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty,$$

d'où la droite $x = \pi/2$ est une asymptote verticale. En fait, les droites $x = (2n+1)\pi/2$, pour n entier, sont toutes des asymptotes verticales de $y = \operatorname{tg} x$.

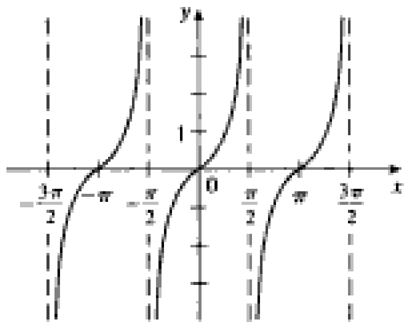


FIGURE 7
$y = \operatorname{tg} x$

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\lim\limits_{x \to 0} \ln(\operatorname{tg}^2 x)$.

SOLUTION Nous introduisons une nouvelle variable $t = \operatorname{tg}^2 x$. Alors, $t \geqslant 0$ et, lorsque $x \to 0$, $t = \operatorname{tg}^2 x \to \operatorname{tg}^2 0$ à cause de la continuité de la fonction tg . En appliquant (3), nous obtenons

$$\lim_{x \to 0} \ln(\operatorname{tg}^2 x) = \lim_{t \to 0^+} \ln t = -\infty.$$

La stratégie de résolution de problème mise en œuvre dans l'exemple 2 est *Introduire quelque chose de nouveau* (voir page 88). Dans le cas présent, le quelque chose de nouveau, l'aide auxiliaire, est la nouvelle variable t.

■ Limites à l'infini

À la section précédente, nous faisions tendre x vers un certain nombre et il en résultait des valeurs arbitrairement grandes (positives ou négatives) pour y. Ici, nous rendons x arbitrairement grand (positif ou négatif) et regardons ce qui en résulte pour y.

Commençons par examiner le comportement de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

lorsque x devient grand. Les valeurs de cette fonction, avec 6 décimales, sont reportées dans la table ci-contre et le graphique, tracé à l'aide d'un logiciel, est présenté à la figure 8.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 4	0,882353
± 5	0,923077
± 10	0,980198
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999998

Vous pouvez observer que, plus les valeurs de x sont grandes, plus les valeurs

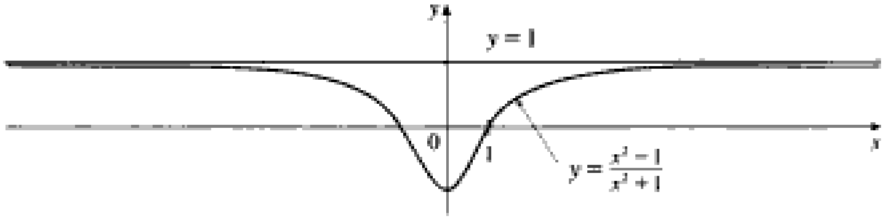


FIGURE 8

correspondantes de $f(x)$ sont proches de 1. Il semble même que nous puissions rendre les valeurs de $f(x)$ aussi proches que nous le voulons de 1 à condition de prendre celles de x suffisamment grandes. Cette situation s'écrit symboliquement comme ceci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

En toute généralité, nous écrivons

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

pour signifier que les valeurs de $f(x)$ peuvent s'approcher arbitrairement de L pour autant que celles de x soient suffisamment grandes.

4 Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, +\infty[$. Alors,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

signifie que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues arbitrairement proches de L à condition de prendre x suffisamment grand.

Une version plus précise de la définition 4 figure dans l'annexe D.

Voici une autre notation de $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$:

$$f(x) \to L \text{ lorsque } x \to \infty.$$

Le symbole ∞ ne désigne pas un nombre. Néanmoins l'expression $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ est souvent lue comme suit

« la limite de $f(x)$ pour x tendant vers l'infini est L. »

ou

« la limite de $f(x)$ lorsque x devient infini est L »

ou

« la limite de $f(x)$ lorsque x croît sans borne est L. »

Le sens de ces phrases est explicité par la définition 4.

La figure 9 montre des illustrations géométriques de la définition 4. Remarquez que le graphique de f peut s'approcher de plusieurs façons de la droite $y = L$ (qui est appelée une *asymptote horizontale*).

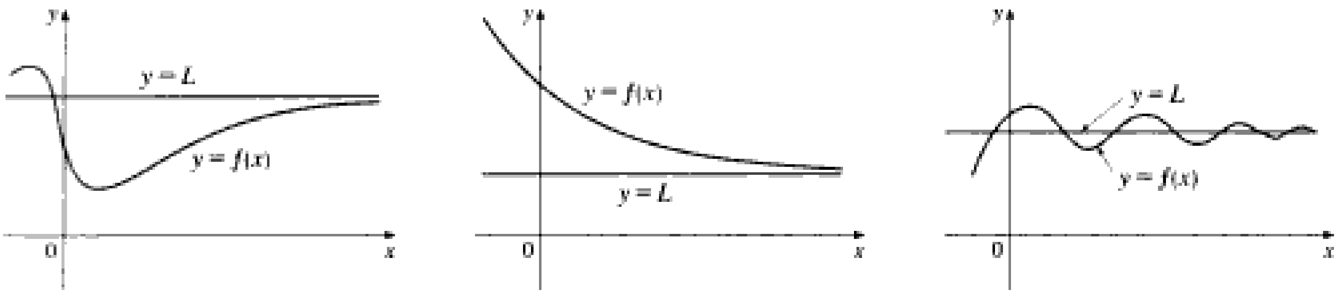


FIGURE 9
Des illustrations de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

Retournons à la figure 8 pour observer que les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches de 1 lorsque x décroît vers des valeurs numériques très grandes négatives. À condition de faire décroître x sans borne vers des valeurs négatives, il est possible de rendre $f(x)$ arbitrairement proche de 1. Cela s'écrit

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

De façon générale, la notation

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

signifie, comme le montre la figure 10, que les valeurs de $f(x)$ sont arbitrairement proches de L à condition de prendre x négatif et suffisamment grand en valeur absolue. À nouveau, le symbole $-\infty$ ne représente pas un nombre même s'il est fréquent de lire $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ comme ceci

« L est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers moins l'infini »

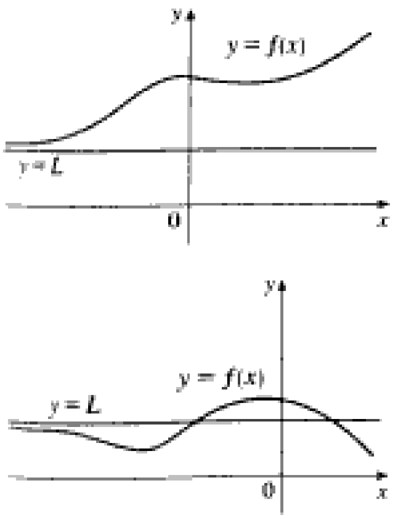


FIGURE 10
Des illustrations de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

> **5 Définition** La droite $y = L$ porte le nom d'**asymptote horizontale** à la courbe $y = f(x)$ si
>
> $$\text{soit } \lim_{x\to\infty} f(x) = L, \text{ soit } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Par exemple, la courbe de la figure 8 admet la droite $y = 1$ comme asymptote horizontale parce que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

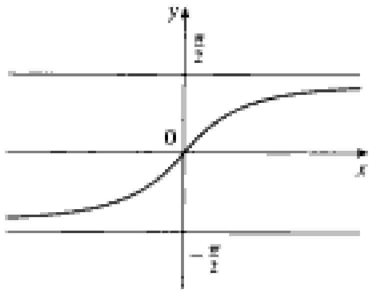


FIGURE 11
$y = \text{Arctg}\, x$

Voici un exemple d'une fonction qui possède deux asymptotes horizontales, c'est $y = \text{Arctg}\, x$ (voyez la figure 11). Comme

6 $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \text{Arctg}\, x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \infty} \text{Arctg}\, x = \frac{\pi}{2},}$$

les deux droites $y = -\pi/2$ et $y = \pi/2$ sont des asymptotes horizontales. C'est une conséquence de ce que les droites $x = \pm\pi/2$ sont des asymptotes verticales du graphique de $y = \text{tg}\, x$.

EXEMPLE 3 ■ Déterminez les limites infinies, les limites à l'infini et les asymptotes de la fonction dont le graphique est donné dans la figure 12.

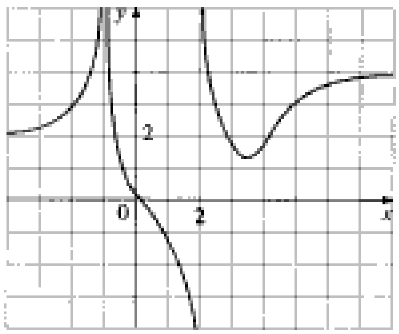


FIGURE 12

SOLUTION On voit que les valeurs de $f(x)$ deviennent grandes lorsque $x \to -1$ de part et d'autre. D'où

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty.$$

Lorsque x s'approche de 2 par la gauche, les valeurs de $f(x)$ deviennent négatives et grandes en valeur absolue, tandis que lorsque x s'approche de 2 par la droite, les valeurs de $f(x)$ sont très grandes positives. Ainsi,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty.$$

De ce fait, les droites $x = -1$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales.

Lorsque x croît indéfiniment, on voit que $f(x)$ tend vers 4 et lorsque x décroît indéfiniment, $f(x)$ tend vers 2. Ainsi

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2.$$

Par conséquent, les droites $y = 4$ et $y = 2$ sont des asymptotes horizontales.

EXEMPLE 4 ■ Déterminez $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUTION Observons d'abord que, quand x est grand, $1/x$ est petit. Par exemple,

$$\frac{1}{100} = 0{,}01, \qquad \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001, \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000001.$$

En fait, si on prend x suffisamment grand, on peut faire en sorte que $1/x$ soit aussi proche de 0 que l'on veut. Par conséquent, selon la définition 4, on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Un raisonnement semblable montre que quand x est négatif, très grand en valeur absolue, $1/x$ est négatif et très petit en valeur absolue.

D'où

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

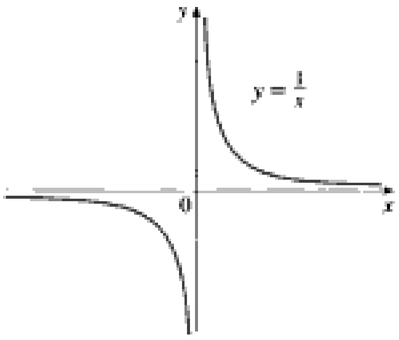


FIGURE 13

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Et de là, la droite $y = 0$ (l'axe Ox) est une asymptote horizontale de la courbe $y = 1/x$ (Il s'agit de l'hyperbole équilatère dans la figure 13).

La plupart des Lois algébriques des limites qui ont été citées à la section 2.3 subsistent pour les limites à l'infini. On peut démontrer que toutes les lois des limites énumérées à la section 2.3 (sauf les lois 8, 9 et 10) sont encore valables si on y remplace « $x \to a$ » par « $x \to \infty$ » ou par « $x \to -\infty$ ». En particulier, en combinant la loi 6 avec les résultats de l'exemple 4, on obtient une règle importante dans le calcul des limites.

7 Si n est un nombre entier strictement positif,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

EXEMPLE 5 ■ Calculez

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}.$$

SOLUTION Pour calculer la limite à l'infini d'une fonction rationnelle, on commence par diviser le numérateur et le dénominateur par la plus haute puissance de x qui figure au dénominateur (comme on ne regarde que les grandes valeurs de x, on peut aisément supposer que $x \neq 0$). Dans ce cas-ci, cette plus haute puissance de x est x^2 et on a successivement en recourant aux Lois algébriques des limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4 \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \qquad \text{[par (7)]}$$

$$= \frac{3}{5}$$

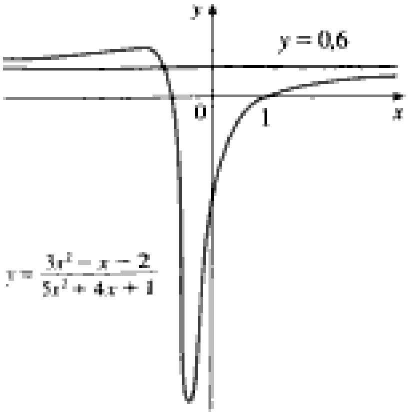


FIGURE 14

Par des calculs analogues, on montre que la limite pour x tendant vers $-\infty$ est aussi $\frac{3}{5}$. La figure 14 illustre les résultats de ces calculs et montre plus précisément comment le graphique de la fonction rationnelle approche l'asymptote horizontale $y = \frac{3}{5}$.

EXEMPLE 6 ■ Calculez $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$.

SOLUTION Nous multiplions d'abord numérateur et dénominateur par le binôme conjugué :

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Par le théorème du sandwich, entre autres, on peut voir que la limite est 0. Il est cependant plus facile de diviser numérateur et dénominateur par x. Ainsi et en se souvenant que $x = \sqrt{x^2}$ lorsque $x > 0$, on obtient

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\sqrt{1+1/x^2}+1}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0.$$

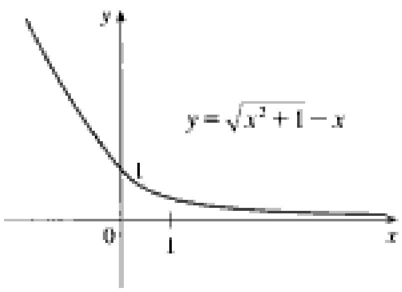


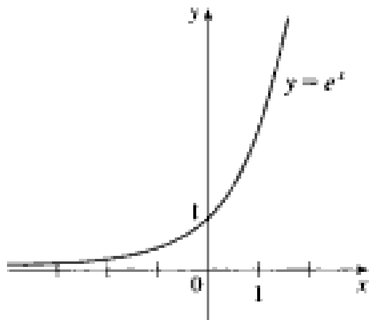
FIGURE 15

La figure 15 confirme graphiquement ce résultat.

Le graphique de la fonction exponentielle $y = e^x$ montre que la droite $y = 0$ (l'axe Ox) est une asymptote horizontale. (C'est le cas d'ailleurs pour toutes les fonctions exponentielles de base $a > 1$.) Tant le graphique de la figure 16 que la table des valeurs montrent que

8
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^x = 0.}$$

Remarquez la rapidité avec laquelle les valeurs de e^x s'approche de 0.



x	e^x
0	1,00000
−1	0,36788
−2	0,13534
−3	0,04979
−5	0,00674
−8	0,00034
−10	0,00005

FIGURE 16

EXEMPLE 7 ■ Évaluez $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$.

SOLUTION Si nous posons $t = 1/x$, nous savons par l'exemple 4 que $t \to -\infty$ lorsque $x \to 0^-$. Dès lors, grâce à (8),

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0.$$

EXEMPLE 8 ■ Calculez $\lim_{x\to\infty} \sin x$.

SOLUTION Lorsque x croît indéfiniment, les valeurs de $\sin x$ oscille sans cesse entre 1 et -1. Par conséquent, $\lim_{x\to\infty} \sin x$ n'existe pas.

Limites infinies à l'infini

La notation

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

sert à indiquer que les valeurs de $f(x)$ deviennent grandes lorsque x devient grand. Des significations analogues sont attachées aux expressions suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

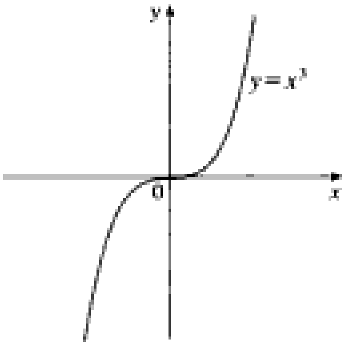


FIGURE 17

L'observation des figures 16 et 17 conduit à

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

Mais, comme le laisse entrevoir la figure 18, $y = e^x$ augmente beaucoup plus vite que $y = x^3$ lorsque x tend vers l'infini.

EXEMPLE 9 ■ Déterminez $\lim_{x\to\infty} (x^2 - x)$.

SOLUTION Il n'est pas permis d'écrire

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty.$$

En effet, les Lois algébriques des limites ne s'appliquent que lorsque les limites en jeu sont des nombres (et ∞ n'en est pas un). Cependant, nous pouvons écrire

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty,$$

parce que tant x que $x - 1$ deviennent arbitrairement grand.

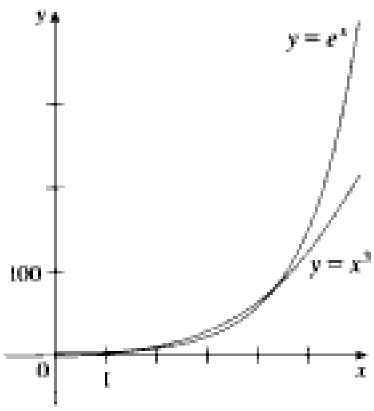


FIGURE 18

EXEMPLE 10 ■ Calculez $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$.

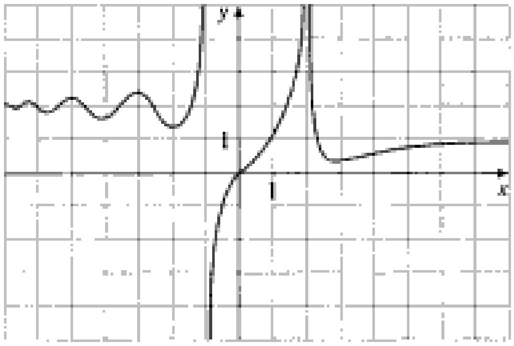
SOLUTION Nous divisons numérateur et dénominateur par x (la plus haute puissance de x au dénominateur) :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 1}{3/x - 1} = -\infty,$$

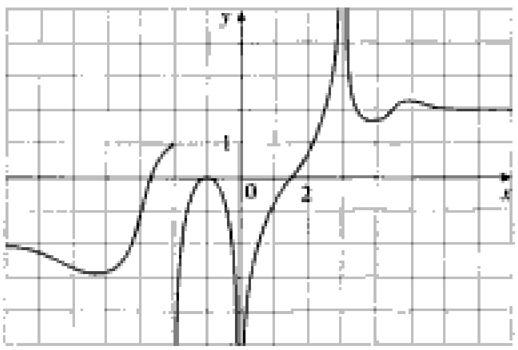
parce que, lorsque $x \to \infty$, $x + 1 \to \infty$ et $3/x - 1 \to -1$.

2.5 Exercices

1. Expliquez dans vos propres mots ce que signifie chacune des expressions suivantes.
   a) $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$ b) $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$
   c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ d) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$
2. a) Le graphique de $y = f(x)$ peut-il couper une asymptote verticale ? Peut-il couper une asymptote horizontale ? Illustrez par des graphiques.
   b) Combien d'asymptotes horizontales peut avoir le graphique de $y = f(x)$? Dessinez des graphiques pour illustrer les diverses possibilités.
3. Pour la fonction dont le graphique est donné, cherchez
   a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ b) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
   c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
   e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ f) Les équations des asymptotes.



4. Pour la fonction g dont le graphique est donné, cherchez
   a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ b) $\lim_{x\to -\infty} g(x)$
   c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ d) $\lim_{x\to 0} g(x)$
   e) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$ f) Les équations des asymptotes



5-8 ■ Dessinez le graphique d'une fonction qui satisfasse à toutes les conditions.

5. $f(0) = 0, f(1) = 1, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, f est impaire
6. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$
7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$
8. $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$

9. Conjecturez la valeur de la limite
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$
en calculant la fonction $f(x) = x^2/2^x$ pour $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ et 100.

10. Déterminez $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^3 - 1}$ et $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^3 - 1}$
    a) en calculant $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ pour des valeurs de x proches de 1 tant à gauche qu'à droite,
    b) en raisonnant comme à l'exemple 1,
    c) en lisant le graphique de f.

11-12 ■ Utilisez le graphique pour estimer la valeur de la limite.

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2 + 25\sin x}$
12. $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

13-14 ■ Utilisez le graphique pour découvrir toutes les asymptotes horizontales et verticales de la courbe.

13. $y = \frac{x^3}{x^3 - 2x + 1}$
14. $y = \operatorname{tg}(2\sin x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi$

15-29 ■ Calculez la limite.

15. $\lim_{x\to 3} \frac{1}{(x-3)^8}$
16. $\lim_{x\to \pi^-} \operatorname{cosec} x$
17. $\lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{x^2(x+2)}$
18. $\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5)$
19. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x^2 - 2x + 5}$
20. $\lim_{t\to\infty} \frac{7t^3 + 4t}{2t^3 - t^2 + 3}$
21. $\lim_{t\to -\infty} \frac{6t^2 + 5t}{(1-t)(2t-3)}$
22. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + 4x^2}}{4 + x}$

23. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x)$

24. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \cos x$

26. $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{Arctg}(x^4 - x^2)$

27. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^7 - 1}{x^6 + 1}$

28. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} e^{\operatorname{tg} x}$

29. $\lim\limits_{x \to \infty} \sin \dfrac{1}{x}$

---

30. a) Dessinez la courbe représentative de

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}.$$

Combien d'asymptotes horizontale ou verticale voyez-vous ? Au vu du graphique, estimez les limites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}.$$

b) En calculant des valeurs de $f(x)$, donnez des estimations numériques des limites de la première partie.

c) Calculez les valeurs exactes des limites de la première partie. Trouvez-vous les mêmes valeurs ou des valeurs différentes pour ces deux limites ? (Vu votre réponse à la partie a), vous devriez confirmer votre calcul de la deuxième limite.)

31-32 ■ Déterminez les asymptotes horizontales et verticales de chaque courbe. Vérifiez vos résultats en traçant les courbes et en estimant la position des asymptotes.

31. $y = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}$

32. $y = \dfrac{x - 9}{\sqrt{4x^2 + 3x + 2}}$

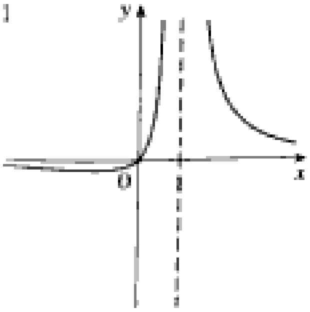
---

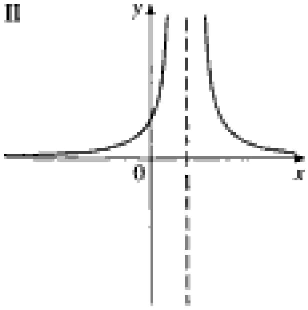
33. Apparier les fonctions a) - f) aux graphiques I-VI. Justifiez vos choix.

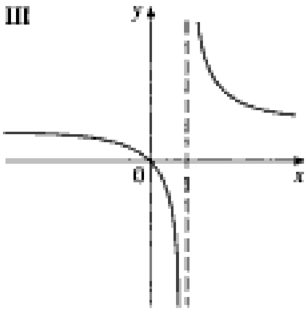
a) $y = \dfrac{1}{x - 1}$ b) $y = \dfrac{x}{x - 1}$

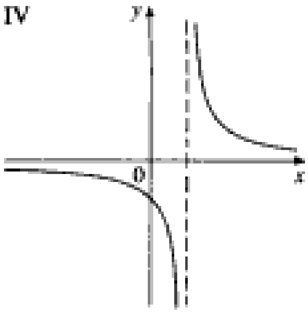
c) $y = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$ d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

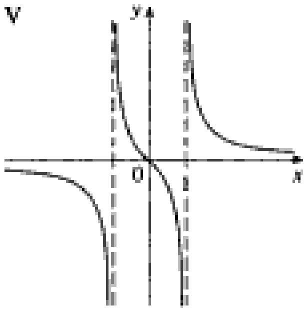
e) $y = \dfrac{x}{(x - 1)^2}$ f) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

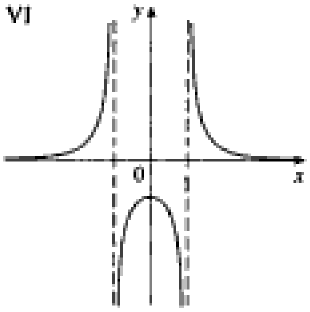
I


II


III


IV


V


VI


34. Inventez la formule d'une fonction qui a $x = 1$ et $x = 3$ comme asymptotes verticales et $y = 1$ comme asymptote horizontale.

35. Trouvez une formule pour une fonction f qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \qquad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty.$$

36. Par *comportement asymptotique* d'une fonction, on entend une description de ce qui se passe pour ses valeurs lorsque $x \to \infty$ et $x \to -\infty$.

a) Décrivez et comparez le comportement asymptotique des fonctions

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

en dessinant les deux fonctions dans les fenêtres $[-2, 2]$ sur $[-2, 2]$ et $[-10, 10]$ sur $[-10\,000, 10\,000]$.

b) On dit que deux fonctions ont *même comportement asymptotique* si leur rapport tend vers 1 quans $x \to \infty$. Montrez que P et Q ont même comportement asymptotique.

37. Soit P et Q des polynômes. Calculez

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si le degré de P est a) inférieur au degré de Q et b) supérieur au degré de Q.

38. Faites un rapide croquis de la courbe $y = x^n$ (n est un entier) dans les 5 cas suivants :

■ $n = 0$ ■ $n > 0$, n impair

■ $n > 0$, n pair ■ $n < 0$, n impair

■ $n < 0$, n pair

Trouvez maintenant les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n$ b) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^n$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} x^n$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$

39. Que vaut $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ si, pour tout $x > 5$,

$$\frac{4x-1}{x} < f(x) < \frac{4x^2+3x}{x^2} \quad ?$$

40. En théorie de la relativité, la masse d'une particule animée d'une vitesse v est donnée par

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

où m_0 est la masse au repos et c la vitesse de la lumière. Qu'arrive-t-il lorsque $v \to c^-$?

41. a) Une citerne contient 5 000 L d'eau pure. De la saumure qui contient 30 g de sel par litre y est versée à raison de 25 L/min. Montrez que la concentration de sel après t minutes (en g/L) est donnée par

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}.$$

b) Comment évolue cette concentration lorsque $t \to \infty$?

42. Au chapitre 7, nous serons à même de montrer que, sous certaines conditions, la vitesse $v(t)$ d'une goutte de pluie qui tombe est, au moment t,

$$v(t) = v^*(1 - e^{gt/v^*})$$

où g est l'accélération due à la gravité et v^*, la vitesse finale de la goutte d'eau.

a) Calculez $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$.

b) Dessinez le graphique de $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s et $g = 9{,}8$ m/s^2. Combien de temps faut-il pour que la goutte de pluie atteigne 99 % de sa vitesse finale ?

43. a) Montrez que $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x/10} = 0$.

b) En dessinant dans la même fenêtre $y = e^{-x/10}$ et $y = 0{,}1$, détectez à partir de quelle valeur de x est-ce que $e^{-x/10} < 0{,}1$?

c) Pouvez-vous répondre à la partie b) sans faire appel à un outil graphique ?

44. a) Montrez que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2-5x}{2x^2+1} = 2$.

b) En dessinant dans la même fenêtre la fonction de la partie a) et $y = 1{,}9$, trouvez un nombre N tel que

$$\frac{4x^2-5x}{2x^2+1} > 1{,}9 \quad \text{quand} \quad x > N.$$

Et si 1,9 est remplacé par 1,99 ?

2.6 Les tangentes, vitesses et autres taux de variation

À la section 2.1, nous avons conjecturé quelques pentes de tangente et des vitesses à partir de déductions numériques. Maintenant que nous avons défini les limites et appris quelques techniques pour les calculer, nous revenons aux problèmes de tangente et de vitesse, le calcul des pentes de tangente, des vitesses et autres taux de variation en notre possession.

■ Les tangentes

Si nous désirons trouver la tangente au point $P(a, f(a))$ d'une courbe C d'équation $y = f(x)$, nous choisissons un point voisin $Q(x, f(x))$, distinct de P, et calculons la pente de la sécante PQ :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Ensuite, nous faisons glisser Q le long de C en direction de P en faisant tendre x vers a. Si m_{PQ} s'approche d'un nombre m, alors nous définissons comme *tangente* t la droite qui passe par P de pente m. (Ceci revient à dire que la tangente est la droite qui occupe la position limite de la sécante PQ lorsque Q s'approche de P. Voyez la figure 1.)

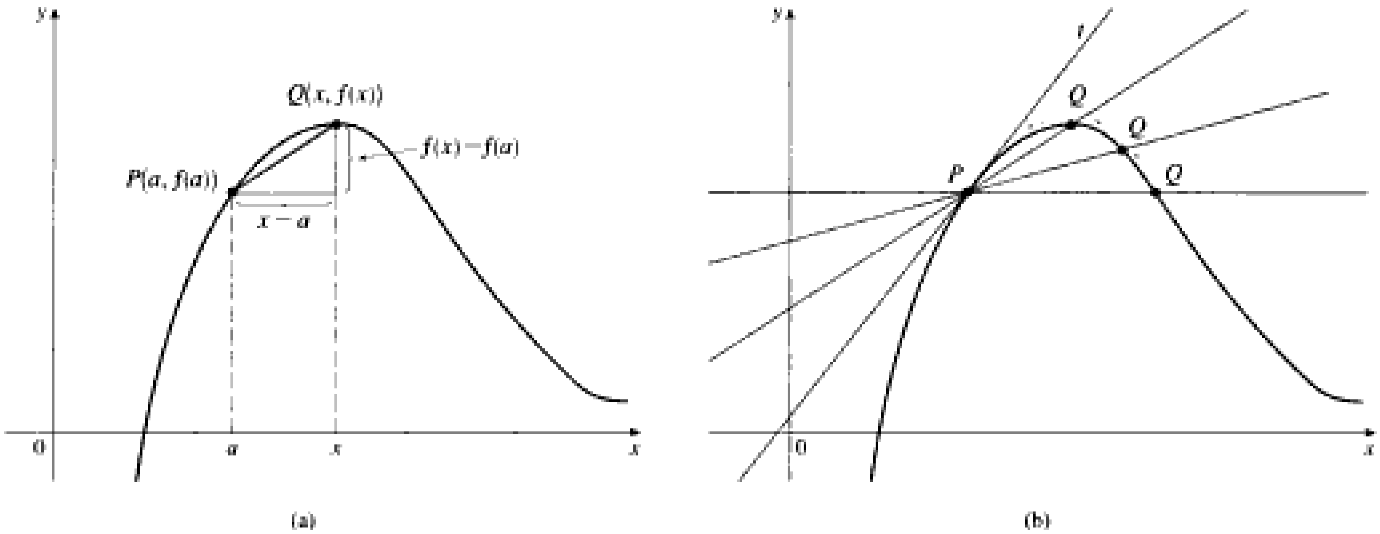


FIGURE 1

1 Définition La **droite tangente** à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a, f(a))$ est la droite qui passe par P et de pente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

à supposer que cette limite existe.

Notre premier exemple consiste à confirmer la conjecture que nous avons faite dans l'exemple 1 de la section 2.1.

EXEMPLE 1 ■ Établissez une équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $P(1, 1)$.

SOLUTION Nous sommes dans le cas $a = 1$ et $f(x) = x^2$. Donc

La forme « point-pente » d'une droite passant par le point (x_1, y_1) et de pente m :

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

La forme « point-pente » de l'équation d'une droite conduit à une équation de la tangente en $(1, 1)$

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = 2x - 1.$$

Il nous arrive d'appeler la pente de la tangente en un point, *pente de la courbe* en ce point. Cela vient du fait que si nous regardons le point d'assez près, il nous semble que la courbe ressemble fort à une ligne droite. La figure 2 illustre un tel mouvement d'approche sur la courbe $y = x^2$. Plus la vue est proche, plus le tronçon de parabole semble rectiligne. En d'autres mots, il est devenu difficile de distinguer la courbe de sa tangente.

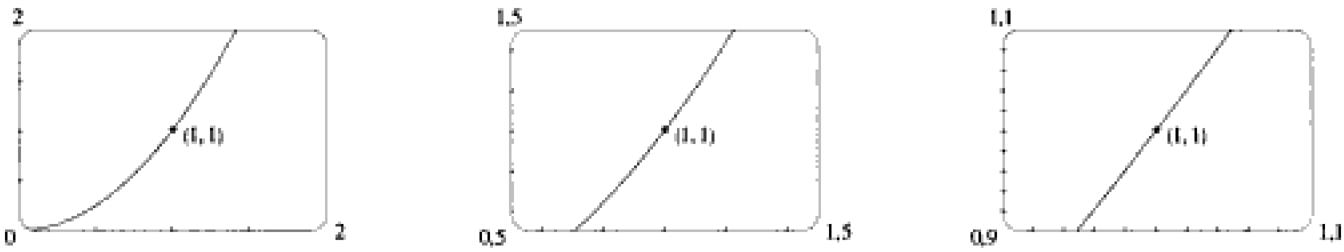


FIGURE 2
Vues de plus en plus rapprochées du point (1,1) sur la parabole $y = x^2$

Voici une autre expression de la pente de la tangente, parfois plus facile à utiliser. Posons

$$h = x - a.$$

Alors, $x = a + h$ et la pente de la sécante PQ s'écrit

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

(Voyez la figure 3 qui illustre le cas où $h > 0$ et donc Q à la droite de P. Dans le cas $h < 0$, Q serait à gauche de P.)

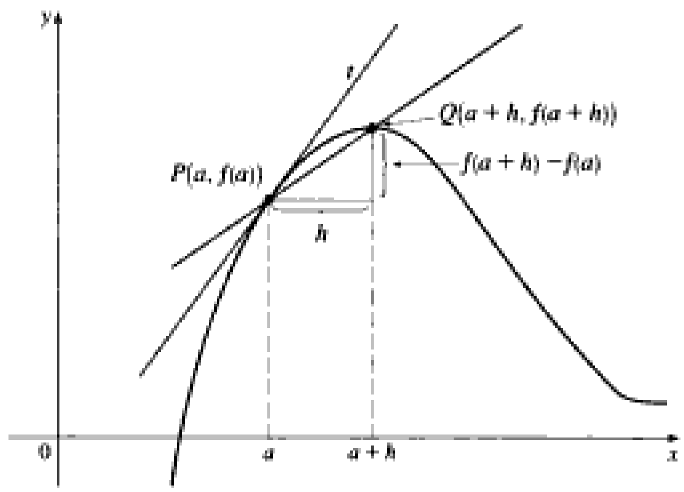


FIGURE 3

Notons que, lorsque x tend vers a, h s'approche de 0 et l'expression de la pente de la tangente dans la définition 1 devient

2
$$\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.}$$

EXEMPLE 2 ■ Trouvez une équation de la tangente à l'hyperbole $y = 3/x$ au point $(3, 1)$.

SOLUTION Soit $f(x) = 3/x$. La pente de la tangente en $(3, 1)$ est donnée par

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h}$$
$$= -\frac{1}{3}.$$

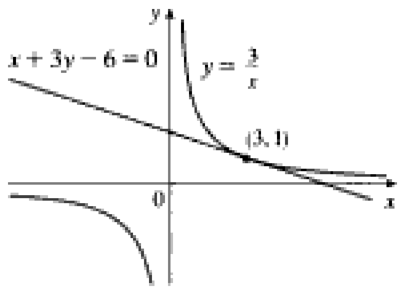


FIGURE 4

Aussi, une équation de la tangente au point $(3, 1)$ est

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3),$$

qui se simplifie en $x + 3y - 6 = 0$.

La figure 4 montre l'hyperbole et sa tangente.

■ Vitesses

À la section 2.1, nous évoquions le mouvement d'une balle lâchée du sommet de la Tour Eiffel et définissions sa vitesse comme la valeur limite des vitesses moyennes mesurées sur des intervalles de temps de plus en plus courts.

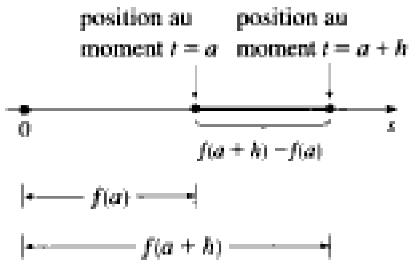
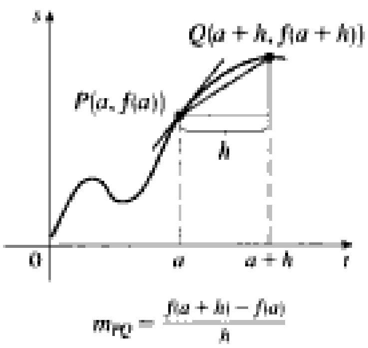


FIGURE 5

De façon générale, supposons qu'un objet se déplace en ligne droite selon une équation du mouvement $s = f(t)$, où s est le déplacement (distance orientée) de l'objet depuis le moment choisi comme origine du temps jusqu'au temps t. On appelle **fonction position** la fonction f qui décrit le mouvement de l'objet. Durant l'intervalle de temps $t = a$ jusqu'à $t = a + h$, le changement de position de l'objet est donné par $f(a+h) - f(a)$ (voyez la figure 5). La vitesse moyenne de l'objet sur cet intervalle de temps est calculée par

$$\text{vitesse scalaire moyenne} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

qui donne également la pente de la sécante PQ dans la figure 6.



$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
= vitesse moyenne

FIGURE 6

Supposons maintenant que nous calculions les vitesses moyennes sur des intervalles de temps $[a, a+h]$ de plus en plus courts. Autrement dit, nous faisons tendre h vers 0. De la même façon que dans l'exemple de la balle qui tombe, nous définissons la **vitesse scalaire instantanée** $v(a)$ au moment $t = a$ comme la limite de ces vitesses moyennes :

3
$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Ce qui signifie que la vitesse instantanée au moment $t = a$ est égale à la pente de la tangente en P. (Comparez les équations 2 et 3.)

Maintenant que nous savons comment calculer des limites, revenons au problème de la balle en chute libre.

EXEMPLE 3 ■ Supposons qu'une balle soit lâchée du haut de la tour Eiffel, à 300 m au-dessus du niveau du sol.

a) Quelle est la vitesse de la balle 5 secondes plus tard ?

b) Quelle est sa vitesse au moment de son impact avec le sol ?

Il faut se souvenir (section 2.1) que la distance parcourue (en mètres) après t secondes est $4{,}9t^2$.

SOLUTION Nous partons de l'expression du mouvement $s = f(t) = 4{,}9t^2$ pour calculer la vitesse $v(a)$ après a secondes :

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a+h)^2 - 4{,}9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4{,}9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4{,}9(2a + h) = 9{,}8a. \end{aligned}$$

a) La vitesse après 5 secondes est $v(5) = (9{,}8)(5) = 49$ m/s.

b) Puisque la balle est lâchée d'une hauteur de 300 m, elle touchera le sol au moment t_1 tel que $s(t_1) = 300$, soit

$$4{,}9t_1^2 = 300.$$

Ce qui donne

$$t_1^2 = \frac{300}{4{,}9} \qquad \text{et} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{300}{4{,}9}} \approx 7{,}8 \text{ s}.$$

La vitesse de la balle au moment de l'impact est donc

$$v(t_1) = 9{,}8t_1 = (9{,}8)\sqrt{\frac{300}{4{,}9}} \approx 76{,}7 \text{ m/s}.$$

■ D'autres taux de variation

Considérons une quantité y qui dépend d'une autre quantité x. Donc, y est une fonction de x que nous écrivons $y = f(x)$. Lorsque x varie de x_1 à x_2, sa variation (appelée aussi **incrément** de x) est

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

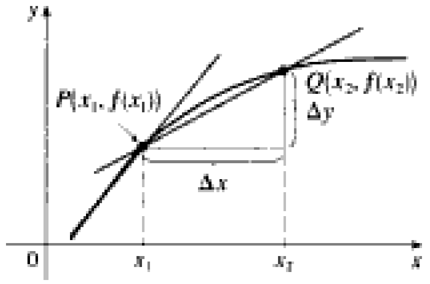
et la variation de y qui en résulte est

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Le quotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

appelé **taux moyen de variation de y par rapport à x** sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, peut être vu comme la pente de la sécante PQ dans la figure 7.



taux moyen de variation $= m_{PQ}$

FIGURE 7 taux de variation instantané = pente de la tangente en P

Par analogie avec la vitesse, nous envisageons les taux de variation moyen sur des intervalles de temps de plus en plus petits en faisant tendre x_2 vers x_1 ou Δx vers 0. La limite de ces taux de variation moyens, appelée **taux de variation instantané de y par rapport à x** en $x = x_1$, peut être vue comme la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

4 $$\text{taux de variation instantané} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

x (h)	T (°C)	x (h)	T (°C)
0	6,5	13	16,0
1	6,1	14	17,3
2	5,6	15	18,2
3	4,9	16	18,8
4	4,2	17	17,6
5	4,0	18	16,0
6	4,0	19	14,1
7	4,8	20	11,5
8	6,1	21	10,2
9	8,3	22	9,0
10	10,0	23	7,9
11	12,1	24	7,0
12	14,3		

Note à propos des unités

Le taux de variation moyen $\Delta T / \Delta x$ s'exprime en unités de ΔT divisées par les unités de Δx, à savoir en degrés Celsius par heure. Comme le taux de variation instantané est la limite des taux de variation moyens, il se mesure dans les mêmes unités, degrés Celsius par heure.

EXEMPLE 4 ■ Des relevés de température (en degrés Celsius) ont été effectués toutes les heures une journée d'avril à l'observatoire de Uccle (Belgique). Le temps x est mesuré en heures à partir de minuit. Les données sont reprises dans la table ci-contre.

a) Quel est le taux moyen de variation de la température par rapport au temps
■ de midi à 15 h ■ de midi à 14 h
■ de midi à 13 h

b) Estimez le taux de variation instantané à midi.

SOLUTION

a) ■ Entre midi et 15 h, la température passe de 14,3 °C à 18,2 °C, ce qui donne

$$\Delta T = T(15) - T(12) = 18{,}2 - 14{,}3 = 3{,}9 \text{ °C},$$

et $\Delta x = 3$ h. Par conséquent, le taux moyen de variation de la température par rapport au temps vaut

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{3{,}9}{3} = 1{,}3 \text{ °C/h}.$$

■ Entre midi et 14 h, le taux de variation moyen est

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(14) - T(12)}{14 - 12} = \frac{17{,}3 - 14{,}3}{2} = 1{,}5 \text{ °C/h}.$$

■ Entre midi et 13 h, le taux de variation moyen est

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T(13) - T(12)}{13 - 12} = \frac{16{,}0 - 14{,}3}{1} = 1{,}7\ ^\circ\text{C/h}.$$

b) Nous reportons les points du tableau dans un système d'axes et faisons passer par eux une courbe lisse qui représente approximativement l'évolution de la température. Nous traçons ensuite la tangente au point P d'abscisse 12. Sur la base de la mesure des côtés de l'angle droit dans le triangle rectangle ABC, nous estimons la pente de la tangente

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{10{,}3}{5{,}5} \approx 1{,}9.$$

Nous en concluons que le taux de variation instantané de la température par rapport au temps à midi est d'environ 1,9 °C/h.

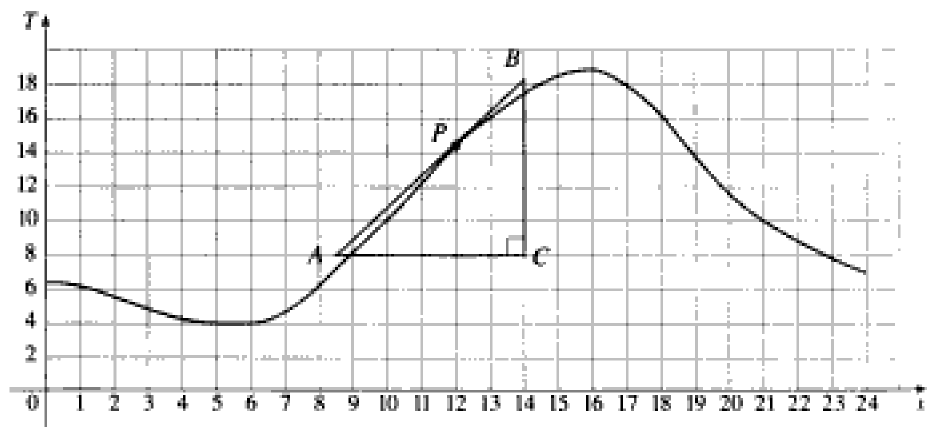


FIGURE 8

La vitesse d'un objet est le taux de variation instantanée de l'espace parcouru par rapport au temps. Les physiciens s'intéressent à d'autres taux de variation comme, par exemple, le taux de variation du travail par rapport au temps (qui est la puissance). Les chimistes qui suivent l'évolution d'une réaction chimique sont intéressés par le taux de variation de la concentration du réactant par rapport au temps (appelé taux de réaction). Un fabricant d'acier se penche sur le taux de variation du coût de production de x tonnes d'acier par jour par rapport à x (appelé coût marginal). Un biologiste se préoccupe du taux de variation de la population d'une colonie de bactéries par rapport au temps. En bref, le calcul des taux de variation est important dans toutes les sciences naturelles, en sciences appliquées et même en sciences sociales. D'autres exemples apparaîtront dans la section 3.3.

Tous ces taux de variation peuvent être vus comme des pentes de tangentes. Ce qui donne une valeur ajoutée à la solution du problème de la tangente. Lorsque nous cherchons à résoudre un problème où interviennent des tangentes, ce n'est pas seulement un problème géométrique que nous résolvons. Nous apportons également une solution à un grand nombre de problèmes qui comportent des taux de variation en sciences et en sciences appliquées.

2.6 Exercices

1. Soit une courbe d'équation $y = f(x)$.

a) Écrivez une expression de la pente de la sécante qui passe par les points $P(3, f(3))$ et $Q(x, f(x))$.

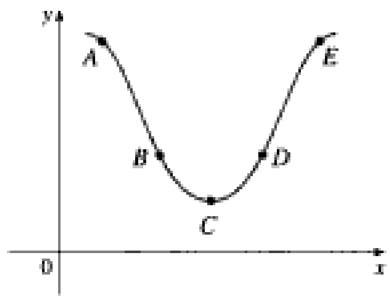
b) Écrivez une expression de la pente de la tangente en P.

2. Supposons que le mouvement d'un objet soit donné par la fonction de position $s = f(t)$.

a) Écrivez une expression de la vitesse moyenne de cet objet entre le moment $t = a$ et le moment $t = a + h$.

b) Écrivez une expression de la vitesse instantanée au moment $t = a$.

3. Considérez la pente de la courbe que voici aux cinq points indiqués et classez ces pentes en ordre décroissant. Expliquez votre raisonnement.



4. Dessinez la courbe $y = e^x$ dans les fenêtres $[-1, 1]$ sur $[0, 2]$, $[-0{,}5; 0{,}5]$ sur $[0{,}5; 1{,}5]$ et $[-0{,}1; 0{,}1]$ sur $[0{,}9; 1{,}1]$. Que remarquez-vous à propos de la courbe lorsque vous zoomez sur le point $(0, 1)$?

5. a) Quelle est la pente de la tangente à la parabole $y = x^2 + 2x$ au point $(-3, 3)$

■ d'après la définition 1 ? ■ d'après l'équation 2 ?

b) Écrivez une équation de cette tangente.

c) Dessinez la parabole et la tangente. En guise de vérification, zoomez sur le point $(-3, 3)$ jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de distinguer leurs traits respectifs.

6. a) Quelle est la pente de la tangente à la courbe $y = x^3$ au point $(-1, -1)$

■ d'après la définition 1 ? ■ d'après l'équation 2 ?

b) Écrivez une équation de cette tangente.

c) Dessinez la parabole et la tangente dans des fenêtres de plus en plus petites centrées en $(-1, -1)$ jusqu'à ce que courbe et tangente semblent confondues.

7-9 ■ Déterminez l'équation de la tangente à la courbe au point donné.

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = x/(1 - x)$, $(0, 0)$

9. $y = 1/x^2$, $(-2, \frac{1}{4})$

10. a) Déterminez la pente de la tangente à la parabole $y = 1 + x + x^2$ au point d'abscisse a.

b) Calculez les pentes des tangentes aux points d'abscisse -1, $-\frac{1}{2}$ et 1.

c) Tracez la courbe et ses trois tangentes sur le même écran.

11. a) Déterminez la pente de la tangente à la courbe $y = x^3 - 4x + 1$ au point d'abscisse a.

b) Calculez les pentes des tangentes aux points $(1, -2)$ et $(2, 1)$.

c) Tracez la courbe et ses deux tangentes sur le même écran.

12. a) Déterminez la pente de la tangente à la courbe $y = 1/\sqrt{5 - 2x}$ au point d'abscisse a.

b) Calculez les équations des tangentes aux points $(2, 1)$ et $(-2, \frac{1}{3})$.

c) Tracez la courbe et ses deux tangentes sur le même écran.

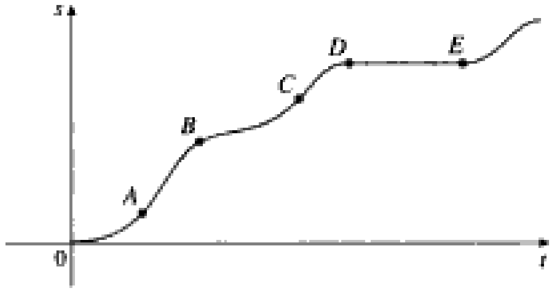
13. Le graphique représente la fonction position d'une voiture. Lisez sur le graphique et expliquez vos réponses aux questions suivantes.

a) Quelle était la vitesse initiale de la voiture ?

b) La voiture allait-elle plus vite en B ou en C ?

c) La voiture était-elle en train de ralentir ou d'accélérer en A, B et C ?

d) Que s'est-il passé entre D et E ?



14. Valérie voyage sur une autoroute. Retracez graphiquement la position de sa voiture si elle conduit de la manière suivante : au moment $t = 0$, la voiture est à la borne 15 et roule à la vitesse constante de 90 km/h. Elle roule de cette manière pendant exactement une heure. Pendant deux minutes elle décélère progressivement et s'arrête pour déjeuner. Le repas dure 26 minutes après quoi elle se remet en route, accélérant jusqu'à atteindre 105 km/h en deux minutes. Elle poursuit sa route à cette vitesse durant deux heures, puis ralentit et s'arrête en trois minutes.

15. Quand une balle est lancée en l'air avec une vitesse de 12 m/s, sa hauteur en mètres après t secondes est donnée par $y = 12t - 4{,}9t^2$. Quelle est la vitesse de la balle deux secondes plus tard ?

16. Si une flèche est décochée verticalement sur la lune à la vitesse de 58 m/s, sa hauteur en mètres après t secondes est donnée par $H = 58t - 0{,}83t^2$.

a) Quelle est la vitesse de la flèche 1 s plus tard ?
b) Quelle est la vitesse de la flèche quand $t = a$?
c) À quel moment la flèche va-t-elle retomber sur la lune ?
d) Quelle vitesse aura la flèche au moment de l'impact ?

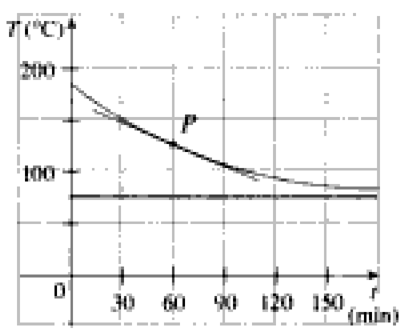
17. Le déplacement (en mètres) d'un objet qui se déplace en ligne droite est donné par l'équation du mouvement $s = 4t^3 + 6t + 2$ où t est mesuré en secondes. Déterminez la vitesse de l'objet aux moments $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ et $t = 3$.

18. L'espace parcouru (en mètres) par un mobile qui se déplace en ligne droite est donné par $s = t^2 - 8t + 18$, où t est mesuré en secondes.

a) Calculez la vitesse moyenne sur chaque intervalle de temps
■ $[3, 4]$ ■ $[3{,}5; 4]$
■ $[4, 5]$ ■ $[4; 4{,}5]$
b) Quelle est la vitesse instantanée au moment $t = 4$?
c) Dessinez le graphique de s comme fonction de t, les sécantes dont les pentes sont les vitesses moyennes de la partie a), et la tangente dont la pente est la vitesse instantanée de la partie b).

19. Une canette de limonade est placée dans un réfrigérateur très froid. Faites un graphique de l'évolution de la température de la limonade en fonction du temps. Est-ce que la vitesse initiale de variation de la température est plus grande ou plus faible que la vitesse de variation après une heure ?

20. Une dinde rôtie est sortie du four où la température est de 185 °C et déposée sur un chauffe-plat capable de la maintenir à une température de 75 °C. La courbe montre le refroidissement progressif de la dinde. (À la section 7.5, nous serons à même d'écrire une équation de T en fonction du temps basée sur les lois du refroidissement de Newton.) Quelle est la vitesse de refroidissement de la dinde après une heure si on se fie à la pente de la tangente à cette courbe ?



21. a) Calculez sur les données de l'exemple 4 les taux de variation moyens de la température par rapport au temps
■ de 20 h à 23 h
■ de 20 h à 22 h
■ de 20 h à 21 h
b) Estimez la vitesse de variation instantanée de T par rapport au temps à 20 h en mesurant la pente d'une tangente.

22. La table présente l'évolution sur un certain nombre d'années de la population d'une ville (en milliers).

Année	1984	1986	1988	1990	1992	1994
P	695	716	733	782	800	817

a) Calculez le taux d'accroissement moyen
■ entre 1986 et 1992
■ entre 1988 et 1992
■ entre 1990 et 1992
■ entre 1992 et 1994
Dans chaque cas, précisez les unités.
b) Estimez le taux d'accroissement instantané en 1992 en prenant la moyenne de deux taux moyens. Quelles sont les unités?
c) Estimez le taux d'accroissement instantané en 1992 en mesurant la pente d'une tangente.

23. Produire x unités d'un certain bien coûte (en euros) $C(x) = 5000 + 10x + 0{,}05x^2$.

a) Calculez le taux moyen de changement de C lorsque le niveau de production passe de
■ $x = 100$ à $x = 105$
■ $x = 100$ à $x = 101$.
b) Calculez le taux de variation instantané de C par rapport à x quand $x = 100$. (Ce taux s'appelle *coût marginal*. Sa signification sera expliquée dans la section 3.3).

24. Une citerne cylindrique qui contient 100 000 litres d'eau peut être vidangée par le bas en une heure. Selon la loi de Torricelli, le volume d'eau présent dans la citerne après t minutes est

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 60.$$

Déterminez la vitesse à laquelle l'eau s'échappe de la citerne (taux de variation instantané de V par rapport à t) en fonction du temps. En quelles unités s'exprime-t-elle ? Calculez le débit de l'écoulement et la quantité d'eau encore présente dans la citerne aux moments $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ et 60. Résumez vos résultats en une phrase ou deux. À quel moment le débit est-il le plus fort ? Le plus faible ?

2.7 Les dérivées

À la section précédente, nous avons défini la pente de la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a par

1
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nous avons également vu que la vitesse au temps $t = a$ d'un objet dont la position est décrite par $s = f(t)$ est

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

En fait, des limites de la forme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se présentent chaque fois que nous avons à calculer un taux de variation, quelque soit le domaine des sciences ou des sciences appliquées, taux de réaction en chimie ou taux marginal en économie. Vu que ce type de limite est tellement répandu, il porte un nom et reçoit une notation particulière.

$f'(a)$ se lit « f prime de a ».

2 Définition La **dérivée d'une fonction f en un nombre a**, notée $f'(a)$, est

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

pour autant que cette limite existe.

Si nous choisissons d'écrire $x = a + h$, alors $h = x - a$ et il est équivalent de faire tendre h vers 0 ou x vers a. Avec ces notations, voici la forme que prend la définition de la dérivée, forme que nous avons d'ailleurs rencontrée lors de la recherche des tangentes, à savoir

3
$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

EXEMPLE 1 ■ Calculez la dérivée de la fonction $f(x) = x^2 - 8x + 9$ au nombre a.

SOLUTION En application de la définition 2, nous avons

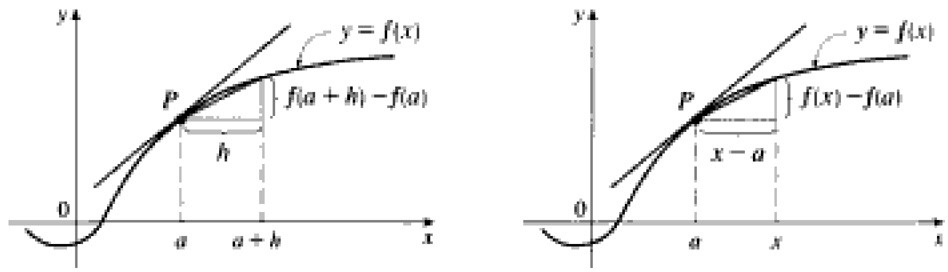
$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0}(2a + h - 8) \\
&= 2a - 8.
\end{aligned}$$

■ Interprétation de la dérivée comme pente de tangente

À la section 2.6, nous avons défini la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a, f(a))$ comme la droite qui passe par P et dont la pente m est donnée par l'équation 1. Puisque, par la définition 2, cette pente est aussi la dérivée $f'(a)$, nous pouvons énoncer

> La tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $P(a, f(a))$ est la droite qui passe par P et dont la pente est égale à $f'(a)$, la dérivée de f en a.

L'interprétation géométrique de la dérivée (qu'elle soit définie par (2) ou par (3)) est celle de la figure 1.



(a) $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
= la pente de la tangente en P
= la pente de la courbe en P

(b) $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
= la pente de la tangente en P
= la pente de la courbe en P

FIGURE 1
Interprétation géométrique de la dérivée

Avec la forme point-pente de l'équation d'une droite, nous pouvons écrire une équation de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

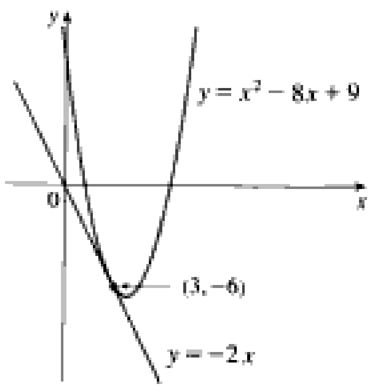


FIGURE 2

EXEMPLE 2 ■ Écrivez une équation de la tangente à la parabole $y = x^2 - 8x + 9$ au point $(3, -6)$.

SOLUTION La dérivée de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ au nombre a est, suite à l'exemple 1, $f'(a) = 2a - 8$. Par conséquent, la pente de la tangente en $(3, -6)$ vaut $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Une équation de la droite tangente, que vous pouvez voir sur la figure 2, est

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad y = -2x.$$

EXEMPLE 3 ■ Pour la fonction $f(x) = 2^x$, estimez la valeur de $f'(0)$ de deux façons différentes :

a) En utilisant la définition 2 et en prenant des valeurs de plus en plus petites de h.
b) En interprétant $f'(0)$ comme la pente de la tangente et en regardant de très près le graphique de $y = 2^x$ tracé avec un logiciel.

SOLUTION

a) Selon la définition 2, on a

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h}.$$

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$
0,1	0,718
0,01	0,696
0,001	0,693
0,0001	0,693
−0,1	0,670
−0,01	0,691
−0,001	0,693
−0,0001	0,693

N'étant pas encore capable de calculer une telle limite exactement, nous nous servons d'une calculatrice pour obtenir des valeurs de $(2^h - 1)/h$.

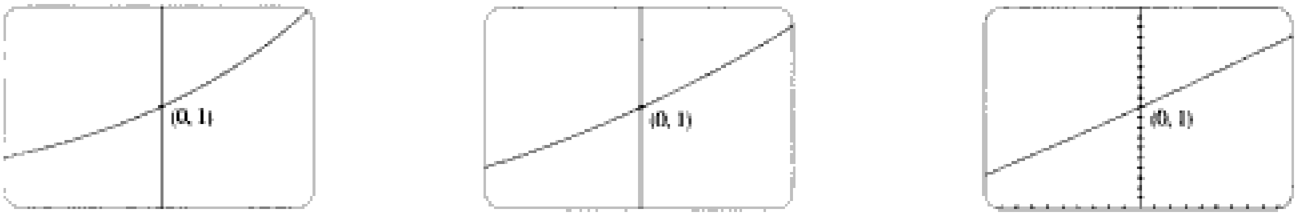
D'après la table, nous observons que numériquement ces valeurs s'approchent d'un nombre aux alentours de 0,69 lorsque h devient proche de 0. Notre estimation de la dérivée est donc

$$f'(0) \approx 0{,}69.$$

b) La figure 3 montre trois vues de plus en plus rapprochées du point $(0, 1)$ sur la courbe $y = 2^x$. Plus on s'approche de $(0, 1)$, plus la courbe se confond avec sa tangente au point que sur la figure 3 c), elle ne s'en distingue plus. L'échelle sur chacun des axes étant de 0,01, nous estimons la pente de la tangente à

$$\frac{0{,}14}{0{,}2} = 0{,}7.$$

Telle est notre estimation de $f'(0)$. À la section 3.5, nous montrerons que $f'(0) \approx 0{,}693147$, avec 6 décimales correctes.



(a) $[-1, 1]$ sur $[0, 2]$ (b) $[-0{,}5; 0{,}5]$ sur $[0{,}5; 1{,}5]$ (c) $[-0{,}1; 0{,}1]$ sur $[0{,}9; 1{,}1]$

FIGURE 3
Vues de plus en plus rapprochées du graphique de $y = 2^x$ aux alentours du point $(0, 1)$

■ Interprétation de la dérivée comme taux de variation

À la section 2.6, nous avons défini le taux de variation instantané de $y = f(x)$ par rapport à x en $x = x_1$ comme la limite des taux moyens de variation sur des intervalles de plus en plus petits.

Si l'intervalle est $[x_1, x_2]$, la variation de x est $\Delta x = x_2 - x_1$, et la variation de y correspondante

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Et

4 $$\text{le taux de variation instantané} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Par comparaison avec l'équation 3, nous reconnaissons en cette limite la dérivée de f en x_1, à savoir $f'(x_1)$. Ce qui fournit une deuxième interprétation de la dérivée :

> La dérivée $f'(a)$ est le taux de variation instantané de $y = f(x)$ par rapport à x quand $x = a$.

Pour que ces deux interprétations se rejoignent, nous dessinons la courbe $y = f(x)$ et observons que le taux de variation instantané est la pente de la tangente à

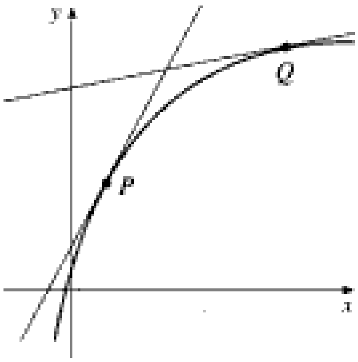


FIGURE 4
Les valeurs de y changent rapidement en P et lentement en Q.

cette courbe au point où $x = a$. Plus explicitement encore, quand la dérivée est grande (et la courbe forcément très raide, comme au point P dans la figure 4), les valeurs de y changent très vite. Par contre, quand la dérivée est faible, la courbe est relativement aplatie et les valeurs de y changent doucement.

Dans le cas particulier où $s = f(t)$ représente le mouvement d'un mobile le long d'une ligne droite, alors $f'(a)$ est le taux de variation de l'espace parcouru s par rapport au temps t. En d'autres mots, $f'(a)$ *représente la vitesse du mobile à l'instant* $t = a$ (voyez la section 2.6).

EXEMPLE 4 ■ La position d'un mobile est donnée par l'équation du mouvement $s = f(t) = 1/(1 + t)$, où t est mesuré en secondes et s en mètres. Calculez la vitesse après 2 secondes.

SOLUTION La dérivée de f quand $t = 2$ vaut

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+(2+h)}-\dfrac{1}{1+2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{3+h}-\dfrac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{3(3+h)h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{3(3+h)} = -\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Après 2 s, la vitesse vaut $f'(2) = -\frac{1}{9}$ m/s.

EXEMPLE 5 ■ Une usine fabrique des rouleaux de tissu. Le coût de production de x mètres de ce tissu est donné par $C = f(x)$ euros.

a) Que signifie la dérivée $f'(x)$? En quelles unités s'exprime-t-elle?

b) Que signifie concrètement $f'(1000) = 9$?

c) À votre avis, lequel des deux nombres $f'(50)$ ou $f'(500)$ est le plus grand? Qu'en est-il de $f'(5000)$?

SOLUTION

a) La dérivée $f'(x)$ représente le taux de variation instantané de C par rapport à x, autrement dit $f'(x)$ exprime le taux de variation du coût de production par rapport au nombre de mètres fabriqués (Les économistes appellent ce taux de variation *le coût marginal*. Cette notion est étudiée plus en détail aux sections 3.3 et 4.7).

Comme

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x},$$

les unités en lesquelles s'exprime $f'(x)$ sont les mêmes que celles du quotient des différences $\Delta C/\Delta x$. Puisque ΔC sont des euros et Δx, des mètres, les unités de $f'(x)$ sont des euros par mètre.

b) L'égalité $f'(1000) = 9$ signifie qu'une fois 1000 mètres de tissu fabriqués, le coût de production augmente à la vitesse de 9 euros/mètre. (Quand $x = 1000$, C augmente 9 fois plus vite que x.)

Comme $\Delta x = 1$ est petit comparé à $x = 1000$, on peut se servir de l'approximation

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

et dire que le coût de fabrication du 1000^e mètre (ou du 1001^e) est d'environ 9 euros.

c) Le taux auquel le coût de production croît (par mètre) est probablement inférieur quand $x = 500$ que quand $x = 50$ (le coût de fabrication du 500^e mètre est moindre que celui du 50^e) à cause des économies d'échelle. (Le fabricant rentabilise mieux les coûts de production fixes.) Ainsi,

$$f'(50) > f'(500).$$

Mais, lorsque la production augmente, l'effet de grande échelle peut devenir inopérant et des coûts supplémentaires peuvent intervenir. Il se peut donc que le taux d'accroissement des coûts se mette en fin de compte à croître. Il n'est donc pas impossible que

$$f'(5000) > f'(500).$$

L'exemple suivant montre comment estimer la dérivée d'une fonction qui n'est pas définie par une formule, mais par une table de valeurs.

t	$P(t)$
1984	236 370 000
1986	240 680 000
1988	245 057 000
1990	249 975 000
1992	255 020 000

EXEMPLE 6 ■ La population des États-Unis au temps t est désignée par $P(t)$. La table ci-contre donne des valeurs approximatives de cette fonction issues des estimations de la population à la mi-année. Interprétez et estimez la valeur de $P'(1988)$.

SOLUTION La dérivée $P'(1988)$ représente le taux de variation de P par rapport à t quand $t = 1988$, ou le taux d'accroissement de la population en 1988.

Selon l'équation 3,

$$P'(1988) = \lim_{t \to 1988} \frac{P(t) - P(1988)}{t - 1988}.$$

Nous calculons donc les taux moyens de variation et en faisons une table :

t	$\dfrac{P(t) - P(1988)}{t - 1988}$
1984	2 171 750
1986	2 188 500
1990	2 459 000
1992	2 490 750

On pourrait aussi reporter les valeurs de la fonction dans un système d'axes et estimer graphiquement la pente de la tangente en $t = 1988$ (voyez l'exemple 4 à la section 2.6).

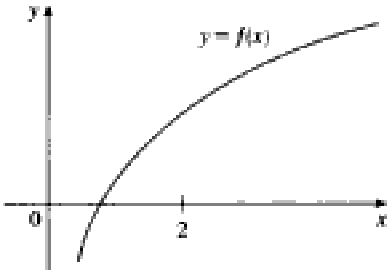
De cette table, il ressort que $P'(1988)$ se situe quelque part entre 2 188 500 et 2 459 000. Nous estimons que le taux d'accroissement de la population des États-Unis en 1988 était la moyenne de ces deux nombres, à savoir

$$P'(1988) \approx 2{,}3 \text{ millions de personnes/an.}$$

2.7 Exercices

1. Sur le graphique de f, indiquez les longueurs qui représentent $f(2)$, $f(2+h)$, $f(2+h)-f(2)$ et h (choisissez $h>0$).

   Quelle est la droite dont la pente est égale à $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$?

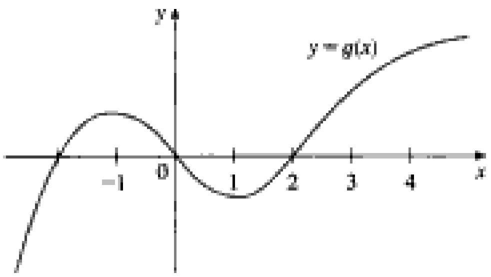


2. Pour la fonction f dont le graphique est représenté à l'exercice 1, ordonnez de façon croissante les nombres suivants et expliquez votre raisonnement :

   $$0, \quad f'(2), \quad f(3)-f(2), \quad \frac{1}{2}[f(4)-f(2)].$$

3. Pour la fonction g dont le graphique est donné, placez en ordre croissant les nombres suivants et expliquez votre raisonnement :

   $$0, \quad g'(-2), \quad g'(0), \quad g'(2), \quad g'(4).$$



4. Si la tangente à $y=f(x)$ en $(4,3)$ passe par le point $(0,2)$, calculez $f(4)$ et $f'(4)$.

5. Tracez la courbe représentative d'une fontion f telle que $f(0)=0$, $f'(0)=3$, $f'(1)=0$ et $f'(2)=-1$.

6. Tracez la courbe représentative d'une fontion g telle que $g(0)=0$, $g'(0)=3$, $g'(1)=0$ et $g'(2)=1$.

7. Si $f(x)=3x^2-5x$, calculez $f'(2)$ et utilisez cette valeur pour écrire l'équation de la tangente à la parabole $y=3x^2-5x$ au point $(2,2)$.

8. Si $g(x)=1-x^3$, calculez $g'(0)$ et utilisez cette valeur pour écrire l'équation de la tangente à la courbe $y=1-x^3$ au point $(0,1)$.

9. a) Si $F(x)=x^3-5x+1$, calculez $F'(1)$ et utilisez cette valeur pour écrire l'équation de la tangente à la courbe $y=x^3-5x+1$ au point $(1,-3)$.

   b) Illustrez la partie a) en dessinant la courbe et sa tangente dans la même fenêtre.

10. a) Si $G(x)=x/(1+2x)$, calculez $G'(a)$ et utilisez cette valeur pour écrire l'équation de la tangente à la courbe $y=x/(1+2x)$ au point $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$.

    b) Illustrez la partie a) en dessinant la courbe et sa tangente sur le même écran.

11. Soit $f(x)=3^x$. Estimez la valeur de $f'(1)$ de deux façons :

    a) en utilisant la définition 2 et en prenant des valeurs de plus en plus petites de h ;

    b) en zoomant sur le graphique de $y=3^x$ et en estimant la pente.

12. Soit $g(x)=\operatorname{tg} x$. Estimez la valeur de $g'(\pi/4)$ de deux manières :

    a) en utilisant la définition 2 et en prenant des valeurs de plus en plus petites de h ;

    b) en zoomant sur le graphique de $y=\operatorname{tg} x$ et en estimant la pente.

13-16 ■ Calculez $f'(a)$.

13. $f(x)=1+x-2x^2$

14. $f(x)=x^3+3x$

15. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

16. $f(x)=\sqrt{x-1}$

17-22 ■ Chaque limite est la valeur de la dérivée d'une certaine fonction f en un certain point a. Déterminez f et a dans chaque cas.

17. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

18. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x-1}$

20. $\displaystyle\lim_{x\to 3\pi}\frac{\cos x+1}{x-3\pi}$

21. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-1}{t}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$

23-24 ■ Une particule se meut en ligne droite selon une équation du mouvement $s = f(t)$, où s est mesuré en mètres et t en secondes. Calculez la vitesse en $t = 2$.

23. $f(t) = t^2 - 6t - 5$

24. $f(t) = 2t^3 - t + 1$

25. Le coût de production de x g d'or dans une nouvelle mine revient à $C = f(x)$ euros.
a) Quelle est l'interprétation de $f'(x)$? En quelles unités s'exprime $f'(x)$?
b) Que signifie l'équation $f'(800) = 17$?
c) Pensez-vous que la valeur de $f'(x)$ va croître ou décroître à court terme ? Et à long terme ? Expliquez.

26. Le nombre de bactéries après t heures dans une expérience contrôlée est donné par $n = f(t)$.
a) Quelle est la signification de $f'(5)$? En quelles unités s'exprime $f'(5)$?
b) Si la quantité de nourriture et d'espace n'est pas limitée, lequel des deux nombres $f'(5)$ ou $f'(10)$ est le plus grand ? Si par contre, la quantité de nourriture est limitée, la réponse change-t-elle ? Expliquez.

27. La consommation en litres de carburant d'une voiture qui roule à la vitesse v km/h est exprimée par $c = f(v)$.
a) Que signifie la dérivée $f'(v)$? En quelles unités s'exprime $f'(v)$?
b) Écrivez une phrase (en termes de tous les jours) qui explique la signification de l'équation $f'(32) = -0{,}2$.

28. La quantité (en mètres) d'un certain tissu vendu par le fabricant à p euros le mètre est donnée par $Q = f(p)$.
a) Que signifie $f'(16)$? En quelles unités s'exprime $f'(16)$?
b) Est-ce que $f'(16)$ est un nombre positif ou négatif ? Expliquez.

29. Soit $C(t)$ le prix du café en grains sur le marché des biens au moment t. La table reprend les valeurs de $C(t)$ en euros par kg. (Les prix ont été ajustés compte tenu de l'inflation et sont exprimés en monnaie constante de 1999.) Donnez une interprétation aux valeurs $C'(1983)$ et $C'(1990)$.

t	1981	1982	1983	1984	1985	1986
$C(t)$	2,88	2,44	3,05	3,52	3,29	2,56

t	1987	1988	1989	1990	1991	1992
$C(t)$	2,24	1,66	1,31	1,27	1,18	1,03

30. L'espérance de vie a crû de façon spectaculaire au cours de ce siècle. La table donne l'espérance de vie $E(t)$ à la naissance (en années) d'un enfant mâle né aux États-Unis au cours de l'année t. Interprétez et estimez les valeurs $E'(1910)$ et $E'(1950)$

t	1900	1910	1920	1930	1940
$E(t)$	48,3	51,1	55,2	57,4	62,5

t	1950	1960	1970	1980	1990
$E(t)$	65,6	66,6	67,1	70,0	71,8

31-32 ■ Dites si $f'(0)$ existe ou non.

31. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Sujet de rédaction

Les premières méthodes de recherche de tangente

C'est Isaac Newton qui le premier en 1660 formula explicitement les notions de limites et de dérivées. Mais Newton confessait lui-même « Si j'ai vu plus loin que d'autres, c'est parce que je me suis appuyé sur les épaules de géants ». Deux de ces géants ne sont autre que Pierre de Fermat (1601-1665) et le professeur de Newton à Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton connaissait bien les méthodes que ces deux maîtres utilisaient pour déterminer des tangentes et leurs méthodes ont joué un grand rôle dans la formulation finale que Newton donna au calcul différentiel et intégral.

Les références ci-après contiennent la description de ces méthodes. Lisez-en l'une ou l'autre et rédigez un compte-rendu qui compare les méthodes de Fermat ou Barrow à celles d'aujourd'hui. En particulier, employez la méthode de la section 2.7 pour trouver la tangente à la courbe $y = x^3 + 2x$ au point $(1, 3)$ et montrez comment Fermat ou Barrow aurait procédé pour résoudre ce problème. Bien que vous calculiez des dérivées et eux pas, faites ressortir les similitudes entre les méthodes.

1. Carl Boyer and Uta Merzbach, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley, 1989, p. 389, 432.
2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer-Verlag, 1979, p. 124, 132.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6ᵉ éd., New York, Saunders, 1990, p. 391, 395.
4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972, p. 344, 346.

2.8 La dérivée comme fonction

Précédemment, nous avons envisagé la dérivée d'une fonction en un nombre fixé a :

1
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

À partir d'ici, nous changeons notre point de vue et considérons que le nombre a est variable. C'est pourquoi nous remplaçons a par x dans l'équation 1, pour obtenir

2
$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

À tout nombre x pour lequel la limite existe, nous faisons correspondre le nombre $f'(x)$ et de cette façon, nous considérons f' comme une nouvelle fonction, appelée **la dérivée de** f et définie par l'expression 2. Nous savons déjà que la valeur de f' en x, $f'(x)$, peut être interprétée géométriquement comme la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x, f(x))$.

La fonction f' est appelée fonction dérivée de f parce qu'elle a été « dérivée » de f par la prise de limite indiquée dans l'équation 2. Le domaine de définition de f' est l'ensemble $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ et peut être plus petit que celui de f.

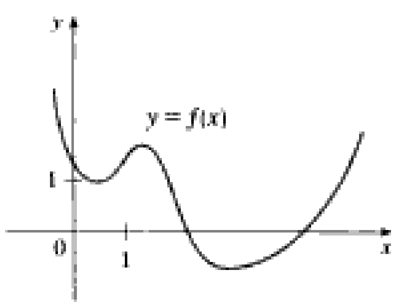


FIGURE 1

EXEMPLE 1 ■ À partir de la courbe représentative d'une fonction f, tracer celle de la fonction dérivée f'.

SOLUTION Si, en un point $(x, f(x))$ quelconque, on trace la tangente à la courbe et on en estime la pente, on dispose d'une valeur de la fonction dérivée en ce point. On choisit par exemple $x = 5$ et on dessine la tangente en P [figure 2 (a)]. On estime la pente de cette tangente à environ $3/2$, ce qui donne $f'(5) \approx 1{,}5$ et on peut reporter le point $(5; 1{,}5)$ du graphique de f' juste en bas de P. Réitérant cette procédure pour plusieurs points, on obtient petit à petit le graphique de la figure 2 (b). On remarque que les tangentes en A, B et C sont horizontales, de sorte que la dérivée y est nulle et que la courbe représentative de f' y traverse l'axe Ox, en A', B' et C', situés en contrebas de A, B et C. Entre A et B, les tangentes ont une pente positive de sorte que les valeurs de $f'(x)$ y sont positives, tandis que entre B et C les tangentes ont une pente négative et les valeurs de $f'(x)$ y sont négatives.

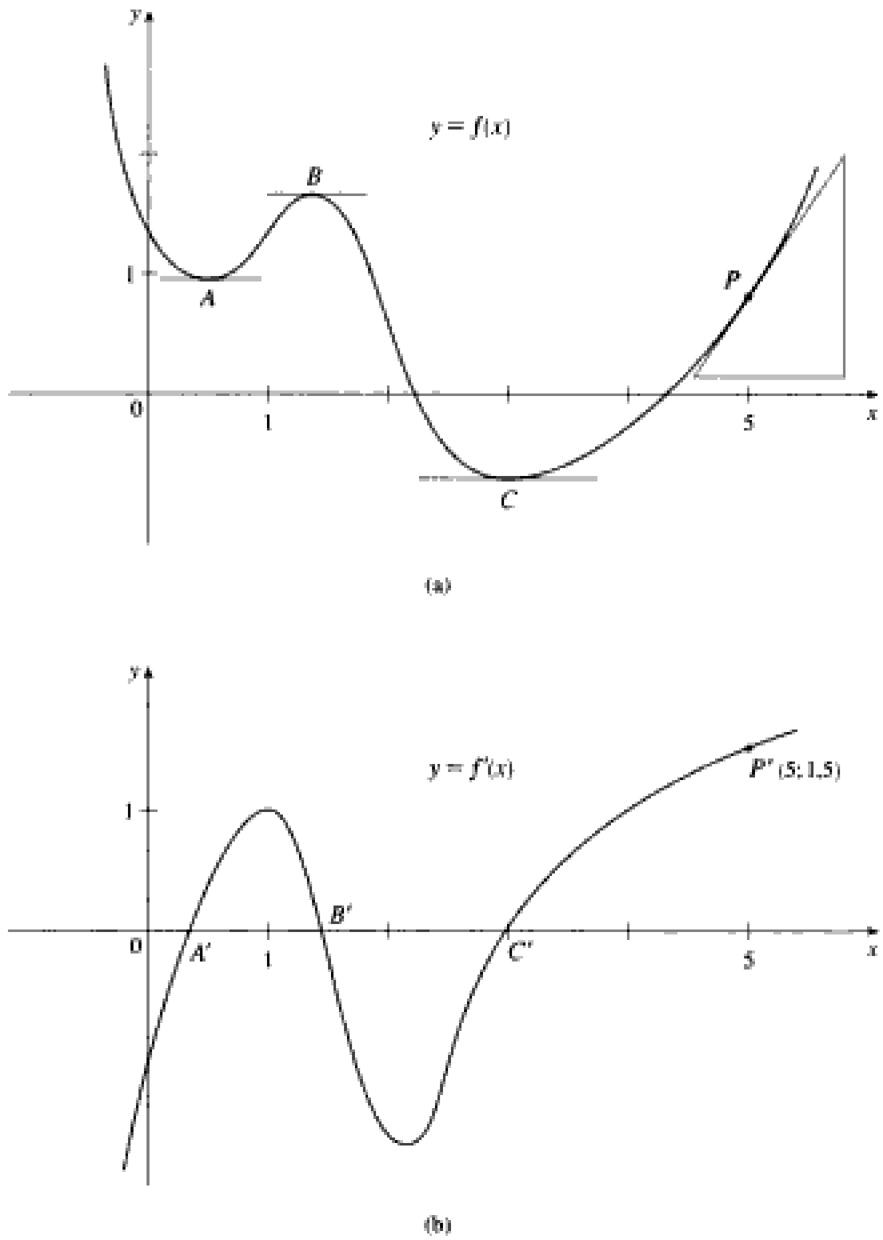


FIGURE 2

Dans le cas où la fonction est définie par une table de valeurs, on peut construire une table de valeurs approximatives de sa dérivée comme dans l'exemple suivant.

t	$I(t)$
1983	8,62
1984	9,57
1985	7,49
1986	5,97
1987	5,83
1988	6,67
1989	8,11
1990	7,51
1991	5,41
1992	3,46

EXEMPLE 2 ■ Le taux d'intérêt des bons d'État est une fonction du temps. La table ci-contre donne une valeur moyenne de ce taux d'intérêt $I(t)$ pour une période de 9 années (en pour cent par an). Construisez une table de valeurs de la dérivée de cette fonction.

SOLUTION On fait l'hypothèse qu'entre les valeurs fournies le taux d'intérêt n'a pas subi de fluctuations violentes. On cherche pour commencer $I'(1990)$, le taux de variation du taux d'intérêt en 1990. Comme

$$I'(1990) = \lim_{h \to 0} \frac{I(1990 + h) - I(1990)}{h},$$

on a

$$I'(1990) \approx \frac{I(1990 + h) - I(1990)}{h}$$

pour de petites valeurs de h.

Quand $h = 1$, on a

$$I'(1990) \approx \frac{I(1991) - I(1990)}{1} = 5{,}41 - 7{,}51 = -2{,}10.$$

(Ceci est le taux moyen de variation entre 1990 et 1991.) Quand $h = -1$, on a

$$I'(1990) \approx \frac{I(1989) - I(1990)}{-1} = -(8{,}11 - 7{,}51) = -0{,}60,$$

qui est le taux moyen de variation entre 1989 et 1990. On atteint une meilleure approximation en prenant la moyenne de ces deux taux :

$$I'(1990) \approx \frac{1}{2}(-2{,}10 - 0{,}60) = -1{,}35.$$

Ainsi donc, le taux d'intérêt des bons d'État a diminué en 1990 à la vitesse de 1,35 % par an.

On fait les mêmes calculs pour d'autres valeurs (sauf aux extrémités) et on obtient une table de valeurs approximatives de la dérivée.

t	$I'(t)$
1983	0,95
1984	−0,565
1985	−1,80
1986	−0,83
1987	0,35
1988	1,14
1989	0,42
1990	−1,35
1991	−2,025
1992	−1,95

La figure 3 illustre l'exemple 2 par les graphiques du taux des bons d'État $I(t)$ et de sa dérivée $I'(t)$.

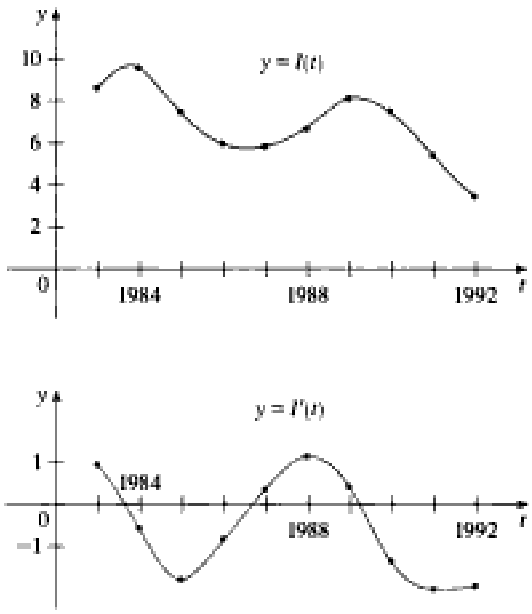


FIGURE 3

EXEMPLE 3 ■

a) Cherchez une formule pour $f'(x)$, étant donné que f est définie par $f(x) = x^3 - x$.

b) Comparez graphiquement f et f'.

SOLUTION

a) Lors du calcul d'une dérivée par la formule 2, il faut se souvenir que la variable est h et que momentanément, x est considérée comme une constante pendant le passage à la limite.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)^3-(x+h)]-[x^3-x]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-1) = 3x^2-1 \end{aligned}$$

b) Les dessins de f et f' dans la figure 4 sont produits par un logiciel. On remarque que $f'(x) = 0$ là où les tangentes à f sont horizontales, et que $f'(x)$ est positive là où les pentes des tangentes sont positives. Ces graphiques viennent conforter les résultats de la partie a). ■

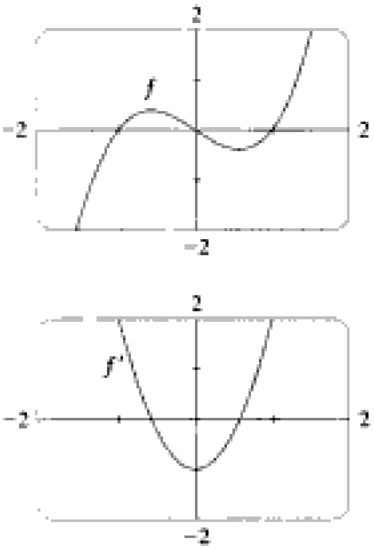


FIGURE 4

EXEMPLE 4 ■ Déterminez la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$. Recherchez son domaine de définition.

SOLUTION

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Ici nous rendons le dénominateur rationnel.

On voit que $f'(x)$ n'est calculable que lorsque $x > 0$. Le domaine de définition de f' est donc $]0, +\infty[$. Ce dernier n'est qu'une partie de celui de f qui était $[0, +\infty[$. ■

Vérifions si le résultat de l'exemple 4 est plausible. Quand x est proche de 0, $\sqrt{x}$ est aussi proche de 0 et $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ est très grand. Cela correspond bien aux tangentes très raides à proximité de 0 dans la figure 5 (a). Quand x est grand, $f'(x)$ est très petit, ce qui correspond bien aussi aux tangentes de plus en plus aplaties vers l'extrémité droite de la courbe de $\sqrt{x}$. La figure 5 (b) montre le graphique de $y' = f'(x)$. Notez le lien entre les graphiques de f et f'.

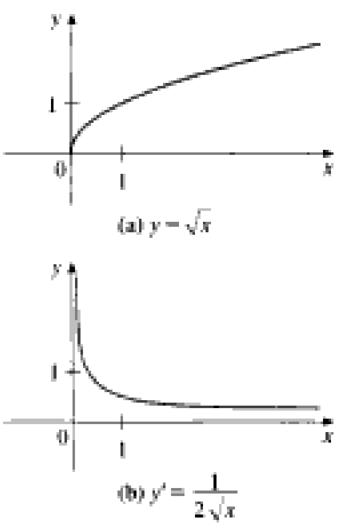


FIGURE 5

■ D'autres notations

Si $y = f(x)$ est la notation traditionnelle pour indiquer que x est la variable indépendante et y la variable dépendante, voici quelques autres notations d'usage courant pour désigner la dérivée :

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

Les symboles D et d/dx sont appelés des *opérateurs de dérivation* parce qu'ils indiquent l'opération à effectuer pour calculer une dérivée.

Le symbole dy/dx, qui fut introduit par Leibniz, ne doit pas être vu comme un quotient (pour le moment) ; il est seulement synonyme de $f'(x)$. Néanmoins, c'est une notation très utile et très suggestive, surtout quand elle est employée conjointement avec la notation d'incréments. Reprenant l'équation 4 à la section 2.7, nous pouvons récrire la définition de la dérivée avec la notation de Leibniz sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Si nous désirons indiquer la valeur de la dérivée dy/dx, écrite en notation de Leibniz, en une valeur particulière a, nous écrirons

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{ou} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

qui est synonyme de $f'(a)$.

Gottfried Wilhem Leibniz est né à Leipzig en 1646 et a fait des études de droit, de théologie et de mathématiques à l'université de cette ville où il s'est diplômé à l'âge de 17 ans. Docteur en droit à 20 ans il embrasse la carrière diplomatique et passe la plupart de son temps à accomplir des missions politiques dans les capitales européennes. En particulier il intervient pour écarter un complot militaire français contre l'Allemagne et tente de réconcilier les églises catholique et protestante.

Son étude sérieuse des mathématiques ne commence qu'en 1672 lors d'une mission diplomatique à Paris. Il y met au point une machine à calculer et y rencontre des scientifiques, tel Huygens, qui attire son attention sur les derniers développements en mathématiques et en science. Leibniz cherche à développer une logique symbolique et un système de notation qui simplifierait le raisonnement logique. Plus particulièrement, la version du calcul infinitésimal qu'il publie en 1684 établit la notation et les règles de calcul des dérivées que nous utilisons aujourd'hui.

Malheureusement, une affreuse dispute de préséance éclate vers les années 1690 entre les disciples de Newton et ceux de Leibniz à propos de qui a inventé en premier le calcul infinitésimal. Leibniz fut même accusé de plagiat par les membres de la société royale anglaise. La vérité est que chacun inventa de son côté le calcul infinitésimal. Newton parvint à sa version le premier, mais par peur des polémiques, il ne la publia pas immédiatement. C'est ainsi que le compte rendu de Leibniz de 1684 à propos du calcul infinitésimal fut le premier à être publié.

3 Définition Une fonction est **dérivable en a** si $f'(a)$ existe. Elle est **dérivable sur un intervalle ouvert** $]a, b[$ [ou $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, +\infty[$ si elle est dérivable en tout nombre de cet intervalle.

EXEMPLE 5 ■ Où la fonction $f(x) = |x|$ est-elle dérivable ?

SOLUTION Quand $x > 0$, alors $|x| = x$ et h peut être choisi suffisamment petit pour que $x + h > 0$ et de là $|x + h| = x + h$. Par conséquent, pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

De ce fait, f est dérivable quel que soit x strictement positif.

De même, quand $x < 0$, on a $|x| = -x$ et h peut être choisi suffisamment petit pour que $x + h < 0$ et de là $|x + h| = -(x + h)$. Par conséquent, pour $x < 0$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0}(-1) = -1. \end{aligned}$$

De ce fait, f est dérivable quel que soit x strictement négatif.

Quand $x = 0$, on doit étudier

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \qquad \text{(si elle existe.)}$$

On calcule séparément les limites à droite et à gauche :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1,$$

et

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1.$$

Vu que ces limites sont différentes, $f'(0)$ n'existe pas. En conclusion, f est dérivable partout, sauf en 0.

En formule, f' est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et son graphique est présenté à la figure 6 (b). Que $f'(0)$ n'existe pas se voit géométriquement au fait que la courbe $y = |x|$ n'admet pas de tangente en $(0, 0)$ [voyez figure 6 (a)].

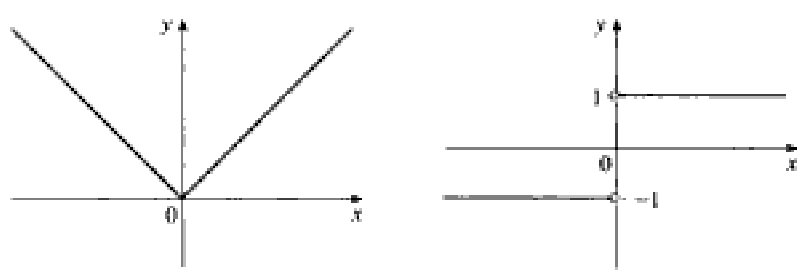


FIGURE 6 (a) $y = f(x) = |x|$ (b) $y = f'(x)$

Être continue et être dérivable sont des propriétés qu'on souhaite qu'une fonction possède. Le théorème que voici établit comment ces propriétés sont liées.

4 Théorème Si f est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration Démontrer que f est continue en a revient à démontrer que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou encore que $\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$.

La seule information connue est que f est dérivable en a, c'est-à-dire que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe (voyez l'équation 3 dans la section 2.7). Afin de relier ce qui est donné à ce qu'il faut démontrer, nous divisons et multiplions $f(x) - f(a)$ par $x - a$ (ce qui est permis lorsque $x \neq a$) :

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Ensuite, grâce à la loi du produit et à l'équation 3, nous avons successivement

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) \\
&= f'(a) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Afin d'employer ce que nous venons juste de démontrer, nous partons de $f(x)$ et nous ajoutons et retranchons $f(a)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} [f(a) + f(x) - f(a)] \\
&= \lim_{x \to a} f(a) + \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] \\
&= f(a) + 0 = f(a).
\end{aligned}$$

En conclusion, f est continue en a.

REMARQUE • La réciproque du théorème 4 est fausse ; c'est-à-dire, il y a des fonctions qui sont continues et qui ne sont pas dérivables. La fonction $f(x) = |x|$ en est un exemple puisqu'elle est continue en 0,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0),$$

(voyez l'exemple 7 dans la section 2.3). Mais, comme nous l'avons démontré à l'exemple 5, elle n'est pas dérivable en 0.

■ Quelques raisons pour une fonction de ne pas être dérivable ?

Nous avons vu, à l'exemple 5, que la fonction $y = |x|$ n'était pas dérivable en 0. De façon plus générale, dès que la courbe représentative d'une fonction présente des « coins » ou des « entortillements », en ces points-là, elle n'a pas de tangente et la fonction n'est pas dérivable. (Lorsqu'on essaie de calculer $f'(a)$, on trouve que les limites à droite et à gauche diffèrent.)

Le théorème 4 révèle une autre raison pour laquelle une fonction n'est pas dérivable. Il dit en effet que si une fonction n'est pas continue en a, elle n'est pas dérivable en a. D'où, une fonction n'est pas dérivable en un point de discontinuité (une discontinuité par saut, par exemple).

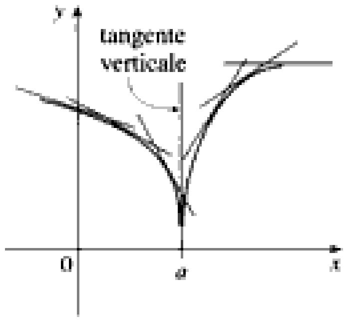


FIGURE 7

Une troisième possibilité est que la courbe ait une **tangente verticale** en $x = a$, en d'autres mots, f est continue en a et

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty.$$

Graphiquement, cela veut dire que la tangente se dresse de plus en plus lorsque x s'approche de a. La figure 7 illustre un cas de ce qui peut se produire ; la figure 8 (c) en montre un autre. Les trois possibilités que nous avons envisagées sont illustrées dans la figure 8.

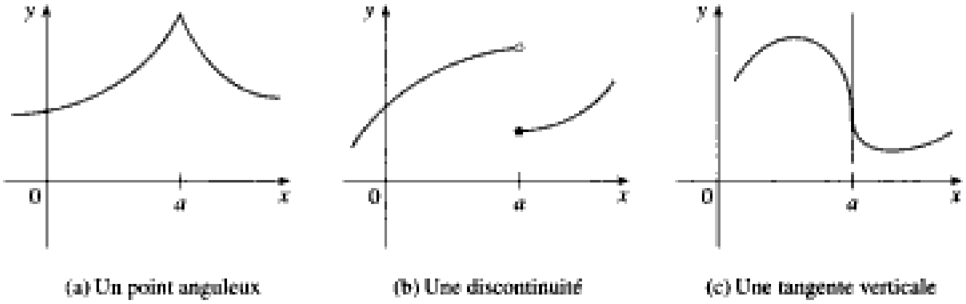


FIGURE 8
Trois raisons qui font que f n'est pas dérivable en a

Si on dispose d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur on peut se rendre compte de la dérivabilité d'une autre façon. Si une fonction est dérivable en un point a, le tronçon de courbe qui passe par le point $(a, f(a))$ apparaît de plus en plus rectiligne à mesure qu'on le regarde de plus près (voyez la figure 9). Nous avons commenté de ce point de vue l'exemple 3 à la section 2.7. Par contre, d'aussi près que l'on regarde un point comme ceux des figures 7 et 8 (a), la pointe ou l'angle ne disparaît pas (voyez la figure 10).

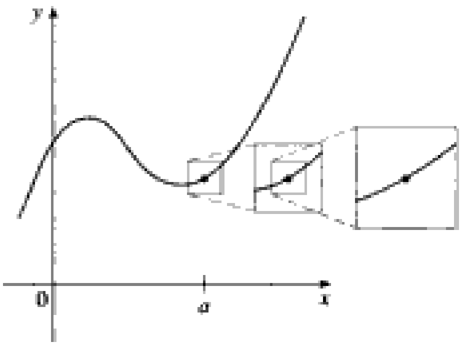


FIGURE 9
f est dérivable en a

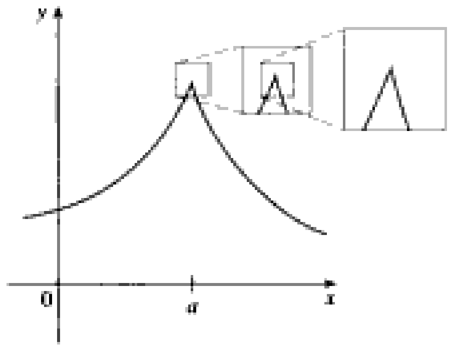


FIGURE 10
f n'est pas dérivable en a

■ La dérivée seconde

Étant donné une fonction dérivable f, sa dérivée f' est aussi une fonction et peut, à son tour, avoir une dérivée, notée $(f')' = f''$. Cette nouvelle fonction f'' est appelée la **dérivée seconde** de f parce qu'elle est la dérivée de la dérivée de f. Avec la notation de Leibniz, la dérivée seconde de $y = f(x)$ s'écrit

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

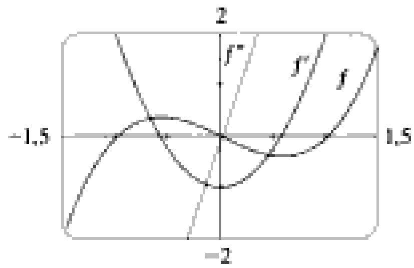


FIGURE 11

EXEMPLE 6 ■ Soit $f(x) = x^3 - x$. Cherchez une formule pour $f''(x)$ et interprétez cette fonction.

SOLUTION Nous avons déjà calculé, à l'exemple 3, la première dérivée, à savoir la fonction $f'(x) = 3x^2 - 1$. Par définition, la deuxième dérivée s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

La figure 11 nous met sous les yeux les graphiques de f, f' et f''.

Nous pouvons interpréter $f''(x)$ comme la pente de la courbe $y = f'(x)$ au point $(x, f'(x))$. En d'autres mots, $f''(x)$ donne le taux de variation de la pente de la fonction d'origine, $y = f(x)$.

Remarquez sur la figure que $f''(x)$ est négative quand la pente de $f'(x)$ est négative, et positive quand la pente de $y = f'(x)$ est positive. Les graphiques viennent confirmer les résultats obtenus par calculs.

En règle générale, une dérivée seconde est vue comme un taux de variation d'un taux de variation. L'exemple le plus commun est l'*accélération* que nous définissons ainsi.

Soit $s = s(t)$ la fonction position d'un mobile qui se déplace en ligne droite. La première dérivée représente la vitesse $v(t)$ du mobile en fonction du temps :

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Le taux de variation instantané de la vitesse par rapport au temps est appelé l'**accélération** $a(t)$ du mobile. Ainsi, la fonction accélération est la dérivée de la fonction vitesse et de là la dérivée seconde de la fonction position :

$$a(t) = v'(t) = s''(t),$$

ou, avec la notation de Leibniz,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

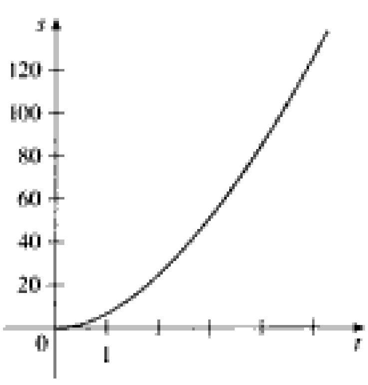


FIGURE 12
Fonction position de la voiture

EXEMPLE 7 ■ Une voiture se met en route à l'instant $t = 0$ et son mouvement est décrit par le graphique de la figure 12 sur lequel s est mesuré en mètres et t en secondes. Construisez le graphique de la vitesse et celui de l'accélération de la voiture. Quelle est son accélération après 2 secondes ?

SOLUTION En mesurant la pente de la courbe $s = f(t)$ en $t = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 et en reportant ces mesures, comme à l'exemple 1, on obtient le graphique de la fonction

$v = f'(t)$ à la figure 13. L'accélération quand $t = 2$ s est $a = f''(2)$, la pente de la tangente au graphique de f' quand $t = 2$. On estime cette pente à

Les unités d'accélération sont des mètres par seconde par seconde, que l'on note m/s^2.

$$a(2) = f''(2) = v'(2) \approx \frac{27}{3} = 9 \text{ m/s}^2.$$

Des mesures analogues conduisent au graphique de la fonction accélération à la figure 14.

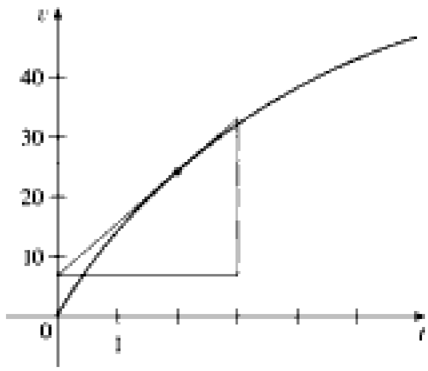


FIGURE 13
Fonction vitesse

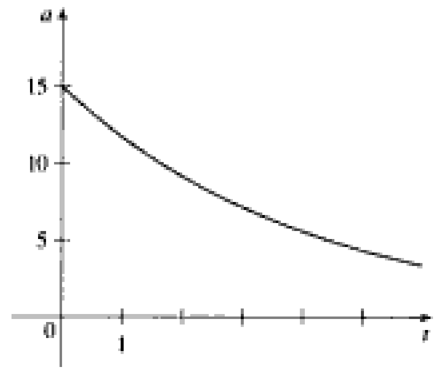


FIGURE 14
Fonction accélération

La *dérivée troisième* f''' est la dérivée de la dérivée seconde : $f''' = (f'')'$. Elle peut donc être interprétée comme la pente de la tangente à la courbe $y = f''(x)$ ou comme le taux de variation de $f''(x)$. Les autres notations de la dérivée troisième sont

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Le processus de dérivation peut encore être poursuivi. La dérivée quatrième f'''' est habituellement noté $f^{(4)}$. De manière générale, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est notée $f^{(n)}$ et s'obtient après n dérivations successives. On écrit aussi

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

EXEMPLE 8 ■ Quelles sont les dérivées troisième et quatrième de $f(x) = x^3 - x$?

SOLUTION L'exemple 6 nous a fait calculer $f''(x) = 6x$. La dérivée seconde est donc représentée par la droite d'équation $y = 6x$, de pente 6. Comme la dérivée troisième est la pente de $f''(x)$, on a

$$f'''(x) = 6,$$

quelle que soit la valeur de x. La fonction f''' est donc une fonction constante et son graphique est une droite horizontale. La pente de cette droite est nulle, c'est la dérivée quatrième

$$f^{(4)}(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x.$$

La dérivée troisième a une interprétation physique dans le cas où la fonction initiale $s = s(t)$ représente la position d'un mobile qui se déplace en ligne droite.

Comme $s''' = (s'')' = a'$, la dérivée troisième de la fonction position est la dérivée de l'accélération et porte le nom de **secousse** :

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}.$$

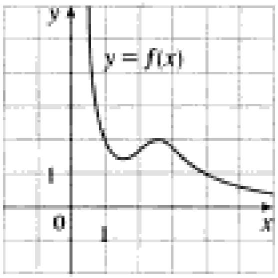
La secousse est donc le taux de variation de l'accélération. La dénomination est appropriée puisque en cas de forte variation de l'accélération, le mobile subit un mouvement brutal.

Nous avons vu une application des dérivées seconde et troisième dans le cadre du mouvement d'un objet où interviennent accélération et secousse. Nous examinerons une autre application des dérivées secondes à la section 2.10, au cours de laquelle nous montrerons comment la connaissance de f'' informe sur l'allure du graphique de f. À la section 8.9, nous verrons comment les dérivées secondes et d'ordres supérieurs nous permettent d'obtenir des approximations de fonctions plus précises que les approximations affines et aussi à représenter des fonctions sous la forme de somme de séries.

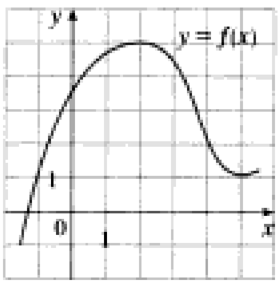
2.8 Exercices

1-2 ■ Servez-vous des graphiques pour estimer les valeurs de chaque dérivée. Dessinez ensuite le graphique de f'.

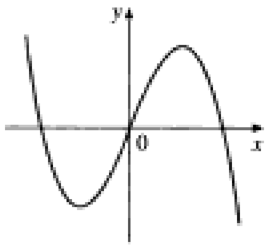
1. a) $f'(1)$ b) $f'(2)$
c) $f'(3)$ d) $f'(4)$

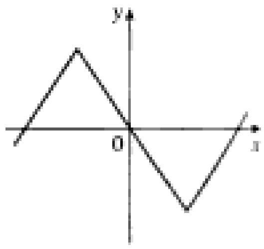


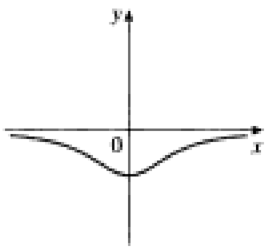
2. a) $f'(0)$ b) $f'(1)$
c) $f'(2)$ d) $f'(3)$
e) $f'(4)$ f) $f'(5)$

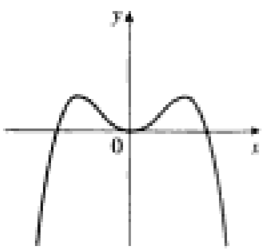


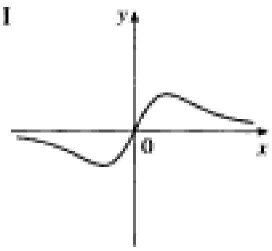
3. Apparier le graphique de chaque fonction a) - d) avec le graphique de sa dérivée I-IV. Donnez les raisons de votre choix.

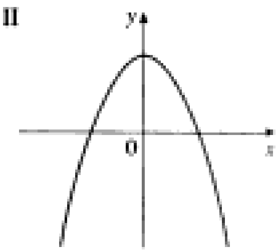
a)


b)


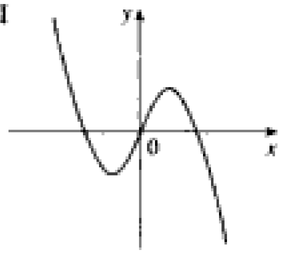
c)


d)


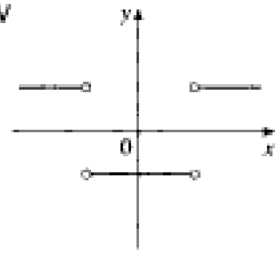
I


II


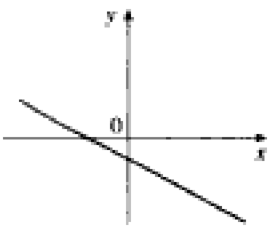
III

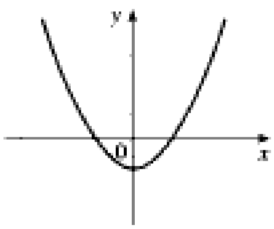


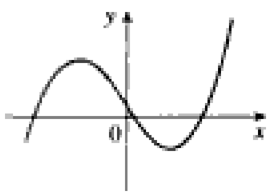
IV

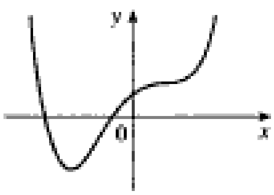


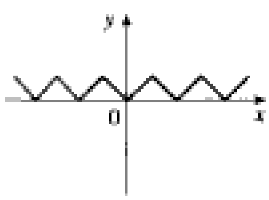
4-13 ■ Tracez ou copiez le graphique de la fonction f donnée. (On suppose que les échelles sont les mêmes sur les deux axes.) Appliquez la méthode de l'exemple 1 pour obtenir le graphique de f' en contrebas de f.

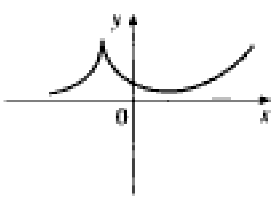


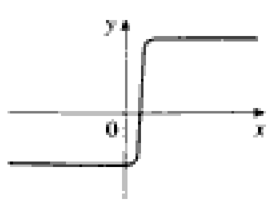


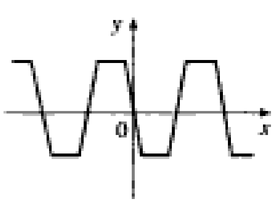


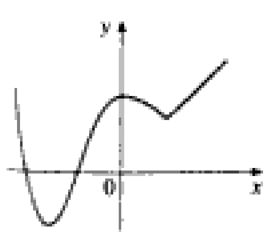


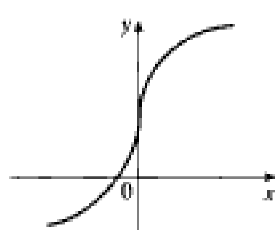












14-16 ■ De la même manière qu'aux exercices 4-13, faites soigneusement une esquisse des graphiques de f et f' l'un en dessous de l'autre. Pouvez-vous, au vu de la courbe obtenue, conjecturer une formule pour $f'(x)$?

14. $f(x) = \sin x$ **15.** $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

17. Soit $f(x) = x^2$.

a) Regardez de près le graphique de f et déduisez des estimations de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

b) Par symétrie, déduisez des valeurs de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ et $f'(-2)$.

c) Conjecturez une formule qui définit $f'(x)$ sur la base des résultats numériques des parties a) et b).

d) Calculez la formule de la fonction dérivée à partir de la définition pour vérifier que la conjecture de la partie c) est correcte.

18. Soit $f(x) = x^3$.

a) Regardez de près le graphique de f produit par votre outil graphique et déduisez des estimations de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

b) Par symétrie, déduisez des valeurs de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ $f'(-2)$ et $f'(-3)$.

c) Conjecturez une formule qui définit $f'(x)$ sur la base des résultats numériques des parties a) et b).

d) Calculez la formule de la fonction dérivée à partir de la définition pour vérifier que la conjecture de la partie c) est correcte.

19-23 ■ Calculez la formule de la fonction dérivée à partir de la définition. Précisez le domaine de définition de la fonction et de la fonction dérivée.

19. $f(x) = 5x + 3$ **20.** $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

21. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$ **22.** $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

23. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

24. a) Dessinez le graphique de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ à partir de celui de $y = \sqrt{x}$ en lui appliquant les opérations sur les graphiques de la section 1.2.

b) Prenez appui sur ce graphique pour obtenir celui de f'.

c) Calculez la formule de la fonction dérivée à partir de la définition. Quels sont les domaines de définition de f et f' ?

d) Utilisez un outil graphique pour tracer le graphique de f' et comparez avec celui que vous avez obtenu à la partie b).

25. a) Soit $f(x) = x - (2/x)$. Trouvez $f'(x)$.

b) Essayez de voir si votre réponse à la partie a) est possible en comparant les graphiques de f et f'.

26. a) Soit $f(t) = 6/(1 + t^2)$. Trouvez $f'(t)$.

b) Essayez de voir si votre réponse à la partie a) est possible en comparant les graphiques de f et f'.

27. Le taux de chômage $U(t)$ varie avec le temps. La table donne le pourcentage moyen du chômage aux U.S.A. entre 1983 et 1992.

t	1983	1984	1985	1986	1987
$U(t)$	9,5	7,4	7,1	6,9	6,1

t	1988	1989	1990	1991	1992
$U(t)$	5,4	5,2	5,4	6,6	7,3

a) Que signifie la dérivée $U'(t)$? En quelles unités s'exprime-t-elle ?

b) Construisez une table de valeurs de $U'(t)$.

28. Désignons par $S(t)$ la proportion d'élèves fumeurs des classes terminales au moment t. La table reprend cette proportion d'élèves qui reconnaissent avoir fumé dans les 30 jours précédents.

t	1977	1979	1981	1983	1985
$S(t)$	38	34	29	31	30

t	1987	1989	1991	1993
$S(t)$	29	28	27	30

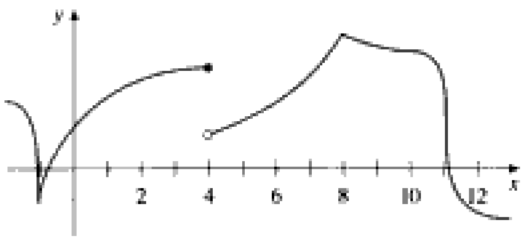
a) Que signifie la dérivée $S'(t)$? En quelles unités s'exprime-t-elle ?

b) Construisez une table de valeurs de $S'(t)$.

c) Dessinez S et S'.

d) Comment serait-il possible d'obtenir des valeurs plus précises de $S'(t)$?

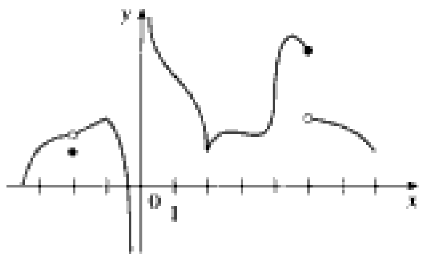
29. Voici le graphique de f. Identifiez, en donnant vos raisons, les points en lesquels f n'est pas dérivable.



30. Voici le graphique de g.

a) En quels points g n'est-elle pas continue et pourquoi ?

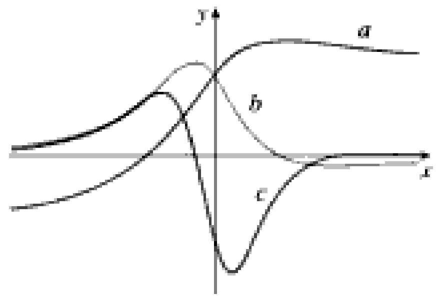
b) En quels points g n'est-elle pas dérivable et pourquoi ?



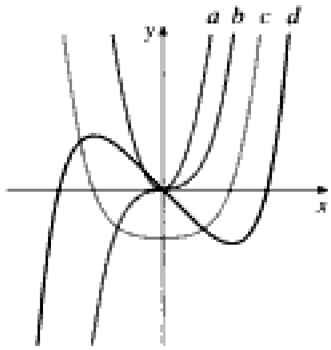
31. Dessinez le graphique de la fonction $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Zoomez plusieurs fois, d'abord vers le point $(-1, 0)$, et ensuite vers l'origine. Que se passe-t-il de différent aux voisinages de ces points ? Quelle conclusion en tirez-vous à propos de la dérivabilité de f ?

32. Zoomez sur les points $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(-1, 0)$ du graphique de la fonction $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. Que remarquez-vous ? Quelle conclusion en tirez-vous à propos de la dérivabilité de g ?

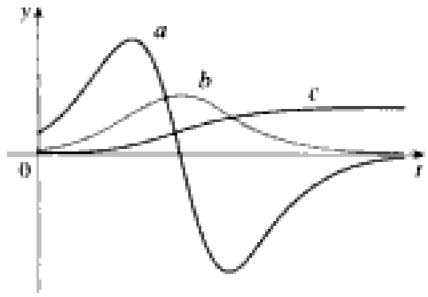
33. La figure montre les courbes représentatives de f, f' et f''. Identifiez chacune des courbes et justifiez vos choix.



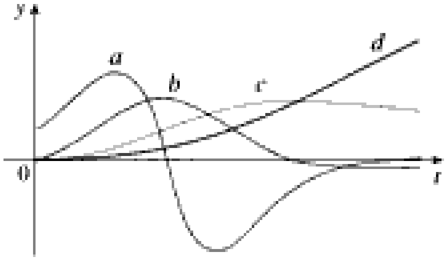
34. La figure montre les courbes représentatives de f, f', f'' et f'''. Identifiez chacune des courbes et justifiez vos choix.



35. La figure montre les courbes représentatives de trois fonctions. L'une est la fonction position d'une voiture, l'autre celle de sa vitesse et la troisième, celle de son accélération. Identifiez chacune des courbes et justifiez vos choix.



36. La figure montre les courbes représentatives de quatre fonctions. L'une est la fonction position d'une voiture, l'autre celle de sa vitesse, la suivante, celle de son accélération et enfin la quatrième, celle de la secousse. Identifiez chacune des courbes et justifiez vos choix.



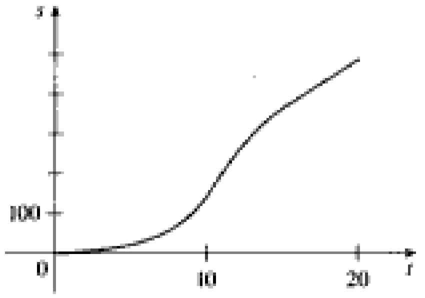
37-38 ■ Déterminez $f'(x)$ et $f''(x)$ à partir de la définition. Ensuite, tracez les graphiques de f, f' et f'' sur un même écran et vérifiez si vos réponses sont plausibles.

37. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

38. $f(x) = 1/x$

39. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, déterminez $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ et $f^{(4)}(x)$. Ensuite, tracez les graphiques de f, f' f'' et f''' sur un même écran. Vos graphiques sont-ils compatibles avec les interprétations géométriques de ces dérivées ?

40. a) Le graphique que voici indique la position s (mesurée en mètres) d'une voiture en fonction du temps (mesuré en secondes). Utilisez-le pour tracer le graphique de la vitesse et de l'accélération. Quelle est l'accélération à l'instant $t = 10$ s ?



b) Lisez sur la courbe de l'accélération la secousse qui se produit en $t = 10$ s. En quelles unités s'exprime la secousse ?

41. Soit $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) Calculez, grâce à l'équation 3 de la section 2.7, $f'(a)$ dans le cas où $a \neq 0$.

b) Démontrez que $f'(0)$ n'existe pas.

c) Démontrez que $y = \sqrt[3]{x}$ a une tangente verticale en $(0, 0)$ (Rappelez-vous la forme du graphique de f. Voyez la figure 5 à la section 1.2).

42. a) Soit $g(x) = x^{2/3}$. Démontrez que $g'(0)$ n'existe pas.

b) Calculez $g'(a)$ pour $a \neq 0$.

c) Démontrez que $y = x^{2/3}$ a une tangente verticale en $(0, 0)$.

d) Illustrez la partie c) en dessinant la courbe $y = x^{2/3}$.

43. Démontrez que la fonction $f(x) = |x - 6|$ n'est pas dérivable en 6. Cherchez une formule pour définir $f'(x)$ et tracez son graphique.

44. a) Tracez la courbe d'équation $y = x|x|$.

b) En quelles valeurs de x la fonction $f(x) = x|x|$ est-elle dérivable ?

c) Cherchez une formule pour f'.

45. Rappelez-vous qu'une fonction f est dite *paire* si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de son domaine de définition et *impaire* si $f(-x) = -f(x)$. Démontrez les propositions suivantes.

a) La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

b) La dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

46. Lorsque vous ouvrez un robinet, la température T de l'eau dépend du temps pendant lequel la robinet coule.

a) Ébauchez un graphique de T comme fonction du temps t qui s'est écoulé depuis que le robinet est ouvert.

b) Décrivez à quelle vitesse varie la température T par rapport à t lorsque t croît.

c) Faites un graphique de la dérivée de T.

2.9 Les approximations affines

Nous avons eu l'occasion de faire remarquer qu'une courbe passe très près de sa tangente à proximité du point de tangence. Nous avons même observé qu'en regardant de plus en plus près le graphique d'une fonction dérivable, celui-ci semblait de plus en plus rectiligne (voyez la figure 2 à la section 2.6 et la figure 3 à la section 2.7). Cette constatation est à la base d'une méthode pour trouver des valeurs approchées de fonctions.

L'idée est la suivante : comme il peut être facile de calculer la valeur $f(a)$ d'une fonction, mais très difficile (voire impossible) d'en calculer la valeur en des points

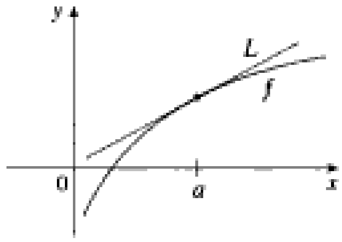


FIGURE 1

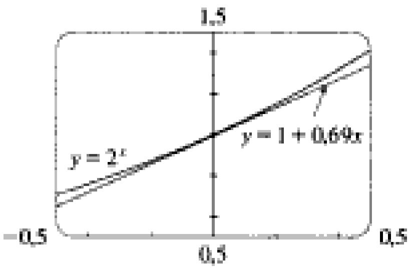


FIGURE 2

voisins de a, nous nous contentons des valeurs, toujours facilement calculables, d'une fonction du premier degré L, dont le graphique est la tangente à celui de f en $(a, f(a))$ (voyez la figure 1). Voici une première illustration de cette méthode.

EXEMPLE 1 ■ Estimez les valeurs $2^{0,1}$ et $2^{0,4}$ à l'aide de l'approximation affine.

SOLUTION Les valeurs souhaitées sont des valeurs de la fonction 2^x pas loin de $a = 0$. À l'exemple 3 de la section 2.7, nous avons obtenu que la pente de la tangente à la courbe $y = 2^x$ au point $(0, 1)$ valait $f'(0) \approx 0{,}69$. Une équation de la tangente est à peu près

$$y - 1 = 0{,}69(x - 0) \qquad \text{ou} \qquad y = 1 + 0{,}69x.$$

Vu que la tangente est proche de la courbe quand $x = 0{,}1$ (voyez la figure 2), la valeur de la fonction est quasiment la même que l'ordonnée sur la tangente en $x = 0{,}1$. D'où

$$2^{0,1} = f(0{,}1) \approx 1 + 0{,}69(0{,}1) = 1{,}069.$$

De même,

$$2^{0,4} = f(0{,}4) \approx 1 + 0{,}69(0{,}4) = 1{,}276.$$

Il ressort de la figure 2 que notre estimation de $2^{0,1}$ est meilleure que celle de $2^{0,4}$ et aussi qu'elles sont toutes les deux inférieures aux valeurs exactes puisque la tangente passe sous la courbe. En effet, les valeurs exactes de ces nombres sont

$$2^{0,1} = 1{,}07177\ldots \qquad 2^{0,4} = 1{,}31950\ldots.$$

■

De façon générale, la tangente en $(a, f(a))$ sert d'approximation de la courbe $y = f(x)$ pour x proche de a. Une équation de cette tangente est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

et l'approximation

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée **approximation affine** ou **approximation par la tangente** de f en a. La fonction du premier degré dont le graphique est la tangente, à savoir

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée la **linéarisation** de f en a.

Nous verrons aux sections 3.8 et 8.9 à quel point les approximations affines sont utiles en physique, que ce soit pour simplifier des calculs ou même toute une théorie.

EXEMPLE 2 ■ Quelle est l'approximation affine de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 1$? Quelles valeurs fournit-elle de $\sqrt{0{,}99}$, $\sqrt{1{,}01}$ et $\sqrt{1{,}05}$? Ces approximations sont-elles par excès ou par défaut ?

SOLUTION La première chose à trouver est $f'(1)$, la pente de la tangente à $y = \sqrt{x}$ en $x = 1$. On peut en obtenir une approximation par des méthodes numériques ou graphiques comme à la section 2.7, ou la valeur exacte grâce à la définition de la dérivée. On a déjà obtenu, à l'exemple 4 de la section 2.8,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

d'où $f'(1) = \frac{1}{2}$. La tangente en $(1, 1)$ a donc pour équation

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

L'approximation affine est

$$\sqrt{x} \approx L(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Aux points particuliers demandés, cela donne

$$\sqrt{0{,}99} \approx L(0{,}99) = \frac{1}{2}(0{,}99) + \frac{1}{2} = 0{,}995;$$
$$\sqrt{1{,}01} \approx L(1{,}01) = \frac{1}{2}(1{,}01) + \frac{1}{2} = 1{,}005;$$
$$\sqrt{1{,}05} \approx L(1{,}05) = \frac{1}{2}(1{,}05) + \frac{1}{2} = 1{,}025.$$

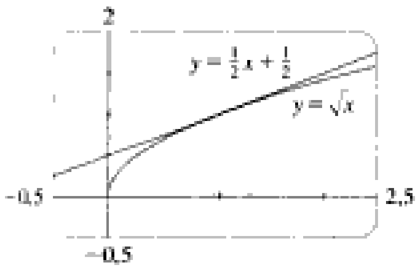


FIGURE 3

La figure 3 montre la courbe $y = \sqrt{x}$ et son approximation affine $L(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Nos estimations sont par excès puisque la tangente est située au-dessus de la courbe.

La table ci-dessous permet de comparer les estimations de l'approximation affine avec les valeurs exactes. Tant numériquement dans la table que graphiquement sur la base de la figure 3, on constate que l'approximation par la tangente est bonne lorsque x est proche de 1 mais se détériore lorsque x s'éloigne de 1.

	$L(x)$	Valeur plus exacte
$\sqrt{0{,}99}$	0,995	0,99498743 ...
$\sqrt{1{,}001}$	1,0005	1,00049987 ...
$\sqrt{1{,}01}$	1,005	1,00498756 ...
$\sqrt{1{,}05}$	1,025	1,02469507 ...
$\sqrt{1{,}1}$	1,05	1,04880884 ...
$\sqrt{1{,}5}$	1,25	1,22474487 ...
$\sqrt{2}$	1,5	1,41421356 ...

Évidemment une calculatrice est capable de fournir de meilleures approximations que celles que nous avons trouvées aux exemples 1 et 2. Mais une approximation affine couvre tout un intervalle et c'est la raison pour laquelle les scientifiques choisissent souvent de telles approximations (voyez les sections 3.8 et 8.9).

L'exemple qui suit est caractéristique des situations dans lesquelles on emploie une approximation affine, à savoir pour avancer le comportement futur d'une fonction, connue seulement par des données empiriques.

EXEMPLE 3 ■ Supposons qu'une dinde, juste après qu'elle ait été fourrée et rissolée, soit à une température de 50°C et qu'elle soit placée dans un four à 325°C. Après un quart d'heure de cuisson, le thermomètre à viande indique que la température de la dinde est de 93°C et après une demi-heure, de 129°. Quelle sera sa température après trois quarts d'heure?

SOLUTION Si $T(t)$ représente la température de la dinde après t quarts d'heure, les données sont $T(0) = 50$, $T(1) = 93$ et $T(2) = 129$. En vue de procéder par approximation affine en $a = 2$, on cherche à estimer $T'(2)$. Comme

$$T'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{T(t) - T(2)}{t - 2},$$

on peut estimer $T'(2)$ par le quotient des différences avec $t = 1$:

$$T'(2) \approx \frac{T(1) - T(2)}{1 - 2} = \frac{93 - 129}{-1} = 36.$$

Ceci revient à approximer le taux instantané de variation de la température par le taux moyen de variation entre $t = 1$ et $t = 2$, qui est 36 °C/h. Avec cette estimation, l'approximation affine de la température après 3 quarts d'heure est

$$\begin{aligned} T(3) &\approx T(2) + T'(2)(3 - 2) \\ &\approx 129 + 36 \cdot 1 = 165. \end{aligned}$$

On prévoit donc une température après trois quarts d'heure de 165°C.

On peut estimer $T'(2)$ avec plus de précision en plaçant les données dans un repère, comme le montre la figure 4, pour mesurer la pente de la tangente en $t = 2$. Cela donne

$$T'(2) \approx 33.$$

L'approximation affine devient alors

$$T(3) \approx T(2) + T'(2) \cdot 1 \approx 129 + 33 = 162,$$

et la prévision améliorée est de 162 °C.

Comme la courbe de la température se trouve sous la tangente, il est vraisemblable que la température réelle après 3 quarts d'heure sera légèrement inférieure à 162 °C, sans doute proche des 160 °C.

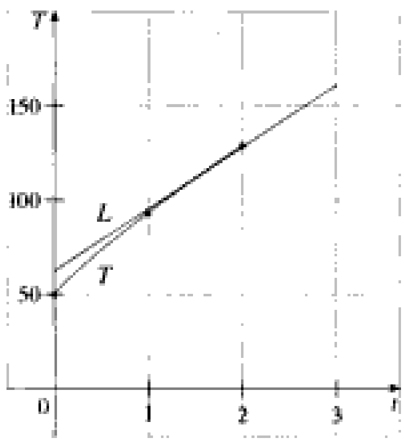


FIGURE 4

2.9 Exercices

a) Soit $f(x) = 3^x$. Estimez graphiquement ou numériquement $f'(0)$.
b) Utilisez la tangente à la courbe $y = 3^x$ en $(0, 1)$ pour trouver une valeur approchée de $3^{0,05}$ et $3^{0,1}$.
c) Tracez la courbe et sa tangente. Les valeurs approchées le sont-elles par défaut ou par excès? Pourquoi?

a) Soit $f(x) = \ln x$. Estimez graphiquement ou numériquement $f'(1)$.
b) Utilisez la tangente à la courbe $y = \ln x$ en $(1, 0)$ pour trouver une valeur approchée de $\ln 0{,}9$ et $\ln 1{,}3$.
c) Tracez la courbe et sa tangente. Les valeurs approchées le sont-elles par défaut ou par excès? Pourquoi?

a) Soit $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Estimez la valeur $f'(1)$.
b) Déterminez une approximation affine de f en $a = 1$.
c) Quelle valeur donne cette approximation affine aux racines cubiques de 0,5, 0,9, 0,99, 1,01, 1,1, 1,5 et 2. Comparez avec la valeur que vous donne votre calculatrice. Les valeurs approchées l'étaient-elles par défaut ou par excès? Quelles sont les valeurs approchées les plus précises?
d) Tracez la courbe $y = \sqrt[3]{x}$ et sa tangente en $(1, 1)$. Expliquez vos résultats de la partie c) par référence à la figure obtenue.

4. a) Soit $f(x) = \cos x$. Estimez la valeur $f'(\pi/3)$.
b) Cherchez une approximation affine de f en $a = \pi/3$.
c) Quelle valeur donne-t-elle de $\cos 1$, de $\cos 1{,}1$, de $\cos 1{,}5$ et de $\cos 2$. Est-ce une approximation par défaut ou par excès? Quelles sont les valeurs approchées les plus précises?
d) Dessinez la courbe $y = \cos x$ et sa tangente en $(\pi/3, 1/2)$. Commentez vos résultats de la partie c) eu égard au dessin.

5-6 ■
a) Calculez $f'(1)$ par la définition de la dérivée.
b) Employez l'approximation affine de f en $a = 1$ pour approximer $f(x)$ en $x = 0{,}9$, 0,95, 0,99, 1,01, 1,05 et 1,1. Comparez ces estimations avec les valeurs exactes.
c) Tracez le graphique de f et celui de sa tangente en $(1, 1)$. Ces graphiques soutiennent-ils vos commentaires de la partie b)?

5. $f(x) = x^2$ **6.** $f(x) = x^3$

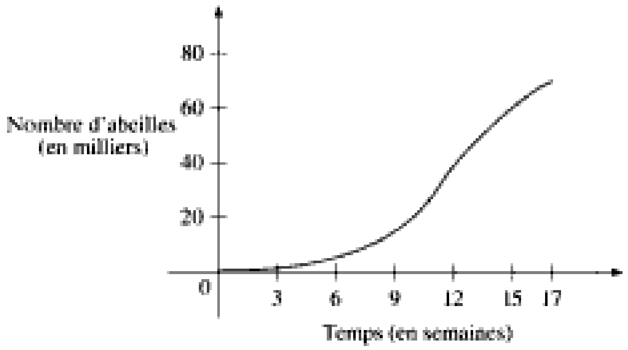
7. La dinde de l'exemple 3 est retirée du four. Sa température est à ce moment de 185°. Elle est placée sur la table dans une pièce dont la température ambiante est 22°. Après 10 min, la température de la dinde est descendue à 172° et après 20 min, à 160°. Utilisez une approximation affine pour prédire la température de la dinde après une demi-heure. Pensez-vous que votre estimation est exagérée, ou au contraire, trop faible ? Pourquoi ?

8. La pression atmosphérique P diminue à mesure que l'altitude h augmente. Lorsque la température est de 15 °C, la pression est de 101,3 kilopascals (kPa) au niveau de la mer, de 87,1 kPa à une altitude de 1 km et de 74,9 kPa à une altitude de 2 km. Par approximation affine, estimez la pression atmosphérique à une altitude de 3 km.

9. La table donne le pourcentage d'élèves des classes terminales qui disent avoir fumé dans les 30 jours qui précèdent. Utilisez une approximation affine pour estimez le taux de fumeurs parmi ces élèves en 1994 et en 1995.

t	1989	1990	1991	1992	1993
$S(t)$	28	29	28	27,5	30

10. La courbe montre l'évolution d'une population d'abeilles dans un rucher.



a) Par approximation affine prédisez la population 18 et 20 semaines plus tard.

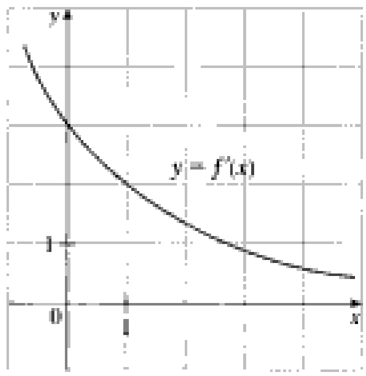
b) Vos prédictions sont-elles par défaut ou par excès? Pourquoi?

c) Laquelle de vos prédictions est la plus précise? Pourquoi?

11. Supposons que la seule information que nous ayons d'une fonction f est que $f(1) = 5$ et que le graphique de sa dérivée est celui qui figure ci-dessous.

a) Utilisez une approximation affine pour estimer $f(0{,}9)$ et $f(1{,}1)$.

b) Les valeurs obtenues sont-elles trop grandes ou trop petites? Expliquez.



12. Supposons ne pas connaître la formule qui définit $g(x)$, mais nous savons que $g(2) = -4$ et que $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ quel que soit x.

a) Utilisez une approximation affine pour estimer $g(1{,}95)$ et $g(2{,}05)$.

b) Les valeurs obtenues sont-elles trop grandes ou trop petites? Expliquez.

2.10 Que dit f' à propos de f ?

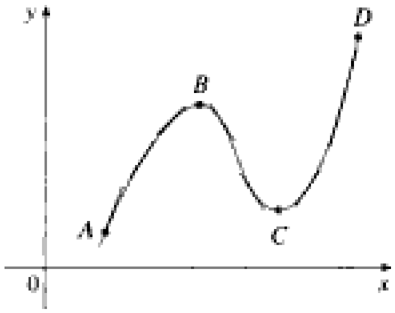


FIGURE 1

La plupart des applications du calcul différentiel dépendent de notre aptitude à déduire les caractéristiques d'une fonction f des informations relatives à sa dérivée f'. Parce que $f'(x)$ représente la pente de la courbe $y = f(x)$ au point $(x, f(x))$, elle renseigne, en chaque point, sur la direction selon laquelle la courbe se prolonge. Il est donc normal de s'attendre à ce que l'information sur $f'(x)$ fournisse de l'information sur $f(x)$.

Plus particulièrement, regardez la figure 1 si vous voulez voir comment la dérivée de f peut nous dire où f est croissante ou décroissante (le caractère croissant ou décroissant des fonctions a été défini à la section 1.1). Entre A et B et entre C et D, la pente des tangentes est positive et donc $f'(x) > 0$. Entre B et C, la pente des tangentes est négative et donc $f'(x) < 0$. De là, il découle que f croît lorsque $f'(x)$ est positive et décroît lorsque $f'(x)$ est négative.

Il s'avère, comme nous le verrons au chapitre 4, que ce que nous avons observé pour la fonction de la figure 1 est toujours vrai. Nous énonçons le résultat général comme suit.

> Quand $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est strictement croissante sur cet intervalle.
> Quand $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.

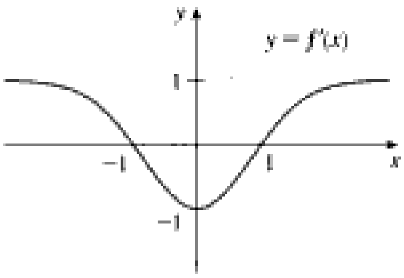


FIGURE 2

EXEMPLE 1 ■

a) Si le graphique de la dérivée d'une fonction est celui de la figure 2, que peut-on dire à propos de f ?

b) Sachant encore que $f(0) = 0$, esquissez un graphique possible de f.

SOLUTION

a) Nous observons sur la figure 2 que $f'(x)$ est strictement négative pour $-1 < x < 1$, donc la fonction originale f doit être décroissante sur l'intervalle $]-1, 1[$. De même, $f'(x)$ est strictement positive pour $x < -1$ et pour $x > 1$; par conséquent, f est croissante sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$. Notez aussi que, comme $f'(-1) = 0$ et $f'(1) = 0$, le graphique de f admet en -1 et 1 une tangente horizontale.

b) Compte tenu des éléments mis en évidence dans la première partie et du fait que le graphique passe par l'origine, nous proposons un graphique possible à la figure 3. Comme $f'(0) = -1$, nous avons dessiné la courbe $y = f(x)$ passant par l'origine avec une pente -1. De plus, comme $f'(x) \to 1$ lorsque $x \to \pm\infty$ (voyez la figure 2), la pente de la courbe $y = f(x)$ tend vers 1 lorsque x devient grand (positif ou négatif). Voilà pourquoi nous avons dessiné le graphique de f de plus en plus rectiligne aux extrémités.

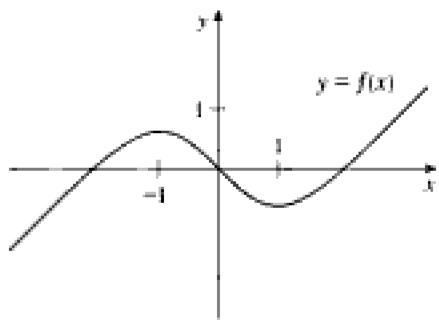


FIGURE 3

Nous disons que la fonction f de l'exemple 1 a un **maximum local** en -1 parce que pour les valeurs de x proches de -1, les valeurs de la fonction sont au moins aussi grandes que les valeurs voisines. Remarquez qu'à gauche de -1, f' est strictement positive et à droite de -1, strictement négative. De même, f a un **minimum local** en 1, là où la dérivée passe du négatif au positif. Nous développerons ces observations au chapitre 4 en une méthode générale de recherche des valeurs extrêmes d'une fonction.

■ Que dit f'' à propos de f ?

Voyons comment le signe de $f''(x)$ se marque dans le graphique de f. Comme $f'' = (f')'$, nous savons que, quand $f''(x)$ est strictement positive, alors f' croît. Cela se traduit encore par le fait que de la gauche vers la droite les pentes des tangentes à la courbe $y = f(x)$ sont de plus en plus fortes. C'est le cas, par exemple, du graphique de la figure 4. La pente de cette courbe devient progressivement plus grande à mesure que x augmente et nous observons que, par voie de conséquence, le tracé s'incurve vers le haut. Une telle courbe est dite **convexe**. À la figure 5, par contre, $f''(x)$ est strictement négative, ce qui veut dire que f' est strictement décroissante. Dès lors, les pentes de f diminuent de gauche à droite et le tracé s'incurve vers le bas. Cette courbe est dite **concave**. Nous résumons notre étude comme suit (Concavité et convexité sont des notions étudiées de façon détaillée à la section 4.3).

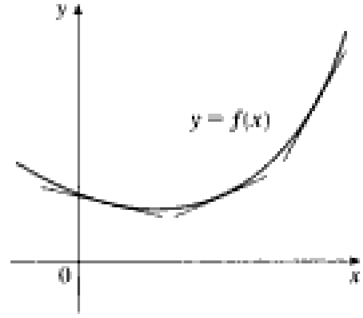


FIGURE 4
Comme $f''(x) > 0$, les pentes augmentent et f est convexe.

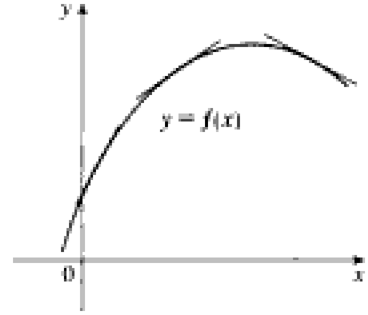


FIGURE 5
Comme $f''(x) < 0$, les pentes diminuent et f est concave.

Quand $f''(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est convexe sur cet intervalle.
Quand $f''(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est concave sur cet intervalle.

EXEMPLE 2 ■ La figure 6 montre graphiquement l'évolution d'une population d'abeilles dans un rucher. Comment le taux d'accroissement de cette population change-t-il dans le temps ? À quel moment ce taux est-il le plus fort ? Sur quels intervalles cette courbe est-elle convexe ou concave ?

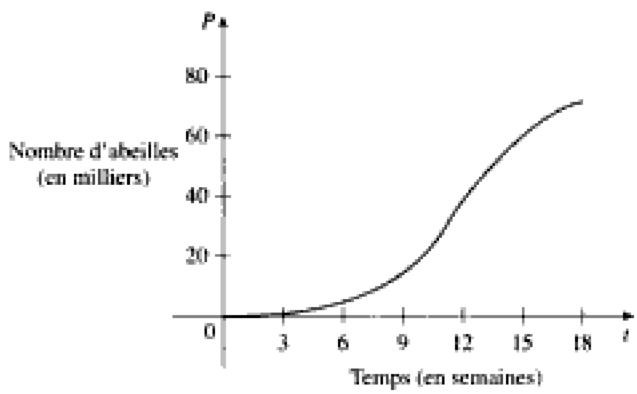


FIGURE 6

SOLUTION En observant la pente de la courbe pendant que t augmente, nous voyons que le taux de croissance de la population est d'abord très faible, qu'il grandit ensuite jusqu'à atteindre un maximum aux environs de $t = 12$ semaines, et enfin qu'il décroît de sorte que la population tend à se stabiliser. Au moment où la population approche son maximum d'à peu près 75 000, le taux d'accroissement, $P'(t)$, tend vers 0. La courbe est convexe sur $]0, 12[$ et concave sur $]12, 18[$. □

La courbe de l'exemple 2 était convexe et est devenue concave approximativement au point $(12, 38000)$. Un tel point s'appelle un *point d'inflexion* de la courbe. En ce point, le taux de croissance de la population atteint son maximum, tel est le sens de ce point. De façon générale un point en lequel la concavité change de sens est appelé un **point d'inflexion**.

EXEMPLE 3 ■ Dessinez un graphique possible d'une fonction f qui satisfait aux conditions suivantes :

a) $f'(x) > 0$ sur $]-\infty, 1[$, $f'(x) < 0$ sur $]1, +\infty[$,
b) $f''(x) > 0$ sur $]-\infty, -2[$ et $]2, +\infty[$, $f''(x) < 0$ sur $]-2, 2[$,
c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

SOLUTION La condition 1 indique que f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[$, et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. La condition 2 veut dire que f est convexe sur $]-\infty, -2[$ et $]2, +\infty[$, et concave sur $]-2, 2[$. Par la condition 3 nous savons que le graphique de f admet deux asymptotes horizontales: $y = -2$ et $y = 0$.

Nous commençons par tracer l'asymptote $y = -2$ avec une ligne en traits discontinus (voyez la figure 7). Ensuite, nous tirons une ligne qui vient de cette asymptote à l'extrême gauche, monte jusqu'au maximum en $x = 1$ et descend s'allonger sur l'axe Ox lorsque x tend vers l'infini. En même temps, nous nous assurons que la courbe ait un point d'inflexion en $x = -2$ et en $x = 2$. Remarquez que la courbe tourne sa concavité vers le haut pour $x < -2$ et $x > 2$ et vers le bas pour x situé entre -2 et 2.

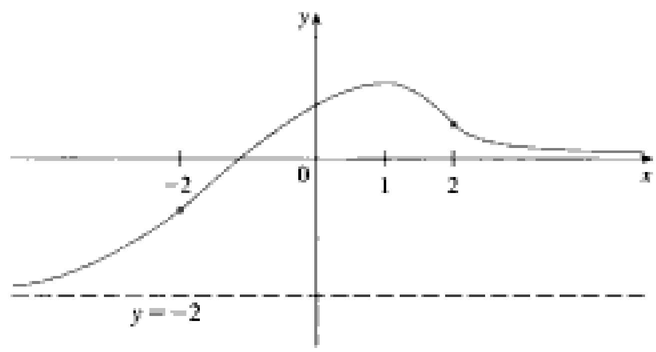


FIGURE 7

■ Primitives

Il arrive souvent dans des problèmes de mathématiques et dans des applications que l'on ait une fonction f pour laquelle il serait intéressant de connaître une fonction F dont f serait la fonction dérivée. Lorsqu'une telle fonction F existe, elle est appelée une *primitive* de f. En d'autres mots, une **primitive** de f est une fonction F telle que $F' = f$. (À l'exemple 1, nous avons tracé une primitive f de la fonction f'.)

EXEMPLE 4 ■ Désignons par F une primitive de la fonction f dont le graphique est représenté dans la figure 8.

a) Où F est-elle strictement croissante ou décroissante ?
b) Où F a-t-elle sa concavité tournée vers le haut ou vers le bas ?
c) En quelles valeurs de x la fonction F présente-t-elle un point d'inflexion ?

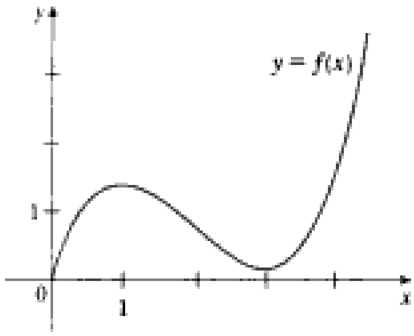


FIGURE 8

d) Sachant que $F(0) = 1$, dessinez le graphique de F.

e) Combien de primitives f a-t-elle ?

SOLUTION

a) Nous voyons sur la figure 8 que $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Puisque F est une primitive de f, nous avons $F'(x) = f(x)$ et donc $F'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Cela veut dire que F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b) F est convexe quand $F''(x) > 0$. Mais $F''(x) = f'(x)$ et F est donc convexe lorsque $f'(x) > 0$, c'est-à-dire lorsque f est croissante. D'après la figure 8, f est croissante quand $0 < x < 1$ et quand $x > 3$. Par conséquent, F est convexe sur $]0, 1[$ et sur $]3, +\infty[$. Symétriquement, F est concave quand $F''(x) = f'(x) < 0$, c'est-à-dire quand f est décroissante. Par conséquent, F est concave sur $]1, 3[$.

c) F a un point d'inflexion quand la concavité change de sens. D'après le point précédent, F passe de convexe à concave en $x = 1$; c'est un premier point d'inflexion. Ensuite F passe de concave à convexe en $x = 3$. C'est un second point d'inflexion.

d) Pour dessiner le graphique de F, nous tenons compte de l'information récoltée dans les trois points précédents. Mais, pour le détail, nous avons à l'esprit ce que signifie être une primitive : parce que $F'(x) = f(x)$, la pente de $y = F(x)$ en n'importe quelle valeur de x est égale à l'ordonnée $f(x)$ (ce procédé est évidemment l'inverse de celui que nous avons utilisé à l'exemple 1 de la section 2.8 pour tracer la dérivée).

Puisque $f(0) = 0$, nous commençons donc le graphique de F au point donné $(0, 1)$ avec une pente nulle et le faisons croître continuellement avec sa concavité tournée vers le haut jusqu'à $x = 1$, puis tournée vers le bas jusqu'à $x = 3$ et à nouveau tournée vers le haut pour $x > 3$ (voyez la figure 9).

Remarquez que $f(3) \approx 0{,}2$, d'où $y = F(x)$ a une pente très douce au deuxième point d'inflexion. La pente devient beaucoup plus raide quand $x > 3$.

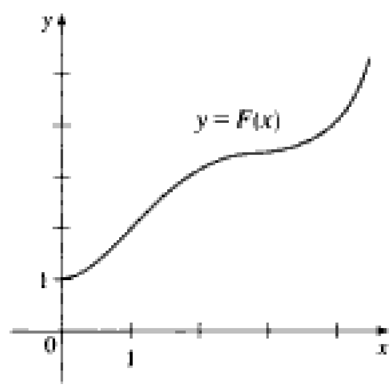


FIGURE 9
Une primitive de f

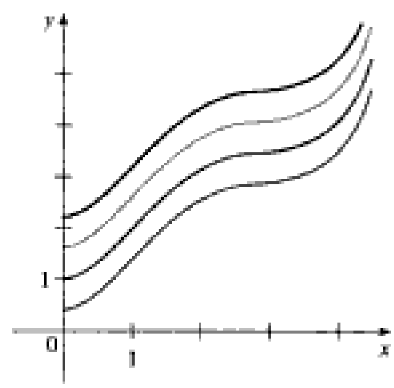


FIGURE 10
Quelques membres de la famille des primitives de f

e) La primitive de f que nous avons tracée à la figure 9 satisfait à $F(0) = 1$, ce qui fait partir sa courbe du point $(0, 1)$. Mais il y a beaucoup d'autres primitives dont les courbes représentatives partent d'autres points de l'axe Oy. En fait, f a une infinité de primitives ; leur représentation s'obtient par translation vers le haut ou vers le bas de la courbe F (voyez la figure 10).

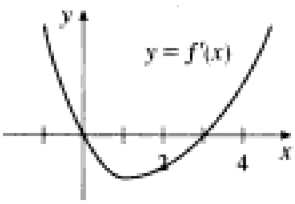
2.10 Exercices

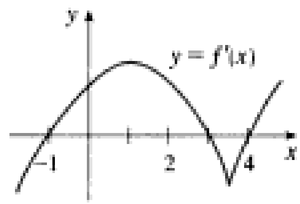
1-2 ■ Voici le graphique de la *dérivée* f' d'une fonction f.

a) Sur quels intervalles f est-elle croissante, décroissante ?

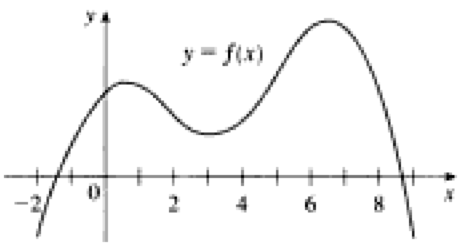
b) En quelles valeurs de x, f passe-t-elle par un maximum, un minimum ?

c) S'il est connu que $f(0) = 0$, esquissez un graphique possible de f.





3. Utilisez le graphique de f pour déterminer les intervalles sur lesquels f' est croissante ou décroissante.



4. a) Tracez le graphique d'une fonction dont la pente est toujours strictement positive et strictement croissante.

b) Tracez le graphique d'une fonction dont la pente est toujours strictement positive et strictement décroissante.

c) Donnez des équations de courbes qui ont ces propriétés.

5. Un chef d'état annonce que la dette publique augmente, mais de moins en moins vite. Interprétez cette annonce en termes de fonction et de ses dérivées.

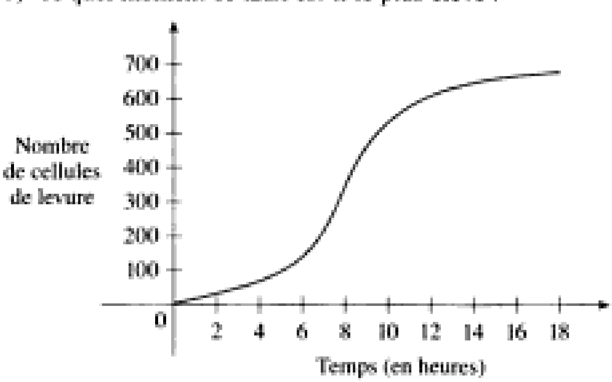
6. Voici la progression en fonction du temps du nombre de cellules d'une levure dans une nouvelle culture.

a) Expliquez la variation du taux de croissance de la population.

b) À quel moment ce taux est-il le plus élevé ?

c) Sur quel intervalle la fonction qui représente la population de cellules est-elle convexe, concave ?

d) Localisez le point d'inflexion.



7. La table donne les densités de faisans dorés (nombre de faisans par unité d'aire) sur une île de l'Ontario.

a) Décrivez comment le taux de variation de la population change.

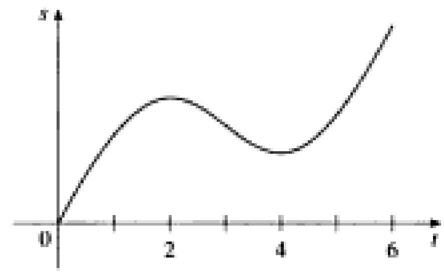
b) Situez les points d'inflexion. Quelle est leur signification ?

t	1927	1930	1932	1934	1936	1938	[illegible]
$P(t)$	0,1	0,6	2,5	4,6	4,8	3,5	3,0

8. Un mobile se déplace le long d'une ligne droite. Voici le graphique de sa fonction de position (sa distance à droite d'un point fixe en fonction du temps).

a) Quand le mobile se déplace-t-il vers la droite et quand se déplace-t-il vers la gauche ?

b) Quand le mobile a-t-il une accélération positive et quand a-t-il une accélération négative ?



9. Si $K(t)$ est une mesure de la connaissance que vous avez acquise d'un test après t heures, laquelle des deux différences est la plus grande, $K(8) - K(7)$ ou $K(3) - K(2)$? Le graphique de K est-il concave ou convexe ? Pourquoi ?

10. Du café est versé à débit constant (mesuré en volume par unité de temps) dans la tasse dont vous avez une image ci-après. Ébauchez un graphique du niveau du café en fonction du temps. Justifiez la forme de la courbe du point de vue de la concavité. Quelle est la signification du point d'inflexion ?

11-12 ■ Le graphique est celui de la dérivée f' d'une fonction f.

a) Sur quels intervalles f est-elle croissante ou décroissante ?

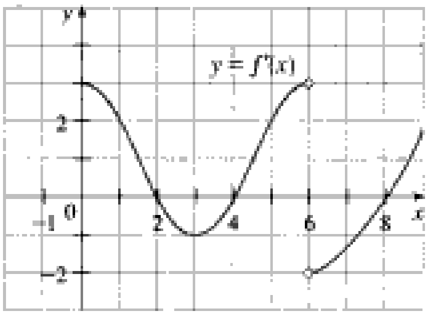
b) En quelles valeurs de x se produit un maximum local ou un minimum local pour f ?

c) Sur quels intervalles f est-elle concave ou convexe ?

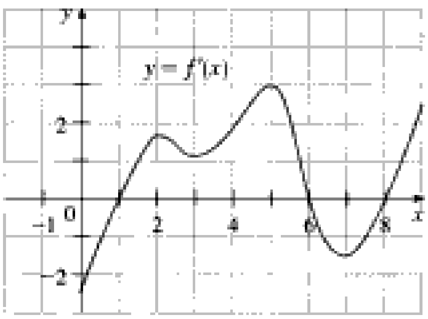
d) Déterminez l'abscisse des points d'inflexion.

e) En supposant que f est continue et que $f(0) = 0$, dessinez un graphique de f.

11.



12.



13. Tracez le graphique d'une fonction dont la première et la seconde dérivée sont toujours négatives.

14. Tracez le graphique d'une fonction dont la première dérivée est toujours négative et la seconde dérivée toujours positive.

15-18 ■ Dessinez la courbe représentative d'une fonction qui satisfait aux conditions données.

15. $f'(-1) = f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ si $|x| > 1$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$,
$f''(x) < 0$ si $x < 0$, $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

16. $f'(-1) = 0$, $f'(1)$ n'existe pas,
$f'(x) < 0$ si $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$,
$f(-1) = 4$, $f(1) = 0$,
$f''(x) < 0$ si $x \neq 1$.

17. $f'(2) = 0$, $f(2) = -1$, $f(0) = 0$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0$ si $x > 2$,
$f''(x) < 0$ si $0 \leqslant x < 1$ ou si $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 4$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$,
$f(-x) = f(x)$ pour tout x.

18. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $f''(x) < 0$ si $x \neq 3$, $f'(0) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ ou $x > 3$, $f'(x) < 0$ si $0 < x < 3$.

19. Supposons $f'(x) = xe^{-x^2}$.

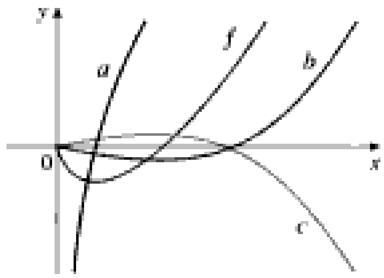
a) Sur quel intervalle f est-elle croissante ?

b) f passe-t-elle par un maximum ou un minimum ?

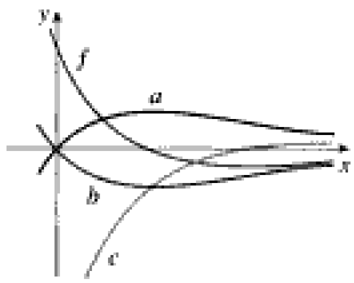
20. Si $f'(x) = e^{-x^2}$, que pouvez-vous dire de f ?

21-22 ■ Vous pouvez voir le graphique de f et d'autres graphiques. Lequel d'entre eux est celui d'une primitive de f et pourquoi ?

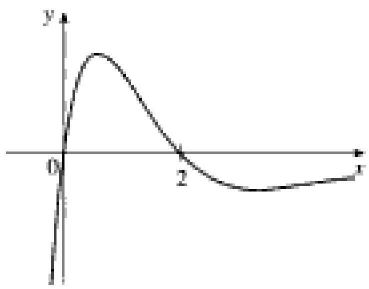
21.



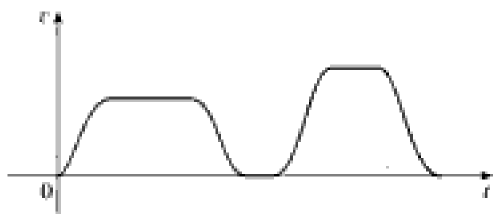
22.



23. Voici le graphique d'une fonction. esquissez grossièrement le graphique d'une primitive F, étant donné que $F(0) = 0$.



24. Voici le graphique de la vitesse d'une voiture. Dessinez le graphique de la fonction de position.



25-26 ■ Faites dessiner le graphique de f et utilisez-le pour faire celui de la primitive qui passe par l'origine.

25. $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \leqslant x \leqslant 4$ **26.** $f(x) = 1/(x^4 + 1)$

Chapitre 2 Révision

• CONTRÔLE DES CONCEPTS •

1. Donnez une définition dans vos propres termes (Vérifiez votre réponse en vous référant à la définition du texte).
a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ b) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$
c) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ d) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$
e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ f) Asymptote verticale
g) Asymptote horizontale

2. Énoncez les principales Lois algébriques des limites.

3. a) Définissez la dérivée d'une fonction f en un nombre a. (Donnez deux expressions de la limite qui définit ce nombre dérivé.) Vérifiez en vous référant à la section 2.7.
b) Donnez deux interprétations de la dérivée.

4. Définissez la dérivée seconde d'une fonction.

5. Soit $s = f(t)$ la fonction position d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne. Définissez
a) la vitesse du mobile au moment $t = a$;
b) l'accélération du mobile au moment $t = a$.

6. a) Que signifie que f est continue en a ?
b) Que signifie que f est dérivable en a ?
c) Quelle relation lie la continuité et la dérivabilité d'une fonction ?

7. a) Énoncez le Théorème du sandwich.
b) Énoncez le Théorème des valeurs intermédiaires.

8. Parmi les courbes suivantes, lesquelles ont une asymptote verticale ? Une asymptote horizontale ?
a) $y = x^4$ b) $y = \sin x$
c) $y = \operatorname{tg} x$ d) $y = \operatorname{Arctg} x$
e) $y = e^x$ f) $y = \ln x$
g) $y = 1/x$ h) $y = \sqrt{x}$

9. a) Que savons-nous de f grâce au signe de f'?
b) Que savons-nous de f grâce au signe de f''?

10. a) Donnez une définition de l'approximation affine de f en a.
b) Définissez une primitive de f.

▲ VRAI-FAUX ▲

Dites si la proposition est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquez pourquoi. Si elle est fausse, expliquez pourquoi et donnez un exemple qui contredit la proposition.

1. $\displaystyle \lim_{x\to 4}\left(\frac{2x}{x-4} - \frac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\frac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\frac{8}{x-4}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \frac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x^2+2x-4} = \frac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ n'existe pas.

5. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ n'existe pas.

6. Si $\lim_{x\to 6} f(x)g(x)$ existe, alors la limite doit être $f(6)g(6)$.

7. Si p est un polynôme, alors $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

8. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, alors $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

9. Si la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de $y = f(x)$, alors f n'est pas définie en 1.

10. Si $f(1) > 0$ et $f(3) < 0$, alors il existe un nombre c entre 1 et 3 tel que $f(c) = 0$.

11. Si f est continue en 5 et $f(5) = 2$ et $f(4) = 3$, alors $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

12. Si f est continue sur $[-1, 1]$ et $f(-1) = 4$ et $f(1) = 3$, alors il existe un nombre r tel que $|r| < 1$ et $f(r) = \pi$.

13. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

14. $\displaystyle \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

15. Une équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ en $(-2, 4)$ est $y - 4 = 2x(x + 2)$.

16. Si $f'(r)$ existe, alors $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

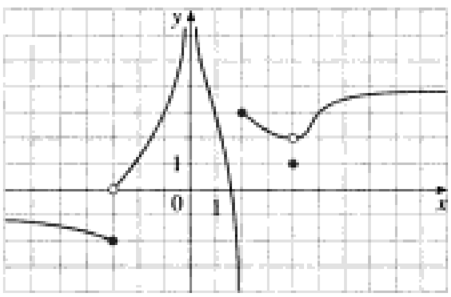
EXERCICES

1. Le graphique de f est donné.

a) Calculez chaque limite ou dites pourquoi elle n'existe pas.

■ $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ■ $\lim_{x\to -3^+} f(x)$
■ $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ ■ $\lim_{x\to 4} f(x)$
■ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ■ $\lim_{x\to 2^-} f(x)$
■ $\lim_{x\to \infty} f(x)$ ■ $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

b) Écrivez les équations des asymptotes horizontales.
c) Écrivez les équations des asymptotes verticales.
d) En quels nombres f est-elle discontinue ?



2. Tracez la courbe d'un exemple de fonction qui satisfait à toutes les conditions :

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $f(0) = -1$,
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to \infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$

3-16 ■ Calculez la limite.

3. $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg}(x^2)$

4. $\lim_{t\to -1} \dfrac{t+1}{t^3 - t}$

5. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h}$

6. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^{-2} - 1}{h}$

7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x - 2}$

8. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

9. $\lim_{t\to 6} \dfrac{17}{(t-6)^2}$

10. $\lim_{x\to -6^+} \dfrac{x}{x+6}$

11. $\lim_{x\to 8^-} \dfrac{|x-8|}{x-8}$

12. $\lim_{x\to 10^-} \ln(100 - x^2)$

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

14. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{1 + 2x - x^2}{1 - x + 2x^2}$

15. $\lim_{x\to \infty} e^{-x^2}$

16. $\lim_{x\to \infty} \operatorname{Arctg}(-x^2)$

17-18 ■ Utilisez des graphiques pour découvrir les asymptotes de la courbe. Ensuite, prouvez ce que vous avez découvert.

17. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

18. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

19. Sachant que $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ pour $0 < x < 3$, calculez $\lim_{x\to 1} f(x)$.

20. Démontrez que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

21. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ (x-3)^2 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

a) Calculez chaque limite si elle existe.

■ $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ■ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ■ $\lim_{x\to 0} f(x)$
■ $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ ■ $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ ■ $\lim_{x\to 3} f(x)$

b) Où f est-elle discontinue ?
c) Dessinez le graphique de f.

22. Montrez que chaque fonction est continue sur son domaine de définition.

a) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$ b) $h(x) = xe^{\sin x}$.

23-24 ■ Grâce au Théorème des valeurs intermédiaires, démontrez que l'équation possède une racine dans l'intervalle indiqué.

23. $2x^3 + x^2 + 2 = 0$, $]-2, -1[$

24. $e^{-x^2} = x$, $]0, 1[$

25. Le déplacement (en mètres) d'un mobile sur une trajectoire rectiligne est donné par $s = 1 + 2t + t^2/4$ où t est mesuré en secondes.

a) Calculez la vitesse moyenne sur les intervalles de temps suivants :

■ $[1, 3]$ ■ $[1, 2]$
■ $[1; 1{,}5]$ ■ $[1; 1{,}1]$

b) Quelle est la vitesse instantanée au moment $t = 1$?

26. La loi des gaz qui porte le nom de Boyle-Mariotte certifie que, si la température d'un gaz confiné est fixe, alors le produit de la pression P et du volume V est constant. Supposons que pour un certain gaz, $PV = 800$, P étant mesuré en kg par centimètres carrés et V en centimètres cubes.

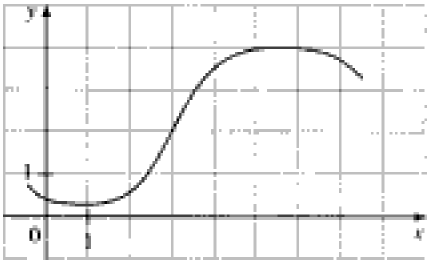
a) Calculez le taux moyen de changement de P lorsque V passe de 200 à 250 cm^3.

b) Exprimez V comme une fonction de P et montrez que le taux de variation instantané de V par rapport à P est inversement proportionnel au carré de P.

27. Ordonnez en ordre croissant les nombres

$$0, \quad 1, \quad f'(2), \quad f'(3), \quad f'(5), \quad f''(5),$$

où f est la fonction dont voici le graphique.



28. a) Soit $f(x) = x^3 - 2x$. Calculez $f'(2)$ à partir de la définition de la dérivée.

b) Écrivez une équation de la tangente à la courbe $y = x^3 - 2x$ au point $(2, 4)$.

c) Illustrez la partie b) en produisant sur le même écran la courbe et sa tangente.

29. a) Estimez graphiquement et numériquement la valeur de $f'(1)$ pour $f(x) = e^{-x^2}$.

b) Écrivez une équation approximative de la tangente à la courbe $y = e^{-x^2}$ au point $x = 1$.

c) Illustrez la partie b) en produisant sur le même écran la courbe et sa tangente.

30. Découvrez la fonction f et le nombre a tels que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a).$$

31. Le coût total de remboursement d'une bourse d'étudiant avec un intérêt annuel de i % est désigné par $C = f(i)$.

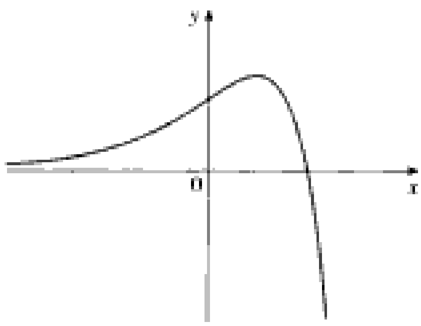
a) Que signifie la dérivée $f'(i)$? En quelles unités s'exprime-t-elle ?

b) Que signifie l'équation $f'(10) = 1200$?

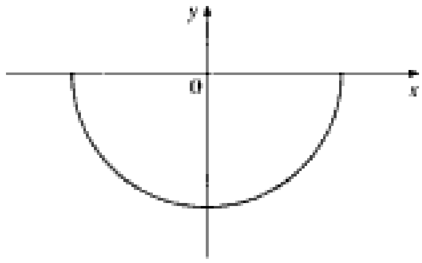
c) Est-ce que $f'(i)$ est toujours positive ou change-t-elle de signe ?

32-34 ■ Recopier le graphique de la fonction donnée afin de pouvoir tracer, juste au-dessous, celui de la fonction dérivée.

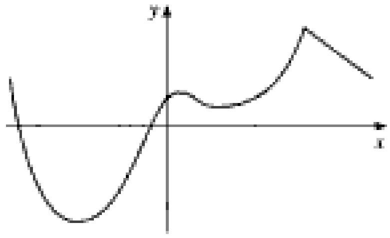
32.



33.



34.



35. a) Soit $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$. Calculez $f'(x)$ à partir de la définition de la dérivée.

b) Déterminez les domaines de définition de f et f'.

c) Faites apparaître les graphiques de f et f' sur un même écran. Comparez-les et vérifiez que votre réponse à la partie a) est valable.

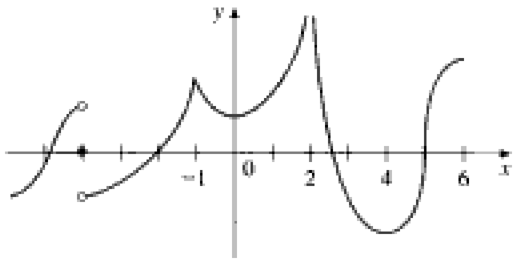
36. a) Cherchez les asymptotes au graphique de $f(x) = (4 - x)/(3 + x)$ et servez-vous en comme guide pour tracer le graphique.

b) À partir de ce graphique, tracez celui de f'.

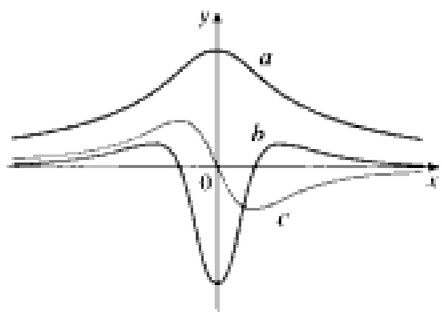
c) Cherchez l'expression de $f'(x)$ à partir de la définition de la dérivée.

d) Faites produire par un outil graphique la courbe de f' et comparez-la avec celle de la partie b).

37. En quels nombres la fonction dont vous avez le graphique sous les yeux n'est-elle pas dérivable et pourquoi ?



38. La figure montre les graphiques de f, f' et f''. Identifiez chaque courbe et expliquez votre choix.



39. a) Si $f(x) = e^x$, estimez la valeur $f'(0)$.

b) Déterminez une approximation affine de f en $a = 0$.

c) Quelle valeur donne cette approximation affine à $e^{-0,2}$, $e^{-0,1}$, $e^{-0,01}$, $e^{0,01}$, $e^{0,1}$ et $e^{0,2}$.

d) Les valeurs approchées sont-elles par défaut ou par excès ? Quelles sont les valeurs approchées les plus précises ?

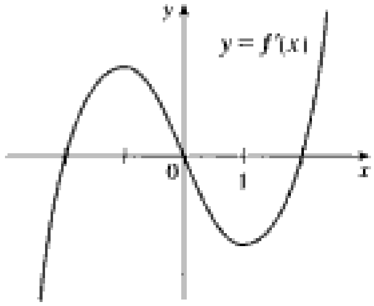
40. Le coût de la vie continue à croître mais moins vite. Traduisez cette remarque en termes de fonction et de ses dérivées.

41. Voici le graphique de la dérivée f' d'une fonction f.

a) Sur quels intervalles f est-elle strictement croissante, strictement décroissante ?

b) En quelles valeurs de x, f passe-t-elle par un maximum local, un minimum local ?

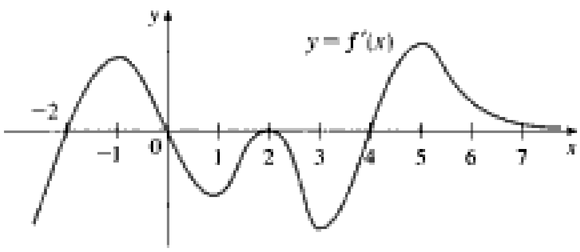
c) S'il est connu que $f(0) = 0$, esquissez un graphique possible de f.



42. La figure exhibe la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f.

a) Dessinez le graphique de f''.

b) Dessinez un graphique possible de f.



43. Tracez le graphique d'une fonction qui satisfait à toutes les conditions :

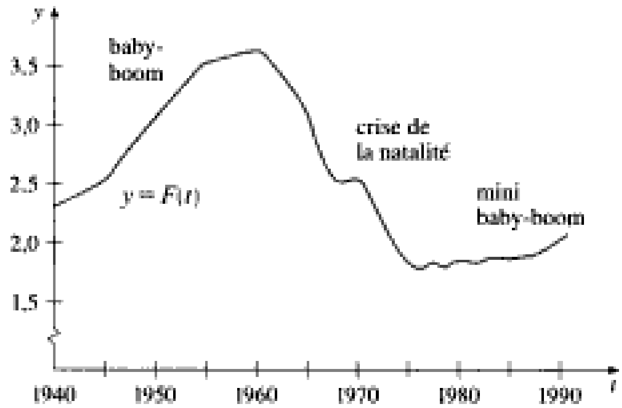
$f(0) = 0$, $f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0$,
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 6} f(x) = -\infty$,
$f'(x) < 0$ sur $]-\infty, -2[$, $]1, 6[$ et $]9, \infty[$,
$f'(x) > 0$ sur $]-2, 1[$ et $]6, 9[$,
$f''(x) > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $]12, \infty[$,
$f''(x) < 0$ sur $]0, 6[$ et $]6, 12[$.

44. On appelle *taux de fertilité total* au temps t, désigné par $F(t)$, le nombre moyen d'enfants par femme (en supposant que le nombre actuel de naissances est constant). Ce taux a fluctué entre 1940 et 1990 aux U.S.A comme le montre le graphique.

a) Estimez les valeurs $F'(1950)$, $F'(1965)$ et $F'(1987)$.

b) Quelle est la signification de ces dérivées ?

c) Voyez vous des raisons qui justifient les valeurs de ces dérivées ?



45. Une voiture se met en route et la distance qu'elle parcourt est mesurée toutes les deux secondes. C'est le tableau ci-après.

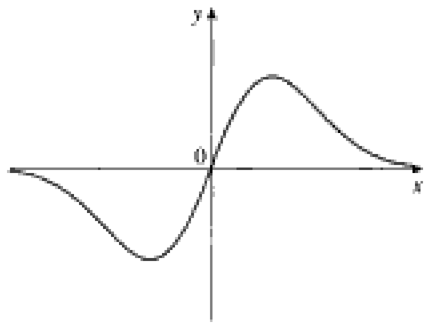
t (secondes)	0	2	4	6	8	10	12	14
s (m)	0	2,5	12	30	55	80	97	112

a) Quelle est la vitesse après 6 secondes ?

b) Estimez les coordonnées du point d'inflexion du graphique de la fonction position.

c) Quel est le sens de ce point d'inflexion ?

46. Étant donné le graphique d'une fonction, dessinez celui de sa primitive F qui satisfait à $F(0) = 0$.



Pleins feux sur la résolution de problèmes

L'une des stratégies que nous avons suggérée lors de notre présentation des principes de la résolution de problèmes était *Introduire quelque chose de nouveau* (voyez page 88). Dans l'exemple qui suit nous voyons comment mettre en pratique ce principe lorsqu'il s'agit de calculer des limites. L'idée générale est de changer de variable— introduire une nouvelle variable qui soit liée à la variable originale— de façon que le problème en devienne plus simple. Plus loin, à la section 5.5, nous ferons appel davantage encore à cette idée générale.

EXEMPLE 1 ■ Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$ où c est une constante.

SOLUTION Telle qu'elle se présente, cette limite semble poser problème. À la section 2.3, nous avons déjà rencontré des calculs de limites dans lesquels numérateur et dénominateur tendaient vers 0. Notre stratégie avait été là d'effectuer certaines manipulations algébriques qui avaient conduit à des simplifications, mais ici, nous ne voyons pas d'emblée quelle manipulation algébrique serait efficace.

Aussi, nous introduisons une nouvelle variable t définie par l'équation

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}.$$

Vu que nous aurons également besoin d'exprimer x en fonction de t, nous résolvons cette équation en t

$$t^3 = 1 + cx, \qquad x = \frac{t^3 - 1}{c}.$$

Remarquons que faire tendre x vers 0 est équivalent à faire tendre t vers 1. Grâce à cela, nous convertissons la limite demandée en x en une limite en t :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1}.\end{aligned}$$

Le changement de variable nous a permis de remplacer une limite assez compliquée par une plus simple et d'un type que nous avons déjà rencontré précédemment. En tant que différence de deux cubes, le dénominateur se factorise

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3}.\end{aligned}$$

Avant de regarder l'exemple 2, cachez-en la solution et essayez de le faire d'abord par vous-même.

EXEMPLE 2 ■ Combien y a-t-il de droites tangentes à la fois à la parabole $y = -1 - x^2$ et $y = 1 + x^2$? Cherchez les coordonnées des points en lesquels ces tangentes touchent les paraboles ?

SOLUTION Pour voir clair dans ce problème il est nécessaire de faire un croquis. On trace donc les paraboles $y = 1 + x^2$ (qui est la parabole standard $y = x^2$ translatée vers le haut d'une unité) et $y = -1 - x^2$ (qui est la symétrique de la première par rapport à

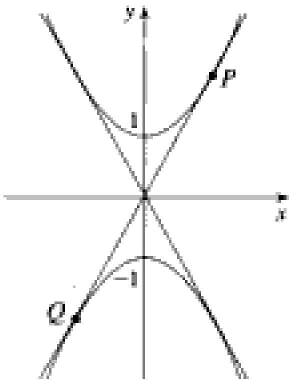


Figure 1

l'axe Ox). En essayant de tirer une tangente commune à ces deux paraboles on voit assez vite qu'il n'y a que deux possibilités (voyez la figure 1).

Soit P un point où l'une de ces tangentes touche la parabole supérieure et soit a son abscisse. Il est important de bien choisir la notation de l'inconnue. (On aurait tout aussi bien pu choisir b ou c ou x_0 ou x_1 au lieu de a. Mais il ne serait pas bon de choisir x au lieu de a parce que x risquerait d'être confondue avec la variable dans l'équation de la parabole). Comme P appartient à la parabole $y = 1 + x^2$, son ordonnée est $1 + a^2$ et à cause de la symétrie que l'on peut voir sur la figure 1, les coordonnées du point Q où la tangente touche la parabole inférieure sont $(-a, -(1 + a^2))$.

Puisqu'il est certain que la droite PQ est une tangente, on égale sa pente avec celle de la tangente en P à la parabole. Cela donne d'une part

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}.$$

et d'autre part, $f'(a)$, la pente de la tangente à $f(x) = 1 + x^2$ en $x = a$. Or, $f'(a) = 2a$ suivant la définition de la dérivée à la section 2.7. L'égalité des deux fournit

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a.$$

On résoud cette équation : $1 + a^2 = 2a^2$, d'où $a^2 = 1$ et $a = \pm 1$. Par conséquent, les points sont $(1, 2)$ et $(-1, -2)$. Par symétrie des paraboles par rapport à l'axe Oy, les deux autres points sont $(-1, 2)$ et $(1, -2)$.

Les problèmes suivants sont censés mettre à l'épreuve et exciter votre habileté à résoudre des problèmes. Certains d'entre eux requièrent un temps de réflexion considérable ; ne vous découragez donc pas si vous ne réussissez pas à les traiter directement. Si vous restez en panne, il pourrait être utile de revenir à l'examen des principes de résolution de problèmes à la page 87.

Problèmes

1. Calculez $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Déterminez les nombres a et b tels que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

3. Calculez $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

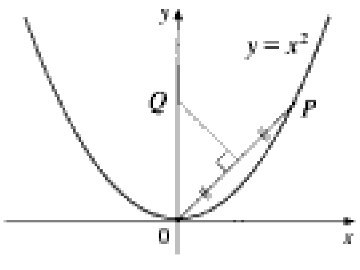


Figure relative au problème 4

4. La figure montre un point P sur la parabole $y = x^2$ et le point Q où la médiatrice de OP coupe l'axe OY. Que fait le point Q lorsque le point P glisse le long de la parabole vers l'origine O ? A-t-il une position limite ? Si oui, trouvez-la.

5. Si $[x]$ désigne la fonction partie entière, déterminez $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{[x]}$.

6. Dessinez la région du plan définie par chacune des équations suivantes.

a) $[x]^2 + [y]^2 = 1$ b) $[x]^2 - [y]^2 = 3$

c) $[x + y]^2 = 1$ d) $[x] + [y] = 1$

7. Trouvez toutes les valeurs de a telles que f soit continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant a \\ x^2 & \text{si } x > a. \end{cases}$$

8. Un **point fixe** d'une fonction f est un nombre c de son domaine de définition tel que $f(c) = c$ (La fonction ne bouge pas de la valeur c, elle reste fixe).

a) Tracez le graphique d'une fonction continue dont le domaine de définition est $[0, 1]$ et l'ensemble image aussi $[0, 1]$. Situez le point fixe.

b) Essayez de dessiner le graphique d'une fonction continue dont le domaine de définition est $[0, 1]$ et l'ensemble image $[0, 1]$ et qui n'ait pas de point fixe. Quel est l'obstacle ?

c) Utilisez le Théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer que toute fonction continue dont le domaine de définition est $[0, 1]$ et l'ensemble image $[0, 1]$ doit avoir un point fixe.

9. a) Si nous partons de la latitude 0° et allons vers l'ouest, nous pouvons noter $T(x)$ la température au point x à un moment donné. En supposant que T est une fonction continue de x, montrer qu'à tout moment fixé il y a au moins deux points diamétralement opposés sur l'équateur où il fait la même température.

b) Le résultat précédent subsiste-t-il pour des points situés sur n'importe quel cercle à la surface de la Terre ?

c) Le résultat de la première partie subsiste-t-il s'il s'agit de la pression atmosphérique ou de l'altitude au-dessus du niveau de la mer ?

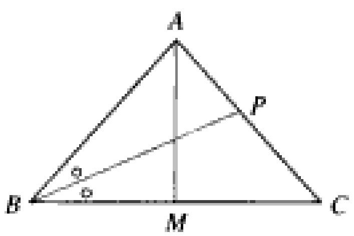


Figure relative au problème 10

10. a) La figure montre un triangle isocèle ABC dont les angles en B et en C sont égaux. La bissectrice de l'angle en B coupe le côté AC au point P. Supposons que la base BC reste fixe mais que la hauteur $|AM|$ du triangle tende vers 0. Le point A tend donc vers le point M milieu de BC. Que fait alors le point P ? A-t-il une position limite ? Si oui, laquelle ?

b) Essayez de tracer la trajectoire suivie par le point P. Trouvez l'équation de cette trajectoire et tracez la courbe grâce à l'équation.

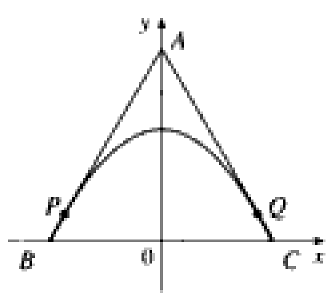


Figure relative au problème 11

11. Déterminez des points P et Q sur la parabole $y = 1 - x^2$ tels que le triangle ABC formé par l'axe Ox et les tangentes à la parabole en P et Q soit équilatéral.

12. De l'eau est versée à débit constant dans un réservoir sphérique. Soit $V(t)$ le volume d'eau présent dans le réservoir et $H(t)$ la hauteur du niveau de l'eau à l'instant t.

a) Quelle signification donner à $V'(t)$ et $H'(t)$? Ces dérivées sont-elles positives, négatives ou nulles ?

b) $V''(t)$ est-elle positive, négative ou nulle ? Expliquez-vous.

c) Si t_1, t_2 et t_3 désignent les moments où le réservoir est rempli au quart, à moitié et au trois-quarts respectivement, les valeurs $H''(t_1)$, $H''(t_2)$ et $H''(t_3)$ sont-elles positives, négatives ou nulles ? Pourquoi ?

13. Supposons que f soit une fonction qui satisfait à l'équation

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

pour tout nombre réel x et y. Supposons encore que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

a) Que vaut $f(0)$? b) Que vaut $f'(0)$? c) Cherchez $f'(x)$.

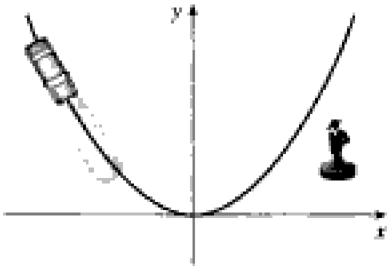


Figure relative au problème 14

14. Une voiture roule la nuit le long d'une route dont le tracé est celui d'une parabole qui a son sommet à l'origine des axes. La voiture démarre d'un point situé à 100 m à l'ouest et 100 m au nord de l'origine et roule vers l'est. Il y a une statue située à 100 m à l'est et 50 m au nord de l'origine. À quel point de la route les phares de la voiture vont-ils illuminer la statue ?

15. Si $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=2$ et $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=1$, calculez $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$.

16. Si f est une fonction dérivable et $g(x)=xf(x)$, montrez à partir de la définition de la dérivée que

$$g'(x)=xf'(x)+f(x).$$

17. Supposons que f soit une fonction telle que $|f(x)|\leqslant x^2$ pour tout x. Montrez que $f(0)=0$. Ensuite, montrez que $f'(0)=0$.

Nous avons vu comment interpréter des dérivées comme des pentes ou des taux de variation. Nous avons vu comment estimer les dérivées de fonctions décrites par des tables de valeurs. Nous avons appris à construire le graphique de la dérivée de fonctions qui ne sont données que graphiquement. En nous servant de la définition de la dérivée, nous avons calculé les dérivées des fonctions décrites par des formules. Mais, ce faisant, nous avons pu nous rendre compte à quel point il serait fastidieux de devoir toujours recourir à la définition. Aussi, dans ce chapitre, nous allons mettre au point des règles de calcul des dérivées qui évitent ce recours à la définition. Ces règles de dérivation nous permettent de calculer facilement les dérivées des polynômes, des fonctions rationnelles, des fonctions exponentielles et logarithmes, des fonctions trigonométriques et de leurs réciproques. Ensuite, nous allons exploiter ces règles de calcul pour résoudre des problèmes de taux de variation, de tangentes à des courbes décrites paramétriquement et d'approximation de fonctions.

3

Les règles de dérivation

3.1 La dérivée des fonctions polynomiales et exponentielles

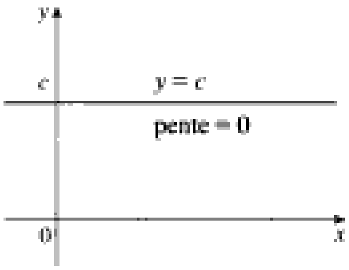


FIGURE 1
Comme le graphique de $f(x) = c$ est la droite $y = c$, $f'(x) = 0$.

Nous allons apprendre dans cette section comment dériver des fonctions constantes, puissances, polynomiales et exponentielles.

Commençons par la plus simple de toutes les fonctions, la fonction constante $f(x) = c$. Le graphique de cette fonction est la droite $y = c$ dont la pente est égale à 0. On a donc $f'(x) = 0$ (voyez la figure 1). Même une démonstration formelle, à partir de la définition, est très facile :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Avec la notation de Leibniz, cette règle s'écrit

Dérivée d'une fonction constante

$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Fonctions puissances

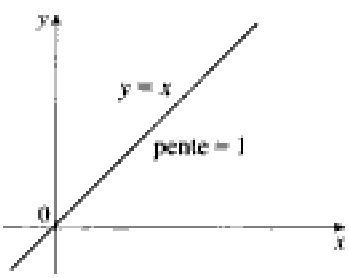


FIGURE 2
Comme le graphique de $f(x) = x$ est la droite $y = x$, $f'(x) = 1$.

Nous nous tournons maintenant vers les fonctions $f(x) = x^n$, où n est un entier strictement positif. Dans le cas $n = 1$, le graphique de $f(x) = x$ est la droite $y = x$ dont la pente vaut 1 (voyez la figure 2)

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1.}$$

(Vous pouvez également retrouver l'équation 1 à partir de la définition de la dérivée.) Nous avons déjà traité les cas $n = 2$ et $n = 3$ à la section 2.8 (exercices 17 et 18) où nous avons établi que

2 $$\boxed{\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.}$$

Le cas $n = 4$ se traite de la manière que voici :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

Finalement,

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3.$$

Si nous relisons les équations (1), (2) et (3), nous voyons émerger une structure, d'après laquelle il serait raisonable de conjecturer que, pour n entier strictement positif, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Il s'avère que cette intuition est exacte.

Règle de dérivation d'une puissance Si n est un entier strictement positif, alors

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Démonstration Si $f(x) = x^n$, alors

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

La formule du binôme de Newton figure sur le formulaire.

Pour trouver la dérivée de x^4 il a fallu développer $(x+h)^4$. Ici, il faut développer $(x+h)^n$ et c'est la formule du binôme de Newton qui en donne l'expression :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]\\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

car tous les termes, sauf le premier, tendent vers 0 à cause de leur facteur h. ■

À l'exemple 1, nous appliquons cette règle en ajoutant des variantes dans les notations.

EXEMPLE 1 ■

a) Si $f(x) = x^6$, alors $f'(x) = 6x^5$. b) Si $y = x^{1000}$, alors $y' = 1000x^{999}$.

c) Si $y = t^4$, alors $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$.

Qu'en est-il pour les fonctions puissances dont les exposants sont des entiers strictement négatifs? À l'exercice 51, nous demandons de vérifier, à partir de la définition de la dérivée, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Cette dernière équation peut être écrite sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)x^{-2},$$

ce qui fait voir que la règle précédente vaut encore dans le cas où $n = -1$. Nous verrons même, dans la section suivante (exercice 41), qu'elle vaut pour tous les entiers strictement négatifs.

Et si l'exposant est une fraction ? À l'exemple 4 de la section 2.8, nous avons établi que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Ce qui montre que la règle de dérivation des puissances est même valable lorsque $n = 1/2$. Nous montrerons à la section 3.7 qu'elle est vraie pour tous les nombres réels n.

Règle de dérivation d'une puissance (version générale) Si n est un nombre réel quelconque, alors

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

La figure 3 montre la fonction y de l'exemple 2(b) et sa dérivée. Remarquez que y n'est pas dérivable en 0 (y' n'y est pas définie). Observez que y' est positive lorsque y croît et négative lorsque y décroît.

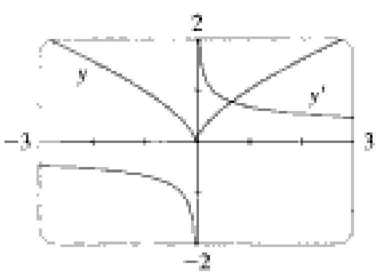


FIGURE 3

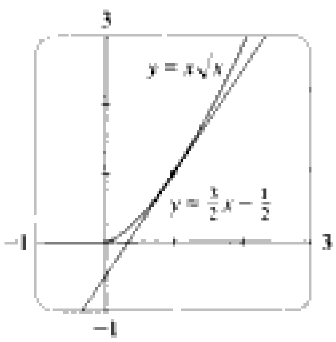


FIGURE 4

EXEMPLE 2 ■ Dérivez

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2}$.

SOLUTION Chaque fois, nous ramenons la formule de définition de la fonction à une simple puissance de x.

a) Comme $f(x) = x^{-2}$, nous appliquons la règle de dérivation d'une puissance dans le cas $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2} = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

EXEMPLE 3 ■ Écrivez une équation de la tangente à la courbe $y = x\sqrt{x}$ au point $(1, 1)$. Illustrez en traçant les graphiques de la courbe et de sa tangente.

SOLUTION La dérivée de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ est

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

La pente de la tangente en $(1, 1)$ est donc égale à $f'(1) = \frac{3}{2}$. Une équation de la tangente est

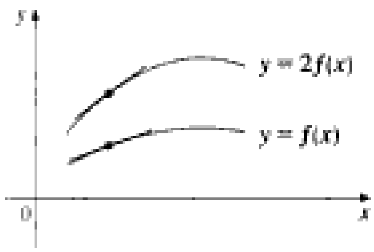
$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Nous montrons la courbe et sa tangente à la figure 4.

De nouvelles dérivées à partir d'anciennes

Lorsque, par addition, soustraction ou multiplication par une constante, une nouvelle fonction est fabriquée à partir d'une ancienne, sa dérivée peut être exprimée en termes de la dérivée de l'ancienne fonction. La première formule dit, par exemple, que *la dérivée d'une fonction multipliée par une constante est la dérivée de la fonction multipliée par la constante.*

Interprétation géométrique de la règle de dérivation du produit par une constante



Le fait de multiplier par $c = 2$ étire le graphique verticalement d'un facteur 2. Toutes les ordonnées sont doublées tandis que les échelles restent inchangées. Donc les pentes sont doublées également.

Règle de dérivation du produit par une constante Si c est une constante et si f est une fonction dérivable, alors

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x).$$

Démonstration Soit $g(x) = cf(x)$. Alors,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{(par la loi 3 des limites)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$ ■

EXEMPLE 4 ■

a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3.$

b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1.$

La règle suivante affirme que *la dérivée d'une somme de fonctions est la somme des dérivées.*

Avec la notation prime, la règle de dérivation d'une somme s'écrit

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Règle de dérivation d'une somme Si f et g sont toutes les deux dérivables, alors

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x).$$

Démonstration Soit $F(x) = f(x) + g(x)$. Alors

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \qquad \text{(par la loi 1)} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$ ■

Cette règle de dérivation de la somme peut être étendue à la somme d'un nombre quelconque de fonctions. Par exemple, en l'utilisant deux fois, on a

$$(f+g+h)' = [(f+g)+h]' = (f+g)' + h' = f' + g' + h'.$$

Si on écrit $f - g$ sous la forme $f + (-1)g$ et qu'on applique la règle de dérivation de la somme et du produit par une constante, on arrive à la formule suivante.

Règle de dérivation d'une différence Si f et g sont toutes les deux dérivables, alors

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x).$$

La combinaison de ces trois règles avec celle de la dérivation d'une puissance permet de dériver n'importe quelle fonction polynomiale, comme le montre l'exemple que voici.

EXEMPLE 5 ■

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\
&\qquad = \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\
&\qquad = 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\
&\qquad = 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6
\end{aligned}$$

EXEMPLE 6 ■ Situez les points de la courbe $y = x^4 - 6x^2 + 4$ en lesquels la tangente est horizontale.

SOLUTION Les tangentes sont horizontales là où la dérivée est nulle. On a

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4) \\
&= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)
\end{aligned}$$

La dérivée s'annule donc en $x = 0$ ou x tel que $x^2 - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = \pm\sqrt{3}$. La courbe donnée admet donc des tangentes horizontales quand $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$. Les points correspondants sont $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$ et $(-\sqrt{3}, -5)$ (voyez la figure 5).

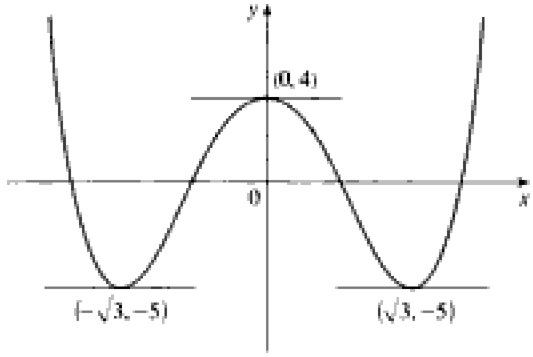


FIGURE 5
La courbe $y = x^4 - 6x^2 + 4$ et ses tangentes horizontales

EXEMPLE 7 ■ L'équation du mouvement d'un mobile est $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, où s est mesuré en centimètres et t en secondes. Calculez la fonction qui donne l'accélération en fonction du temps. Quelle est l'accélération après 2 s ?

SOLUTION Les expressions de la vitesse et de l'accélération sont

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3,$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10.$$

Après 2 s, l'accélération est $a(2) = 14$ cm/s^2.

■ Les fonctions exponentielles

Essayons de calculer la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ à partir de la définition de la dérivée :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h}.$$

Comme le facteur a^x ne dépend pas de h, on peut le placer devant le signe de limite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}.$$

Or, cette limite est la valeur de la dérivée de f en 0, autrement écrit

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = f'(0).$$

Par conséquent, si la fonction exponentielle est dérivable en 0, alors elle est dérivable partout ailleurs et

4 $$f'(x) = f'(0)a^x.$$

Cette équation certifie que *la vitesse de variation d'une quelconque fonction exponentielle est proportionnelle à la fonction elle-même* (la pente est proportionnelle à l'ordonnée).

h	$\frac{2^h - 1}{h}$	$\frac{3^h - 1}{h}$
0,1	0,7177	1,1612
0,01	0,6956	1,1047
0,001	0,6934	1,0992
0,0001	0,6932	1,0987

La table dans la marge apporte un argument numérique à l'existence de $f'(0)$ dans les cas $a = 2$ et $a = 3$. Les valeurs sont correctes jusqu'à la quatrième décimale (Pour le cas $a = 2$, voyez aussi l'exemple 3 de la section 2.7). Il semble bien que la limite existe et

$$\text{dans le cas } a = 2, \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{2^h - 1}{h} \approx 0{,}69,$$

$$\text{dans le cas } a = 3, \qquad f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{3^h - 1}{h} \approx 1{,}10.$$

On peut, en effet, démontrer que ces limites existent et qu'avec 6 décimales correctes, elles valent

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0{,}693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1{,}098612.$$

Suivant l'équation 4, on a donc

5 $$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1{,}10)3^x.$$

La formule 4 de la dérivée d'une fonction exponentielle serait plus simple si la base a était telle que $f'(0) = 1$. Au vu des estimations de $f'(0)$ dans les cas $a = 2$ et $a = 3$, il semble tout à fait possible de trouver un nombre a, entre 2 et 3, tel que $f'(0) = 1$. On désigne habituellement ce nombre par la lettre e. C'est ainsi d'ailleurs que e a été introduit à la section 1.5. Voici sa définition.

Nous allons voir à l'exercice 1 que e est situé entre 2,7 et 2,8. Plus tard, nous pourrons le déterminer avec 5 décimales correctes.

$e \approx 2{,}71828$.

Définition du nombre e

$$e \text{ est le nombre tel que } \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

Géométriquement, cela signifie que, de toutes les fonctions exponentielles $y = a^x$ possibles, la fonction $f(x) = e^x$ est celle dont la tangente en $(0, 1)$ a une pente $f'(0)$ exactement égale à 1 (voyez les figures 6 et 7).

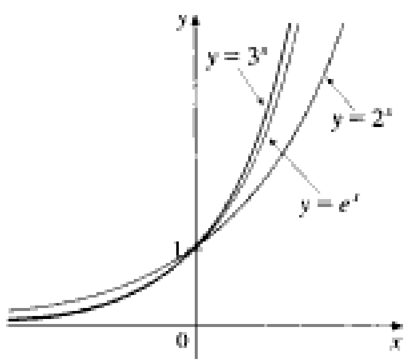


FIGURE 6

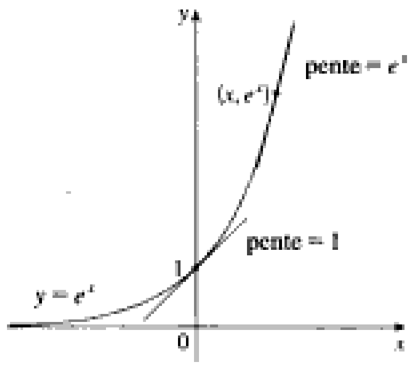


FIGURE 7

Si nous posons $a = e$ dans l'équation 4 et de là $f'(0) = 1$, nous obtenons l'importante formule de dérivation que voici.

Dérivée de la fonction exponentielle

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

La fonction exponentielle possède donc la propriété d'être sa propre dérivée. Géométriquement, cela signifie qu'en chaque point de la courbe $y = e^x$, la pente de la tangente est égale à l'ordonnée du point (voyez la figure 7).

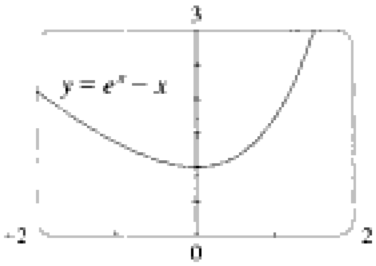


FIGURE 8

EXEMPLE 8 ■ Déterminez les expressions de f' et f'' pour $f(x) = e^x - x$.

SOLUTION Suivant la règle de calcul de la dérivée d'une différence, on a

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1.$$

À la section 2.8, on a défini la dérivée seconde comme la dérivée de la dérivée f'. Ainsi,

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x.$$

Vu que e^x est strictement positive quel que soit x, $f''(x) > 0$ quel que soit x. De ce fait, le graphique de f tourne sa concavité vers le haut sur $]-\infty, +\infty[$, ce que confirme la figure 8.

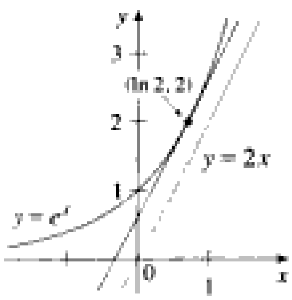


FIGURE 9

EXEMPLE 9 ■ Quel est le point de la courbe $y = e^x$ en lequel la tangente est parallèle à la droite $y = 2x$?

SOLUTION Comme $y = e^x$, $y' = e^x$. Si a désigne l'abscisse du point cherché, il faut qu'en ce point la pente de la tangente, égale à e^a, soit la même que celle de la droite $y = 2x$, à savoir 2. On égale ces pentes et on obtient

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2.$$

Le point cherché est donc $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$ (voyez la figure 9).

3.1 Exercices

1. a) Comment est défini le nombre e ?

   b) À l'aide d'une calculatrice, estimez avec deux décimales correctes, les limites

   $$\lim_{h \to 0} \frac{2{,}7^h - 1}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{2{,}8^h - 1}{h}.$$

   Que pouvez-vous conclure quant à la valeur de e ?

2. a) Tracez, à main levée, le graphique de la fonction $f(x) = e^x$, en étant particulièrement attentif à comment la courbe traverse l'axe Oy. Qu'est-ce qui vous permet de faire cela ?

   b) Dans quelle classe mettez-vous les fonctions $f(x) = e^x$ et $g(x) = x^e$? Comparez les formules de dérivation de f et g.

   c) Laquelle de ces deux fonctions croît le plus vite lorsque x est grand ?

3-20 ■ Dérivez la fonction.

3. $y = x^6$
4. $y = \sqrt[3]{x}$
5. $y = x^{-2/5}$
6. $y = 5e^x + 3$
7. $f(x) = x^2 - 10x + 100$
8. $g(x) = x^{100} + 50x + 1$
9. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$
10. $x(t) = t^8 + 6t^7 - 18t^2 + 2t$
11. $Y(t) = 6t^{-9}$
12. $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$
13. $F(x) = (16x)^3$
14. $H(t) = \sqrt[3]{t}\,(t + 2)$
15. $g(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
16. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$
17. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$
18. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$
19. $y = 3x + 2e^x$
20. $y = e^{x+1} + 1$

21-26 ■ Calculez $f'(x)$. Comparez les graphiques de f et f' et tirez-en argument pour expliquer que votre réponse est vraisemblable.

21. $f(x) = 2x^2 - x^4$
22. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$
23. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$
24. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
25. $f(x) = x - 3x^{1/3}$
26. $f(x) = x^2 + 2e^x$

27. a) En zoomant sur le graphique de $f(x) = x^{2/5}$, faites-vous une idée de la valeur de $f'(2)$.

    b) Par la règle de dérivation d'une puissance, calculez la valeur exacte de $f'(2)$ et comparez-la avec l'estimation que vous en aviez.

28. a) En zoomant sur le graphique de $f(x) = x^2 - 2e^x$, faites-vous une idée de la valeur de $f'(1)$.

b) Par la règle de calcul de la dérivée d'une puissance, calculez la valeur exacte de $f'(1)$ et comparez-la avec l'estimation que vous en aviez.

29-32 ■ Écrivez une équation de la tangente à la courbe donnée au point spécifié. Illustrez en produisant la courbe et la tangente sur le même écran.

29. $y = x + \dfrac{4}{x}$, $(2, 4)$ **30.** $y = x^{5/2}$, $(4, 32)$

31. $y = x + \sqrt{x}$, $(1, 2)$ **32.** $y = x^2 + 2e^x$, $(0, 2)$

33-34 ■ Calculez les dérivées première et seconde de la fonction.

33. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 16x$

34. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

35-36 ■ Calculez les dérivées première et seconde de la fonction. Vérifiez vos réponses en comparant les graphiques de f, f' et f''.

35. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$ **36.** $f(x) = e^x - x^3$

37. Le mouvement d'un mobile est décrit par l'équation $s = t^3 - 3t$, où t est en secondes et s en mètres. Trouvez

a) la vitesse et l'accélération en fonction de t,

b) l'accélération après 2 s,

c) l'accélération au moment où la vitesse est nulle.

38. Le mouvement d'un mobile est décrit par l'équation $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, où t est en secondes et s en mètres.

a) Trouvez la vitesse et l'accélération comme fonction de t.

b) Trouvez l'accélération après 1 s,

c) Montrez les courbes de la position, de la vitesse et de l'accélération sur un même graphique.

. Voici un relevé de la population mondiale au 20ᵉ siècle.

Année	Population (en millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520

Année	Population (en millions)
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

a) Estimez la vitesse de croissance de la population en 1920 et en 1980, en faisant la moyenne des pentes de deux sécantes.

b) À l'exemple 2 de la section 1.7, nous avons trouvé une fonction cubique qui modélisait remarquablement bien ces données :

$$P = at^3 + bt^2 + ct + d$$

où

$a = 2325{,}67$ $b = -1{,}306488 \times 10^7$

$c = 2{,}44631 \times 10^{10}$ $d = -1{,}52658 \times 10^{13}$

Servez-vous de cette expression pour obtenir un modèle de la vitesse de croissance de la population mondiale au 20ᵉ siècle.

c) Quelle est, selon le modèle de la partie b), la vitesse de croissance en 1920 et en 1980 ? Comparez vos réponses avec celles de la partie a).

d) Estimez la vitesse de croissance en 1985.

40. Le taux d'intérêt des bons d'État est une fonction du temps. La table ci-dessous donne une valeur moyenne de ce taux d'intérêt $I(t)$ pour une période de 9 années (en pour cent par an).

t	1983	1984	1985	1986	1987
$I(t)$	8,62	9,57	7,49	5,97	5,83
t	1988	1989	1990	1991	1992
$I(t)$	6,67	8,11	7,51	5,41	3,46

a) Construisez sur ces données un modèle polynomial du quatrième degré selon les méthodes de la section 1.7.

b) Déduisez-en un modèle pour $I'(t)$.

c) Estimez la vitesse de variation des taux d'intérêt en 1988 et en 1991.

d) Dessinez les points et les modèles de I et de I'.

41. Sur quel intervalle la fonction $f(x) = 1 + 2e^x - 3x$ est-elle strictement croissante ?

42. Sur quel intervalle la fonction $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$ est-elle convexe ?

43. Cherchez les points de la courbe $y = x^3 - x^2 - x + 1$ en lesquels la tangente est horizontale.

44. Pour quelles valeurs de x le graphique de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ a-t-il une tangente horizontale ?

45. Montrez que la courbe $y = 6x^3 + 5x - 3$ n'a jamais une tangente de pente 4.

46. En quel point de la courbe $y = 1 + 2e^x - 3x$, la tangente est-elle parallèle à la droite $3x - y = 5$? Illustrez en dessinant la courbe et les deux droites.

47. Faites un croquis qui montre qu'il y a deux droites tangentes à la parabole $y = x^2$ qui passent par le point $(0, -4)$. En quels points ces droites touchent-elles la parabole ?

48. Écrivez les équations des deux droites qui passent par le point $(2, -3)$ et qui sont tangentes à la parabole $y = x^2 + x$.

49. La **normale** à une courbe C en un point P est, par définition, la droite qui passe par P et qui est perpendiculaire à la tangente à la courbe en P. Écrivez une équation de la normale à la parabole $y = 1 - x^2$ au point $(2, -3)$. Faites un dessin de la parabole et de sa normale.

50. En quel point la normale à la parabole $y = x - x^2$ au point $(1, 0)$ recoupe-t-elle une seconde fois la parabole ? Illustrez par un schéma.

51. Démontrez en utilisant la définition de la dérivée que si $f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$. (Ceci prouve la règle de calcul de la dérivée d'une puissance dans le cas $n = -1$.)

52. Trouvez l'expression de la dérivée n^e de la fonction en calculant les quelques premières dérivées et en observant la régularité qui s'en dégage.

a) $f(x) = x^n$ b) $f(x) = 1/x$

53. Découvrez un polynôme du second degré P tel que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ et $P''(2) = 2$.

54. L'équation $y'' + y' - 2y = x^2$ s'appelle une **équation différentielle** car elle implique une fonction inconnue y et ses dérivées y' et y''. Déterminez des constantes A, B et C telles que la fonction $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfasse à cette équation (Les équations différentielles seront étudiées en détail au chapitre 7).

55. a) À la section 2.10, nous avons défini que F était une primitive de f si $F' = f$. Essayez de trouver une primitive de $f(x) = x^2$. Ensuite, vérifiez votre réponse en la dérivant. Combien de primitives f a-t-elle ?

b) Trouvez une primitive de $f(x) = x^3$ et de $f(x) = x^4$.

c) Trouvez une primitive de $f(x) = x^n$, $(n \neq -1)$. Vérifiez en dérivant.

56. Utilisez le résultat de l'exercice 55 c) pour trouver une primitive de chaque fonction.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = e^x + 8x^3$.

57. Une parabole d'équation $y = ax^2 + bx$ admet en $(1, 1)$ une tangente d'équation $y = 3x - 2$. Précisez l'équation de la parabole.

58. On trace une tangente en un point P à l'hyperbole $xy = c$.

a) Démontrez que le point milieu du segment de cette tangente limité par les intersections avec les axes de coordonnées est le point P.

b) Démontrez que le triangle formé par la tangente et les axes de coordonnées a toujours la même aire, quel que soit le point P sur l'hyperbole.

59. Calculez $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

60. Faites un dessin de deux droites perpendiculaires qui se coupent sur l'axe Oy et qui sont tangentes à la parabole $y = x^2$. Où ces deux droites se coupent-elles ?

3.2 Les règles de dérivation du produit et du quotient

Les formules de cette section vont nous permettre de dériver de nouvelles fonctions, construites à partir d'anciennes par multiplication et division.

■ Règle de dérivation du produit

Par analogie avec les règles de dérivation de la somme et de la différence, on pourrait être, comme le fut Leibniz il y a trois siècles, tenté de conjecturer que la dérivée d'une produit de fonctions est le produit des dérivées. On peut voir très vite sur un exemple très simple que c'est faux. Soit $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Alors, par la règle de dérivation d'une puissance, $f'(x) = 1$ et $g'(x) = 2x$. Mais $(fg)(x) = x^3$, et donc, $(fg)'(x) = 3x^2$. Par conséquent, $(fg)' \neq f'g'$. La formule correcte a été découverte par Leibniz (peu de temps après sa fausse idée de départ) et est appelée Règle de dérivation du produit.

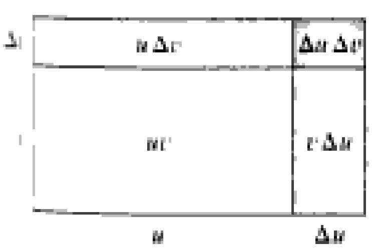


FIGURE 1
La géométrie de la Règle de dérivation du produit

Avant de l'énoncer, on essaie de la découvrir. Dans le cas où $u = f(x)$ et $v = g(x)$ sont toutes deux des fonctions strictement positives, on peut voir le produit uv comme l'aire d'un rectangle (voyez la figure 1). Quand x change d'une quantité Δx, alors u et v en subissent les changements correspondants

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

et la nouvelle valeur du produit, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, peut être vue comme l'aire du plus grand rectangle de la figure 1 (à condition que Δu et Δv soient positifs).

L'aire du rectangle s'est agrandie de

1 $$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$
$$= \text{ la somme des aires des trois rectangles ombrés.}$$

Si on divise par Δx, on obtient

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

On fait maintenant tendre Δx vers 0 pour arriver à la dérivée de uv :

Rappelez-vous que dans la notation de Leibniz, la définition de la dérivée s'écrit

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

2 $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Remarquez que $\Delta u \to 0$ quand $\Delta x \to 0$ car f est dérivable et par conséquent continue.)

Bien que, pour les besoins de l'interprétation géométrique, on ait supposé au départ que toutes les quantités étaient positives, l'équation 1 n'en est pas pour autant moins vraie en dehors de cette hypothèse et comme les règles d'algèbre utilisées par la suite sont elles aussi valables, que u, v, Δu et Δv soient positifs ou négatifs, on a en fait démontré l'équation 2, reconnue comme la règle de dérivation du produit pour deux fonctions dérivables u et v.

Règle de dérivation du produit Si f et g sont des fonctions dérivables, alors

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)].$$

Cette règle s'énonce : *pour dériver un produit de deux fonctions, il faut multiplier la première fonction par la dérivée de la deuxième et ajouter la deuxième fonction multipliée par la dérivée de la première.*

EXEMPLE 1 ■ Une société de téléphone souhaite connaître le nombre de nouveaux raccordements téléphoniques qu'elle devra effectuer durant le prochain mois. Au début du mois de janvier 1997, elle a 100 000 abonnés qui ont chacun, en moyenne 1,2 ligne téléphonique. La société estime que son nombre d'abonnés augmente de 1 000 par mois. En interrogeant ses abonnés existants, la société a appris que chacun avait l'intention d'installer une moyenne de 0,01 nouvelle ligne avant la fin janvier. Estimez le nombre de nouvelles lignes que la société devra installer en janvier 1997 en calculant la vitesse de croissance du nombre de lignes au début janvier.

SOLUTION Soit $s(t)$ le nombre d'abonnés et soit $n(t)$ le nombre de lignes par abonné au moment t, où t est mesuré en années et où $t = 0$ correspond au début de l'année 1997. Le nombre total de lignes est alors donné par

$$L(t) = s(t)n(t).$$

et il est demandé d'évaluer $L'(0)$. En appliquant la règle de dérivation du produit, on a

$$L'(t) = \frac{d}{dt}[s(t)n(t)] = s(t)\frac{d}{dt}n(t) + n(t)\frac{d}{dt}s(t).$$

On sait que $s(0) = 100\,000$ et que $n(0) = 1{,}2$. La société estime à propos des taux de croissance que $s'(0) \approx 1000$ et que $n'(0) \approx 0{,}01$. De là,

$$\begin{aligned} L'(0) &= s(0)n'(0) + n(0)s'(0) \\ &\approx 100\,000 \cdot 0{,}01 + 1{,}2 \cdot 1\,000 = 2\,200. \end{aligned}$$

La société doit donc se préparer à installer environ 2 200 nouvelles lignes durant le mois de janvier 1997.

Remarquez que les deux termes qui composent la règle de dérivation du produit proviennent de sources différentes — anciens abonnés et nouveaux abonnés. La première contribution à L' est le nombre d'abonnés (100 000) multiplié par la vitesse à laquelle ceux-ci commandent de nouvelles lignes (environ 0,01 par abonné et par mois). La seconde est le nombre moyen de lignes par abonné (1,2 au début du mois) multiplié par le taux d'accroissement des abonnés (1 000 par mois).

EXEMPLE 2 ■

a) Soit $f(x) = xe^x$. Cherchez l'expression de $f'(x)$.

b) Calculez l'expression de la n^e dérivée.

SOLUTION

a) Par application de la Règle de dérivation du produit, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\ &= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x. \end{aligned}$$

b) Par une deuxième application de la Règle de dérivation du produit, on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] = (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1) \\ &= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x. \end{aligned}$$

De nouvelles applications de la Règle de dérivation du produit conduisent à

$$f'''(x) = (x+3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x+4)e^x.$$

On remarque que chaque dérivation supplémentaire a pour effet d'ajouter un terme e^x. Donc

$$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

La figure 2 montre le graphique de la fonction f à l'exemple 2 et celui de sa dérivée f'. Remarquez que $f'(x)$ est strictement positive quand f est croissante et strictement négative quand f est décroissante.

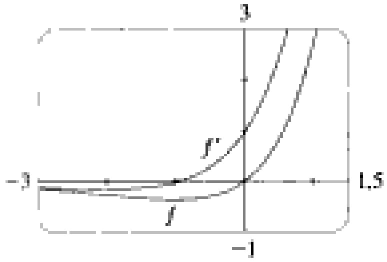


FIGURE 2

EXEMPLE 3 ■ Dérivez la fonction $f(t) = \sqrt{t}(1-t)$.

SOLUTION 1 Par la règle de dérivation du produit, on a

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(1-t) + (1-t)\frac{d}{dt}\sqrt{t} \\ &= \sqrt{t}\,(-1) + (1-t)\cdot\tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= -\sqrt{t} + \frac{1-t}{2\sqrt{t}} = \frac{1-3t}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUTION 2 La loi des exposants permet de récrire $f(t)$,

$$f(t) = \sqrt{t} - t\sqrt{t} = t^{1/2} - t^{3/2},$$

et de dériver directement sans faire appel à la Règle de dérivation du produit,

$$f'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2} - \frac{3}{2}t^{1/2}.$$

Ce résultat est équivalent à celui de la solution 1.

L'exemple 3 était là pour montrer qu'il est parfois préférable de simplifier un produit de fonctions plutôt que d'utiliser la Règle de dérivation du produit. Celle-ci était néanmoins la seule méthode possible à l'exemple 2.

EXEMPLE 4 ■ On donne $f(x) = \sqrt{x}\, g(x)$, $g(4) = 2$ et $g'(4) = 3$. Calculez $f'(4)$.

SOLUTION Par la Règle de dérivation du produit, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\, g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + g(x)\cdot \tfrac{1}{2}x^{-1/2} \\ &= \sqrt{x}\, g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

D'où,

$$f'(4) = \sqrt{4}\, g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \frac{2}{2\cdot 2} = 6{,}5.$$

Règle de dérivation du quotient

On suppose que les fonctions f et g sont dérivables. Si on y ajoute l'hypothèse préalable que la fonction quotient $F = f/g$ est dérivable, alors, il n'est pas difficile de trouver une expression de F' en fonction de f' et g'.

Comme $F(x) = f(x)/g(x)$, on peut écrire $f(x) = F(x)g(x)$ et appliquer ici la Règle de dérivation du produit :

$$f'(x) = F(x)g'(x) + g(x)F'(x).$$

On résout ensuite cette équation par rapport à $F'(x)$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Bien que cette formule ait été établie sous l'hypothèse que F était dérivable, on peut la démontrer sans elle (voyez l'exercice 42).

Règle de dérivation du quotient Si f et g sont des fonctions dérivables, alors

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

Cette règle s'énonce : *pour dériver un quotient de deux fonctions, il faut multiplier la dérivée de la fonction du numérateur par la fonction du dénominateur, soustraire le produit de la fonction du numérateur par la dérivée de la fonction du dénominateur, et diviser le tout par le carré de la fonction du dénominateur.*

Grâce à cette Règle de dérivation du quotient et aux autres formules de dérivation, nous sommes à même de dériver n'importe quelle fonction rationnelle, comme le montre l'exemple suivant.

On peut vérifier si la réponse de cet exemple est plausible en utilisant un outil graphique. La figure 3 montre les graphiques de la fonction de l'exemple 5 et de sa dérivée. Remarquez que quand y croît rapidement (près de -2), y' est grand. Et quand y croît lentement, y' est proche de 0.

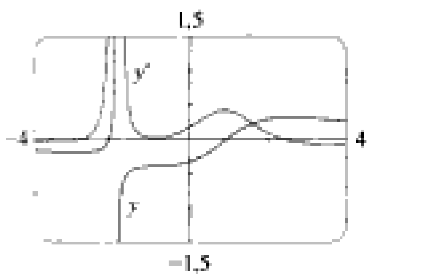


FIGURE 3

EXEMPLE 5 ■ Soit $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$.

Alors,

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}.$$

EXEMPLE 6 ■ Écrivez une équation de la tangente à la courbe $y = e^x/(1 + x^2)$ au point $(1, e/2)$.

SOLUTION Suivant la Règle de dérivation du quotient,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}.$$

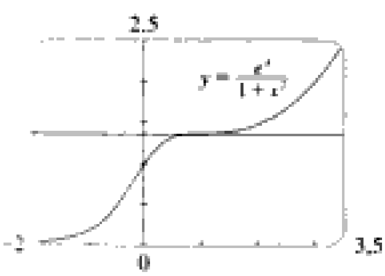


FIGURE 4

La pente de la tangente en $(1, e/2)$ est donc

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0.$$

Ce qui signifie que la tangente est horizontale et son équation est alors $y = e/2$ (remarquez sur la figure 4 que la fonction est croissante et traverse sa tangente en $(1, e/2)$).

REMARQUE ● N'utilisez pas la Règle de dérivation du quotient *chaque fois* que vous avez un quotient à dériver. Il convient parfois de récrire d'abord le quotient sous une forme plus simple avant de dériver. Par exemple, bien qu'il soit possible de dériver la fonction

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x},$$

par la Règle de dérivation du quotient, il est beaucoup plus court d'effectuer d'abord la division et d'écrire la fonction sous la forme

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

avant de procéder à la dérivation.

3.2 Exercices

1. Calculez de deux manières différentes la dérivée de $y = (x^2+1)(x^3+1)$: par la Règle de dérivation du produit et en effectuant d'abord la multiplication. Montrez que vos réponses sont les mêmes.

2. Calculez de deux manières différentes la dérivée de

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

par la Règle de dérivation du quotient et en simplifiant d'abord la fraction. Vos réponses sont-elles les mêmes ?

3-18 ■ Calculez la dérivée de la fonction.

3. $f(x) = x^2 e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $h(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

8. $f(u) = \dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$

9. $G(s) = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$

10. $g(x) = (1 + \sqrt{x})(x - x^3)$

11. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

12. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

13. $y = (r^2 - 2r)e^r$

14. $y = \dfrac{u^2 - u - 2}{u + 1}$

15. $y = \dfrac{1}{x^4 + x^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{e^x}{x + e^x}$

17. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

18. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

19. a) La courbe $y = 1/(1 + x^2)$ porte le nom de **sorcière de Maria Agnesi**. Trouvez une équation de la tangente à cette courbe au point $(-1, \frac{1}{2})$.

b) Illustrez la partie a) en produisant le graphique de la courbe et de sa tangente dans une même fenêtre.

20. a) La courbe $y = x/(1 + x^2)$ porte le nom de **cubique serpentine** ou **Anguinéa**. Trouvez une équation de la tangente à cette courbe au point $(3; 0{,}3)$.

b) Illustrez la partie a) en produisant le graphique de la courbe et de sa tangente dans une même fenêtre.

21. a) Calculez la dérivée de $f(x) = e^x/x^3$.

b) Vérifiez si votre réponse à la partie a) est plausible en comparant les graphiques de f et f'.

22. a) Calculez la dérivée de $f(x) = x/(x^2 - 1)$.

b) Vérifiez si votre réponse à la partie a) est plausible en comparant les graphiques de f et f'.

23. a) Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ si $f(x) = (x - 1)e^x$.

b) Vérifiez si votre réponse à la partie a) est plausible en comparant les graphiques de f, f' et f''.

24. a) Calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ si $f(x) = x/(x^2 + 1)$.

b) Vérifiez si votre réponse à la partie a) est plausible en comparant les graphiques de f, f' et f''.

25. On suppose que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ et $g'(5) = 2$. Quelles sont les valeurs de a) $(fg)'(5)$, b) $(f/g)'(5)$ et c) $(g/f)'(5)$?

26. Si $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$ et $g'(3) = 5$, calculez les nombres suivants.

a) $(f + g)'(3)$ b) $(fg)'(3)$

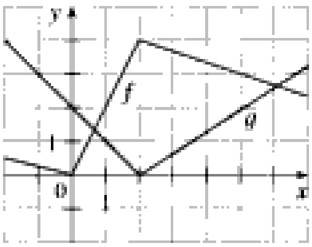
c) $(f/g)'(3)$ d) $\left(\dfrac{f}{f - g}\right)'(3)$

27. Calculez $f'(0)$ sachant que $f(x) = e^x g(x)$, $g(0) = 2$ et $g'(0) = 5$.

28. Si $h(2) = 4$ et $h'(2) = -3$, calculez

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}.$$

29. Soit $u(x) = f(x)g(x)$ et $v(x) = f(x)/g(x)$, où f et g sont les fonctions données par leur graphique.
a) Que vaut $u'(1)$? b) Que vaut $v'(5)$?



30. Sous l'hypothèse que f est une fonction dérivable, cherchez une expression de la dérivée de chaque fonction.

a) $y = x^2 f(x)$ b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

31. Cet exercice consiste à estimer le taux auquel s'élève le revenu total d'une certaine région bien délimitée d'Europe occidentale. En juillet 1993, la population de cette zone s'élevait à 3 354 000 habitants et cette population augmentait grosso modo de 45 000 unités par an. Le revenu annuel moyen était de 21 107 euros par habitant et cette moyenne croissait d'environ 1 900 euros par an (bien au-dessus de la moyenne nationale d'environ 660 euros par an). Utilisez la Règle de dérivation du produit et ces chiffres pour estimer la vitesse d'augmentation du revenu annuel dans cette région en juillet 1993. Expliquez la signification de chacun des termes issus de la règle de dérivation.

32. Une usine fabrique des rouleaux de tissu. Comme la quantité q de tissus (mesurée en nombre de mètres) vendue est une fonction du prix de vente p (en euros par mètre), nous pouvons écrire $q = f(p)$. La recette que procure la vente au prix p est exprimé par $R(p) = pf(p)$.
a) Que signifie $f(20) = 10\,000$ et $f'(20) = -350$?
b) Sur la base des chiffres de la partie 1, calculez $R'(20)$ et interprétez votre résultat.

33. Sur quel intervalle la fonction $f(x) = x^3e^x$ est-elle strictement croissante?

34. Sur quel intervalle la fonction $f(x) = x^2e^x$ est-elle concave?

35. Combien la courbe $y = x/(x + 1)$ a-t-elle de tangentes qui passent par le point $(1, 2)$? En quels points ces tangentes touchent-elles la courbe?

36. Déterminez les tangentes à la courbe $y = (x - 1)/(x + 1)$ qui sont parallèles à la droite $x - 2y = 2$.

37. a) Démontrez, en appliquant deux fois la Règle de dérivation du produit, que si f, g et h sont des fonctions dérivables, alors

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

b) Montrez que, dans le cas particulier $f = g = h$ de la partie a),

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

c) Utilisez la formule de la partie b) pour dériver $y = e^{3x}$.

38. a) Si $F(x) = f(x)g(x)$ et si f et g ont des dérivées de tous ordres, démontrez que

$$F'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

b) Trouvez une formule analogue pour F''' et $F^{(4)}$.
c) Conjecturez une formule pour $F^{(n)}$.

39. Calculez les cinq premières dérivées de $f(x) = x^2e^x$. Voyez-vous se dégager une régularité dans vos résultats? Conjecturez une formule pour $f^{(n)}(x)$ et démontrez-la par récurrence.

40. a) Démontrez la **Règle de dérivation de l'inverse** à partir de la définition de la dérivée : si g est dérivable, alors

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

b) Quel résultat donne l'application de cette règle à la fonction de l'exercice 15 ?

41. Par la **Règle de dérivation de l'inverse**, vérifiez que la règle de dérivation des puissances est bien valable lorsque l'exposant est un entier strictement négatif, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1},$$

pour tout entier positif n.

42. Démontrez la Règle de dérivation du quotient à partir de la Règle de dérivation du produit et de l'inverse.

3.3 Le taux de variation en sciences naturelles et en sciences sociales

Rappelez-vous qu'à la section 2.7 nous avons interprété la dérivée dy/dx d'une fonction $y = f(x)$ comme le taux de variation de y par rapport à x. Nous allons passer en revue dans cette section quelques applications de cette notion en physique, chimie, biologie, économie et dans d'autres disciplines encore.

Rappelons l'idée de base des taux de variation. Lorsque x passe de x_1 à x_2, sa variation est égale à

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

et la variation de y qui en résulte est égale à

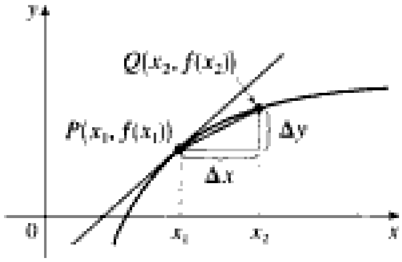
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1).$$

Le quotient des différences

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

est le **taux moyen de variation de** y **par rapport à** x sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ et peut être vu comme la pente de la sécante PQ dans la figure 1. Sa limite, lorsque $\Delta x \to 0$, est la dérivée $f'(x_1)$, qui peut être interprétée comme le **taux de variation instantané de** y **par rapport à** x en $x = x_1$ ou comme la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$. Avec la notation de Leibniz, ce processus s'écrit

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



m_{PQ} = taux moyen de variation
$m = f'(x_1)$ = taux de variation instantané

FIGURE 1

Chaque fois que la fonction $y = f(x)$ a une interprétation propre à l'une de ces sciences, sa dérivée aura elle aussi une inteprétation particulière en tant que taux de variation. (Ainsi que nous l'avons dit à la section 2.6, les unités en lesquelles s'exprime dy/dx sont les unités de y divisées par les unités de x). Nous allons maintenant examiner quelques-unes de ces interprétations en sciences naturelles et en sciences sociales.

Physique

Si la position d'un objet animé d'un mouvement rectiligne est donnée par $s = f(t)$, alors $\Delta s/\Delta t$ représente la vitesse moyenne sur un intervalle de temps Δt, et $v = ds/dt$ représente la **vitesse** instantanée (le taux de variation du déplacement par rapport au temps). Tout ceci a été étudié dans les sections 2.6 et 2.7, mais maintenant que nous connaissons les formules de dérivation, nous sommes capables de résoudre beaucoup plus facilement des problèmes de vitesse.

EXEMPLE 1 ■ La position d'un objet en mouvement est donnée par l'équation

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t,$$

où s est mesuré en mètres et t en secondes.

a) Trouvez la vitesse au moment t.
b) Quelle est la vitesse après 2 s ? Après 4 s ?
c) Quand l'objet est-il au repos ?
d) Quand l'objet avance-t-il (c'est-à-dire a-t-il une direction positive) ?
e) Dessinez un diagramme qui représente le mouvement de l'objet.
f) Calculez la distance totale parcourue pendant les 5 premières secondes.
g) Quelle est l'accélération au temps t et après 4 s ?
h) Dessinez les fonctions de position, vitesse et accélération pour $0 \leqslant t \leqslant 5$.
i) Quand l'objet accélère-t-il ? Ralentit-il ?

SOLUTION

a) La fonction vitesse est la dérivée de la fonction position

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t.$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9.$$

b) La vitesse après 2 s est la vitesse instantanée quand $t = 2$, c'est-à-dire

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}.$$

La vitesse après 4 s est

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}.$$

c) L'objet est au repos quand $v(t) = 0$, autrement dit, quand

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0,$$

et cela arrive en $t = 1$ ou en $t = 3$. L'objet s'arrête après 1 s et après 3 s.

d) L'objet avance lorsque $v(t) > 0$,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0.$$

Cette inégalité est vérifiée lorsque les deux facteurs sont strictement positifs ($t > 3$) ou tous les deux négatifs ($t < 1$). L'objet avance donc pendant la première seconde et après la troisième. Il recule quand $1 < t < 3$.

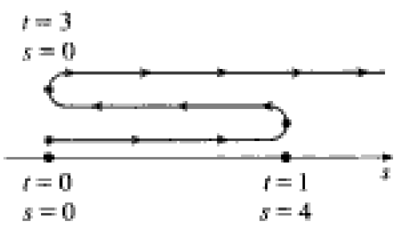


FIGURE 2

e) Le schéma de la figure 2 est une manière d'illustrer le mouvement.

f) À cause de ce que nous avons appris dans les parties d) et e), nous devons calculer les distances parcourues séparément sur les intervalles $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $[3, 5]$.

La distance parcourue pendant la première seconde est égale à

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}.$$

Entre $t = 1$ et $t = 3$, la distance parcourue est égale à

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}.$$

Entre $t = 3$ et $t = 5$, la distance parcourue est égale à

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}.$$

Au total, l'objet fait 4+4+20=28 m.

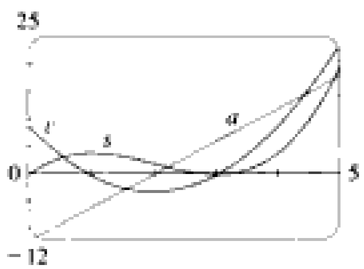


FIGURE 3

g) L'accélération est la dérivée de la fonction vitesse :

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12.$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2.$$

h) La figure 3 montre les graphiques de s, v et a.

i) L'objet accélère quand la vitesse est positive et croissante (v et a tous deux strictement positifs) ou quand la vitesse est négative et décroissante (v et a tous deux strictement négatifs). En d'autres mots, l'objet accélère lorsque vitesse et accélération sont de même signe (l'objet est poussé dans la même direction que celle de son mouvement). Sur la figure, nous voyons que c'est le cas pour $1 < t < 2$ et pour $t > 3$. Par contre, l'objet ralentit quand v et a sont de signes opposés, à savoir pour $0 \leqslant t < 1$ et pour $2 < t < 3$. La figure 4 présente une récapitulation de tout le mouvement.

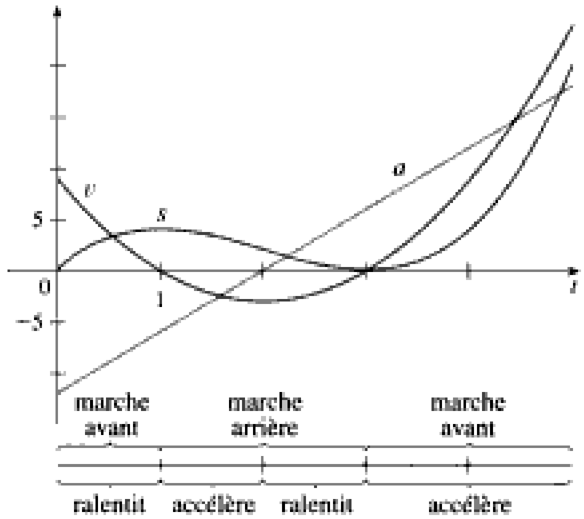


FIGURE 4

EXEMPLE 2 ■ Quand une tige ou un morceau de câble est homogène, sa densité linéaire, définie comme sa masse par unité de longueur ($\rho = m/l$), est uniforme. (Elle se mesure en kg par m.) Supposons au contraire que la tige n'est pas homogène et que sa masse mesurée de l'extrême gauche jusqu'à un point x, comme montré à la figure 5, soit donnée par $m = f(x)$.

FIGURE 5 $f(x)$ est la masse de cette partie de la tige.

Comme la masse de la portion de tige située entre x_1 et x_2 est donnée par $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, la densité moyenne de cette partie vaut

$$\text{densité moyenne} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Faire tendre Δx vers 0 revient à calculer la densité moyenne sur des intervalles de plus en plus petits. La **densité linéaire** ρ en x_1 est la limite des ces densités moyennes lorsque Δx tend vers 0 ; en d'autres mots, la densité linéaire est le taux de variation de la masse par rapport à la longueur. Symboliquement

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}.$$

Ainsi, la densité linéaire de la tige est la dérivée de la masse par rapport à la longueur.

Si, par exemple, la masse en fonction de la longueur est exprimée par $m = f(x) = \sqrt{x}$, où x est mesuré en mètres et m en kilogrammes, la densité moyenne de la portion de tige allant de 1 à 1,2 vaut

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1{,}2) - f(1)}{1{,}2 - 1} = \frac{\sqrt{1{,}2} - 1}{0{,}2} \approx 0{,}48 \text{ kg/m},$$

tandis que la densité en $x = 1$ est égale à

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0{,}50 \text{ kg/m}.$$

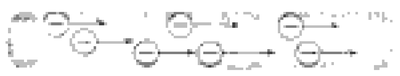


FIGURE 6

EXEMPLE 3 ■ Il y a courant lorsque des charges électriques sont en mouvement. La figure 6 montre un tronçon de fil et des électrons qui traversent une surface plane ombrée. Si ΔQ est la charge nette qui passe à travers cette surface pendant un intervalle de temps Δt, alors le courant moyen sur cet intervalle de temps est défini par

$$\text{courant moyen} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}.$$

Si nous envisageons la limite de ce courant moyen sur des intervalles de temps de plus en plus courts, nous obtenons ce qui est appelé le **courant** I à un moment donné t_1 :

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$

Le courant est donc la vitesse à laquelle le flux d'électrons franchit la surface. Il se mesure en unités de charge par unité de temps (souvent des coulombs par seconde, ou ampères).

Vitesse, densité et courant ne sont pas les seuls taux de variation importants en physique, citons encore la puissance (vitesse à laquelle s'effectue un travail), le taux d'écoulement de la chaleur, le gradient de température (taux de variation de la température par rapport à la position), le taux de désintégration radioactive en physique nucléaire.

■ Chimie

EXEMPLE 4 ■ Une réaction chimique est le phénomène qui donne naissance à une ou plusieurs substances (appelées produits) à partir d'une ou plusieurs substances initiales (appelées réactants). Par exemple, l'équation

$$2H_2 + O_2 \longrightarrow 2H_2O$$

indique que deux molécules d'hydrogène et une molécule d'oxygène forment deux molécules d'eau. Considérons la réaction

$$A + B \longrightarrow C$$

où A et B sont les réactants et C, le produit. La **concentration** d'un réactant A est le nombre de moles ($6{,}022 \times 10^{23}$) par litre et est notée [A]. Comme la concentration change au cours d'une réaction, [A], [B] et [C] sont toutes des fonctions du temps t.

Le taux moyen de réaction du produit C entre les instants t_1 et t_2 est donné par

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Mais ce qui intéresse les chimistes, c'est le **taux instantané de réaction,** qui s'obtient en prenant la limite du taux moyen de réaction quand l'intervalle de temps Δt tend vers 0 :

$$\text{taux de réaction} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}.$$

Comme la concentration de la substance produite augmente pendant le processus de réaction, la dérivée $d[\mathrm{C}]/dt$ sera positive et donc aussi la vitesse de réaction de C. Les concentrations des réactants, en revanche, décroissent durant la réaction, et donc pour rendre les vitesses de réaction de A et B positives, nous affectons d'un signe moins les dérivées $d[\mathrm{A}]/dt$ et $d[\mathrm{B}]/dt$. Comme [A] et [B] décroissent chacune à la même vitesse que [C], on a

$$\text{vitesse de réaction} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}.$$

De façon générale, pour une réaction de la forme

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \longrightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D},$$

on a

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}.$$

Pour déterminer la vitesse de réaction il existe des méthodes graphiques (voyez l'exercice 16). Dans certains cas, la vitesse de réaction permet de trouver des formules explicites des concentrations comme fonction du temps (voyez les exercices 7.4).

EXEMPLE 5 ■ La compressibilité est une variable intéressante étudiée en thermodynamique. Lorsqu'une substance est maintenue à température constante, son volume V dépend de sa pression P. On peut donc envisager le taux de variation du volume par rapport à la pression– autrement dit dV/dP. Lorsque P augmente, V diminue et donc $dV/dP < 0$. La compressibilité est définie en introduisant un signe $-$ devant cette dérivée et en divisant par le volume V :

$$\text{compressibilité isothermale} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}.$$

Ainsi, β mesure à quelle vitesse, par unité de volume, le volume d'une substance diminue lorsque la pression exercée sur elle augmente, à température inchangée.

Par exemple, on a trouvé que le volume (mesuré en mètres cubes) d'un échantillon d'air à 25°C était lié à la pression P (mesurée en kilopascals) selon l'équation

$$V = \frac{5{,}3}{P}.$$

La vitesse de variation de V par rapport à P quand $P = 50$ kPa est égale à

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5,3}{P^2}\right|_{P=50}$$
$$= -\frac{5,3}{2500} = -0,00212 \text{ m}^3/\text{kPa}.$$

Dès lors, la compressibilité à cette pression mesure

$$\beta = -\left.\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0,00212}{\frac{5,3}{50}} = 0,02(\text{m}^3/\text{kPa})/\text{m}^3.$$

Biologie

EXEMPLE 6 ■ Soit $n = f(t)$ l'effectif d'une population animale ou végétale au moment t. Le changement de taille de la population entre les instants $t = t_1$ et $t = t_2$ est exprimé par $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$ et l'accroissement moyen sur l'intervalle de temps $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ est donné par

$$\text{taux moyen d'accroissement } = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Le taux instantané d'accroissement est obtenu à partir du taux moyen en faisant tendre la période de temps vers 0 :

$$\text{taux d'accroissement} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}.$$

À y regarder de près, ce n'est pas tout à fait exact car, graphiquement, la fonction effectif $n = f(t)$ a l'allure d'une fonction en escaliers, donc discontinue à chaque fois que se produit une naissance ou un décès, et donc encore non dérivable. Néanmoins, pour de grands effectifs, on peut remplacer le graphique par une courbe approximative lisse, comme celle de la figure 7.

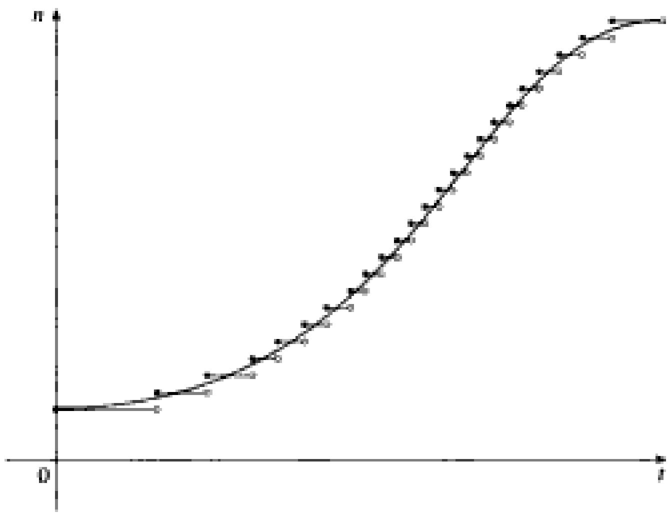


FIGURE 7
Une courbe lisse pour approximer une fonction de croissance

Considérons plus particulièrement une population de bactéries dans un milieu homogène quant à sa capacité nutritive. Supposons que par échantillonage régulier de la population il soit certain que la population double toutes les heures. Si n_0 est l'effectif initial et si t est mesuré en heures, alors

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0,$$
$$f(2) = 2f(1) = 2^2n_0,$$
$$f(3) = 2f(2) = 2^3n_0,$$

et, en général,

$$f(t) = 2^t n_0.$$

La fonction qui rend compte de l'effectif en fonction du temps est $n = n_0 2^t$.

À la section 3.1, nous avons appris à dériver une fonction exponentielle et trouvé que

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x.$$

Aussi, la population de bactéries croît, au moment t, à la vitesse de

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) \approx n_0(0{,}69)2^t.$$

Si l'effectif initial est 100, alors, après 4 h par exemple, la vitesse de croissance de la population est égale à

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} \approx 100(0{,}69)2^4 = 1104.$$

Ce qui signifie qu'après 4 h, la population de bactéries augmente d'environ 1100 bactéries à l'heure.

EXEMPLE 7 ■ Quand nous étudions la manière selon laquelle le sang s'écoule dans un vaisseau sanguin, que ce soit une veine ou une artère, nous pouvons assimiler le vaisseau sanguin à un tube cylindrique de rayon R et de longueur l comme vous voyez sur la figure 8.

FIGURE 8
Flux sanguin dans une artère

À cause du frottement sur les parois du tube, la vitesse v du sang est plus grande au centre du tube et décroît à mesure que la distance r de l'axe grandit jusqu'à devenir nulle sur la paroi. La relation entre v et r est donnée par la **loi de l'écoulement laminaire** découverte par le physicien français Poiseuille en 1840. Cette loi affirme que

1 $$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$

où η est le coefficient de viscosité du sang et P la différence de pression entre les extrémités du tube. Si P et l sont constants, alors v est une fonction de r dont le domaine de définition est $[0, R]$.

Le taux moyen de variation de la vitesse lorsque r passe d'un rayon $r = r_1$ vers un rayon plus extérieur $r = r_2$ est

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1},$$

et si nous faisons tendre Δr vers 0, nous obtenons le taux de variation instantané de la vitesse relativement à r :

$$\text{gradient de vitesse} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}.$$

Nous faisons intervenir l'expression 1,

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}.$$

Pour l'une des plus petites artères du corps humain, les constantes sont $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm et $P = 4000$ dynes/cm^2 et la vitesse en fonction de r s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} v &= \frac{4\,000}{4(0{,}027)2}(0{,}000064 - r^2) \\ &\approx 1{,}85 \times 10^4(6{,}4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0{,}002$ cm, le sang s'écoule à une vitesse égale à

$$\begin{aligned} v(0{,}002) &\approx 1{,}85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1{,}11 \text{ cm/s}, \end{aligned}$$

et le gradient de vitesse en ce point vaut

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0{,}002} = -\frac{4\,000(0{,}002)}{2(0{,}027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}.$$

Afin d'apprécier ce que signifie ce résultat, changeons les centimètres en micromètres (1 cm = 10 000 μm). Le rayon de l'artère mesure alors 80 μm. La vitesse est égale à 11 850 μm/s au niveau de l'axe central et diminue jusqu'à 11 110 μm/s à une distance $r = 20\,\mu$m. Le résultat $dv/dr = -74\ (\mu\text{m/s})/\mu\text{m}$ signifie que, quand $r = 20\,\mu$m, la vitesse à laquelle décroît la vitesse du flux sanguin est d'environ 74 μm/s pour chaque micromètre d'éloignement supplémentaire par rapport au centre.

Économie

EXEMPLE 8 ■ Une société qui produit x unités d'un certain bien s'expose à couvrir un coût total $C(x)$, appelé **fonction de coût**. Si le nombre d'unités produites passe de x_1 à x_2, le coût supplémentaire est égal à $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ et le taux de variation moyen du coût égal à

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}.$$

La limite de cette quantité lorsque Δx tend vers 0, c'est-à-dire le taux de variation instantané du coût relativement au nombre d'unités produites, que les économistes appellent le **coût marginal**, vaut

$$\text{coût marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}.$$

[Comme x ne peut habituellement prendre que des valeurs entières, cela n'a pas véritablement de sens de faire tendre Δx vers 0, mais nous pouvons toujours remplacer $C(x)$ par une courbe lisse approximative, comme à l'exemple 6.]

Prenant $\Delta x = 1$ et n grand (en sorte que Δx soit petit comparé à n), nous avons

$$C'(n) \approx C(n+1) - C(n).$$

Le coût marginal au niveau de production n vaut à peu près le coût de fabrication d'une unité supplémentaire (la $(n+1)^e$). Souvent, une fonction de coût total a la forme d'un polynôme

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

où a représente les coûts fixes (location, chauffage, entretien) et où les autres termes représentent le coût des matières premières, du travail, etc. (Le coût des matières premières peut être simplement proportionnel à x, mais les coûts du travail peuvent dépendre partiellement de plus hautes puissances de x à cause des heures supplémentaires et de l'inefficacité rencontrée dans l'exploitation à grande échelle.)

Prenons le cas d'une entreprise qui estime le coût (en euros) de fabrication de x unités à

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0{,}01x^2.$$

L'expression de la fonction de coût marginal est alors

$$C'(x) = 5 + 0{,}02x.$$

Pour un niveau de production de 500 unités, le coût marginal est égal à

$$C'(500) = 5 + 0{,}02(500) = 15 \text{ euros/unité}.$$

Tel est le taux d'augmentation des coûts par rapport au niveau de production quand $x = 500$ et le coût de fabrication prévu de la 501^e unité.

Le coût réel de cette 501^e unité est

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10000 + 5(501) + 0{,}01(501)^2] \\ &\quad - [10000 + 5(500) + 0{,}01(500)^2] \\ &= 15{,}01 \text{ euros}. \end{aligned}$$

Remarquez que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

Les économistes s'intéressent également à la demande marginale, à la recette marginale et au profit marginal, qui sont les dérivées des fonctions de demande, de recette et de profit. Celles-ci interviendront à la fin du chapitre 4 après que nous ayons développé les techniques de recherche des valeurs maximales et minimales des fonctions.

Dans les autres sciences

Des taux de variation se rencontrent également dans d'autres sciences. Un géologue s'intéresse au taux selon lequel une masse de roche en fusion se refroidit par conduction (de la chaleur) au milieu des roches environnantes. Un ingénieur est désireux de savoir la vitesse à laquelle l'eau entre ou sort d'un réservoir. Un urbaniste a besoin de connaître le taux de variation de la densité de la population d'une ville en fonction de la distance par rapport au centre. Un météorologiste est concerné par le taux de variation de la pression atmosphérique par rapport à l'altitude (voyez l'exercice 15 de la section 7.5).

En psychologie, ceux qui étudient la théorie de l'apprentissage se penchent sur la courbe appelée de l'apprentissage, celle qui rend compte de la performance $P(t)$ de celui qui apprend une tâche en fonction du temps d'entraînement. Un facteur particulièrement intéressant dans ce contexte est la vitesse selon laquelle l'exécution s'améliore en fonction du temps, autrement dit dP/dt.

En sociologie, le calcul différentiel sert à analyser la propagation des rumeurs (ou nouveautés ou manies ou modes). Si $p(t)$ désigne la proportion de gens qui connaissent une information au moment t, alors dp/dt représente la vitesse à laquelle se propage l'information (voyez l'exercice 56 à la section 3.5).

Résumé

Vitesse, densité, courant, puissance et gradient de température en physique, taux de réaction et compressibilité en chimie, taux de croissance et gradient de vitesse en biologie, coût marginal et profit marginal en économie, vitesse de refroidissement en géologie, taux d'amélioration de la performance en psychologie, vitesse de propagation de la rumeur en sociologie— toutes ces notions ne sont que des cas particuliers d'un seul concept mathématique, la dérivée.

Ceci illustre le fait que les mathématiques tirent en partie leur puissance de leur caractère abstrait. Un seul concept mathématique abstrait (comme la dérivée) peut trouver une interprétation différente dans chaque science. Après avoir développé les propriétés du concept mathématique une fois et une fois pour toutes, nous pouvons retourner les appliquer à toutes les sciences. Voilà qui est beaucoup plus efficace que de développer des propriétés particulières à l'intérieur de chaque science séparément. Le mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830) disait cela de façon très concise : « les mathématiques comparent les phénomènes les plus divers et découvre les analogies secrètes qui les unissent ».

3.3 Exercices

1. La position d'un objet en mouvement est donnée par l'équation $s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, $t \geqslant 0$ où s est mesuré en mètres et t en secondes.
   a) Trouvez la vitesse au moment t.
   b) Quelle est la vitesse après 3 s ?
   c) Quand l'objet est-il au repos ?
   d) Quand l'objet avance-t-il (c'est-à-dire a-t-il une direction positive) ?
   e) Calculez la distance totale parcourue pendant les 8 premières secondes.
   f) Dessinez un diagramme semblable à celui de la figure 2 qui représente le mouvement.
   g) Quelle est l'accélération au temps t et après 3 s ?
   h) Dessinez les fonctions de position, vitesse et accélération pour $0 \leqslant t \leqslant 8$.
   i) Quand l'objet accélère-t-il ? Ralentit-il ?
2. Un mobile se déplace le long de l'axe Ox et sa position au moment t est donnée par $x(t) = t/(1 + t^2)$, $t \geqslant 0$ où s est mesuré en mètres et t en secondes.
   a) Trouvez la vitesse au moment t.
   b) Quand le mobile se meut-il vers la droite ? vers la gauche ?

c) Calculez la distance totale parcourue durant les 4 premières secondes.
d) Quelle est l'accélération au temps t ? Quand est-elle nulle ?
e) Dessinez les fonctions de position, vitesse et accélération pour $0 \leqslant t \leqslant 4$.
f) Quand l'objet accélère-t-il ? Ralentit-il ?

3. La fonction de position d'un objet est donnée par $s = t^3 - 4{,}5t^2 - 7t$, $\quad t \geqslant 0$.
a) Quand l'objet atteint-il une vitesse de 5 m/s ?
b) Quand son accélération est-elle nulle ? Quelle est la signification de cette valeur de t ?

4. Lorsqu'une balle est jetée en l'air verticalement avec une vitesse de 24,5 m/s, sa hauteur après t secondes est égale à $s = 24{,}5t - 4{,}9t^2$.
a) Quelle est la hauteur maximum qu'atteint la balle ?
b) Quelle est la vitesse de la balle au moment où elle est à 29,4 m de haut en montant ? En descendant ?

5. a) Une entreprise fabrique des puces à partir de tranche de silicium carrée. Elle désire tenir la longueur du côté proche de 15 mm et souhaite savoir comment varie l'aire $A(x)$ d'une tranche en fonction de la longueur x du côté. Calculez $A'(15)$ et expliquez la signification de cette valeur dans ce contexte.
b) Démontrez que le taux de variation de l'aire d'un carré par rapport à son côté est égal à la moitié de son périmètre. Essayez d'expliquer cela géométriquement en dessinant un carré dont le côté x est augmenté de Δx. Que vaut approximativement la variation ΔA de l'aire qui en résulte lorsque Δx est petit ?

6. a) Des cristaux de chlorate de sodium de forme cubique se forment aisément si on laisse s'évaporer lentement une solution d'eau et de chlorate de sodium. Si V est le volume d'un tel cube d'arête x, calculez dV/dx quand $x = 3$ mm et expliquez la signification de cette valeur.
b) Démontrez que le taux de variation du volume d'un cube par rapport à son arête est égal à la moitié de la surface du cube. Expliquez cela géométriquement en vous inspirant de l'exercice 5(b).

7. a) Calculez le taux de variation moyen d'un cercle par rapport à son rayon r lorsque r passe de 2 à 3, de 2 à 2,5, de 2 à 2,1.
b) Déterminez le taux de variation instantané quand $r = 2$.
c) Démontrez que le taux de variation de l'aire d'un cercle par rapport à son rayon (en un rayon quelconque) est égal à la longueur de la circonférence. Essayez d'expliquer géométriquement pourquoi, en dessinant un cercle dont le rayon reçoit un accroissement Δr. Que vaut approximativement la variation ΔA de l'aire qui en résulte lorsque Δr est petit ?

8. Une pierre tombe dans un lac créant une onde circulaire qui s'agrandit à la vitesse de 60 cm/s. Calculez à quelle vitesse s'agrandit l'aire de l'onde circulaire après a) 1 s, b) 3 s, c) 5 s. Quelle est votre conclusion ?

9. On gonfle un ballon sphérique. Déterminez le taux de croissance de la surface ($S = 4\pi r^2$) par rapport au rayon r lorsque r mesure a) 1 dm, b) 2 dm, c) 3 dm. Quelle est votre conclusion ?

10. a) Le volume d'une cellule sphérique en train de grandir vaut $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, où r est mesuré en micromètres ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Calculez le taux de variation moyen de V par rapport à r lorsque r passe de 5 à 8 μm, de 5 à 6 μm, de 5 à 5,1 μm.
b) Déterminez le taux de variation instantané de V par rapport à r quand $r = 5\ \mu$m.
c) Démontrez que le taux de variation du volume d'une sphère par rapport à son rayon est égal à la surface de la sphère. Expliquez géométriquement pourquoi ce résultat est correct. Argumentez en vous inspirant de l'exercice 7 c).

11. La masse d'un tronçon de barre métallique depuis son extrémité gauche jusqu'à un point situé à x mètres à droite est donnée par $3x^2$ kg. Déterminez la densité linéaire (voyez l'exemple 2) quand x est à a) 1 m, b) à 2 m, c) à 3 m. Où cette densité est-elle la plus élevée ? La plus faible ?

12. Une citerne de 25 000 litres d'eau se vide par la base en 40 min. Selon la loi de Torricelli, le volume d'eau présent dans la citerne après t minutes est

$$V(t) = 25\,000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 40.$$

Déterminez la vitesse à laquelle l'eau s'échappe de la citerne après a) 5 min, b) 10 min, c) 20 min, d) 40 min. À quel moment l'eau s'écoule-t-elle le plus vite ? Le plus lentement ? Résumez vos résultats.

13. La charge électrique Q [exprimée en coulombs (C)] qui passe par un point d'un fil électrique au moment t (mesuré en secondes) est donnée par $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Déteminez le courant quand a) $t = 0{,}5$ s, b) $t = 1$ s. [Voir l'exemple 3. L'unité de courant est l'ampère (1 A = 1 C/s).] À quel moment le courant est-il le plus faible ?

14. La loi de la gravitation de Newton certifie que la force F exercée par un corps de masse m sur un corps de masse M est

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

où G est la constante gravitationnelle et r, la distance entre les deux corps.
a) Si les corps sont en mouvement, calculez dF/dr et expliquez ce que cette expression signifie. Quel est le sens du signe moins ?
b) Supposons que la Terre attire un objet avec une force qui décroît à la vitesse de 2 N/km quand $r = 20\,000$ km. À quelle vitesse cette force varie-t-elle quand $r = 10\,000$ km ?

15. La loi des gaz qui porte le nom de Boyle-Mariotte certifie que, si la température d'un gaz confiné est fixe, alors le produit de la pression P et du volume V est constant : $PV = C$.

a) Déterminez la vitesse de variation du volume par rapport à la pression.

b) Du gaz est contenu dans un réservoir à basse pression et est progressivement comprimé à température constante pendant 10 min. Le volume décroît-il plus rapidement au début ou à la fin des 10 minutes ? Expliquez.

c) Démontrez que la compressibilité isothermale (voyez l'exemple 5) est donnée par $\beta = 1/P$.

16. Les données du tableau concernent la lactonisation de l'acide hydroxyvalérique à 25 °C. Il s'agit de la concentration $C(t)$ de cet acide (en moles par litre) après t minutes.

t	0	2	4	6	8
$C(t)$	0,0800	0,0570	0,0408	0,0295	0,0210

a) Calculez le taux moyen de réaction pour les intervalles de temps suivants.
■ $2 \leqslant t \leqslant 6$ ■ $2 \leqslant t \leqslant 4$ ■ $0 \leqslant t \leqslant 2$

b) Marquez les points du tableau et faites passer une courbe lisse qui représente approximativement le graphique de la fonction concentration. Ensuite, tracez la tangente en $t = 2$ et utilisez-la pour estimer le taux instantané de réaction au moment $t = 2$.

c) La réaction est-elle entrain de s'accélérer ou de ralentir ?

17. Si, à l'exemple 4, une molécule du produit C est formée à partir d'une molécule du réactant A et d'une molécule du réactant B et si les concentrations initiales de A et B sont toutes deux égales à [A]=[B]=a moles/L, alors [C]=$a^2kt/(akt+1)$, où k est une constante.

a) Quel est le taux de réaction au temps t ?

b) Montrez que si x =[C], alors
$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2.$$

c) Que devient la concentration lorsque $t \to \infty$?

d) Que devient le taux de réaction lorsque $t \to \infty$?

e) Pratiquement, que signifient les résultats des parties c) et d) ?

18. Supposons qu'une population de bactéries dont l'effectif initial est de 500, triple toutes les heures.

a) Quel est l'effectif après 3 heures ? Après 4 heures ? Après t heures ?

b) Grâce au résultat (5) de la section 3.1, estimez le taux de croissance de la population après 6 heures.

19. Référez-vous à la loi du flux laminaire de l'exemple 7. Considérons un vaisseau sanguin de 0,01 cm de rayon, de 3 cm de long, une différence de pression égale à 3000 dynes/cm^2 et une viscosité $\eta = 0{,}027$.

a) Quelle est la vitesse de circulation du sang sur l'axe central, $r = 0$, à $r = 0{,}005$ cm de l'axe central et sur la paroi $r = R = 0{,}01$ cm.

b) Quel est le gradient de vitesse en $r = 0$, $r = 0{,}05$ et $r = 0{,}01$.

c) Où la vitesse est-elle la plus grande ? Où la vitesse varie-t-elle le plus ?

20. La fréquence des vibrations d'une corde de violon est donnée par
$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$
où L est la longueur de la corde, T sa tension et ρ sa densité linéaire.

a) Déterminez le taux de variation de la fréquence par rapport à
■ la longueur (quand T et ρ sont constants),
■ la tension (quand L et ρ sont constants),
■ la densité linéaire (quand T et L sont constants).

b) Le ton d'une note (son aigu ou grave) est déterminé par la fréquence f (plus la fréquence est élevée, plus le ton est aigu). En vous basant sur les signes des dérivées de la partie a), pouvez-vous dire ce que va faire le ton d'une note
■ quand la longueur de la corde est raccourcie par le fait d'y placer le doigt, ce qui a pour effet que seule une partie de la corde vibre.
■ quand, en tournant une cheville, la tension est accrue.
■ quand, en passant sur une autre corde, la densité linéaire est modifiée.

21. La production, en euros, de x mètres d'un certain tissu coûte
$$C(x) = 2000 + 3x + 0{,}01x^2 + 0{,}0002x^3.$$

a) Quelle est la fonction de coût marginal?

b) Calculez $C'(100)$ et donnez la signification de cette valeur?

c) Comparez $C'(100)$ et le coût de fabrication du 101^e mètre.

22. La fonction de coût d'un bien est
$$C(x) = 84 + 0{,}16x - 0{,}0006x^2 + 0{,}000003x^3.$$

a) Calculez et interprétez $C'(100)$.

b) Comparez $C'(100)$ et le coût de production de 101^e unité de ce bien.

c) Dessinez la fonction de coût et situez grossièrement le point d'inflexion.

d) Calculez la valeur de x en laquelle C présente un point d'inflexion. Quelle est la signification de cette valeur de x?

23. Si $p(x)$ est la valeur totale de la production quand il y a x travailleurs dans l'usine, on appelle *productivité moyenne de la force de travail* le quotient
$$A(x) = \frac{p(x)}{x}.$$

a) Calculez $A'(x)$. Pourquoi l'entreprise souhaite-t-elle embaucher davantage de travailleurs quand $A'(x) > 0$?

b) Démontrez que $A'(x) > 0$ quand $p'(x)$ est supérieur à la productivité moyenne.

24. Si R désigne la réaction d'un corps à un stimulus de force x, on appelle *sensibilité* S le taux de variation de la réaction par rapport à x. Par exemple, face à une augmentation de l'éclat d'une lampe, les yeux réagissent en diminuant l'aire R de la pupille. La formule

$$R = \frac{40 + 24x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}$$

modélise cette dépendance de R par rapport à x, où R est mesuré en millimètres carrés et x en unités convenables de luminosité.

a) Donnez une expression de la sensibilité.

b) Illustrez la partie a) en dessinant les graphiques de R et S. Observez les valeurs de R et S pour de faibles niveaux de luminosité. Correspondent-elles à ce à quoi vous vous attendiez ?

25. La loi des gaz parfaits entre la température absolue T (en kelvins), la pression P (en atmosphères), et la volume V (en litres) est $PV = nRT$, où n est le nombre de môles de gaz et $R = 0,0821$ la constante du gaz. Supposons qu'à un certain moment la pression est de 0,8 atm et croît à la vitesse de 0,10 atm/min, que le volume est de 10 L et décroît à la vitesse de 0,15 L/min. Quel est le taux de variation de T par rapport au temps à ce moment, si $n = 10$ mol.

26. En pisciculture, il est normal de sortir régulièrement du bassin d'élevage les poissons arrivés à maturité. Le taux de variation dans le temps de la population de poissons est modélisé par la formule

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t),$$

où r_0 est le taux de naissance des poissons, P_c l'effectif maximum que peut supporter le bassin et β le pourcentage de poissons prélevé.

a) Quelle est la valeur de dP/dt qui correspond à une population stable ?

b) Si le bassin peut supporter 10 000 poissons, si le taux de naissance est 5 % et le taux de prélèvement des poissons 4 %, quel est le niveau stable de population ?

c) Que se passe-t-il si β s'élève à 5 % ?

27. Des modèles *proie-prédateur* ont été mis au point pour étudier dans les écosystèmes les interactions entre espèces. Envisageons une population de loups de la toundra $W(t)$ et de caribous $C(t)$ dans le nord du Canada. L'interaction a été modélisée par les équations

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW.$$

a) Pour quelles valeurs de dC/dt et dW/dt les populations sont-elles stables ?

b) Comment se traduit mathématiquement la constatation « le caribou a disparu » ?

c) Supposons que $a = 0,05$, $b = 0,001$, $c = 0,05$ et $d = 0,0001$. Trouvez toutes les combinaisons (C, W) qui conduisent à des populations stables. Selon ce modèle est-il possible pour ces espèces de vivre en harmonie ou l'une voire les deux vont-elles disparaître ?

3.4 Les dérivées des fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont revues dans l'annexe C.

Avant d'entamer cette section, il se peut que vous ayez besoin de revoir les fonctions trigonométriques. En particulier, il est important de se souvenir que lorsque nous parlons de la fonction f définie sur tous les nombres réels x par

$$f(x) = \sin x,$$

il est entendu que les angles ou les arcs dont la fonction donne le sinus sont mesurés en radians. Il en est de même pour toutes les autres fonctions trigonométriques cos, tg, cosec, sec et cotg. Souvenez-vous aussi que toutes les fonctions trigonométriques sont continues partout où elles sont définies.

Si nous partons du graphique de $f(x) = \sin x$ et nous servons de l'interprétation de la dérivée comme pente de la tangente pour esquisser le graphique de f' (voyez l'exercice 14 de la section 2.8), il semble que le graphique de f' soit le même que celui de la fonction cosinus (voyez la figure 1).

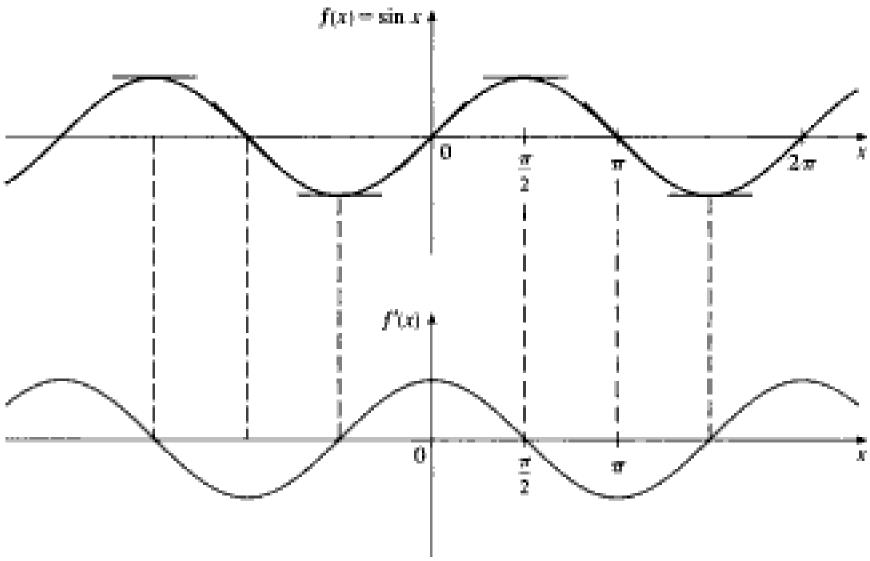


FIGURE 1

Essayons de confirmer notre conjecture, à savoir que si $f(x) = \sin x$, alors $f'(x) = \cos x$. La définition de la dérivée nous mène aux calculs suivants

Nous avons utilisé la formule du sinus d'une somme. Voyez l'annexe C.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

1 $$= \lim_{h \to 0} \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

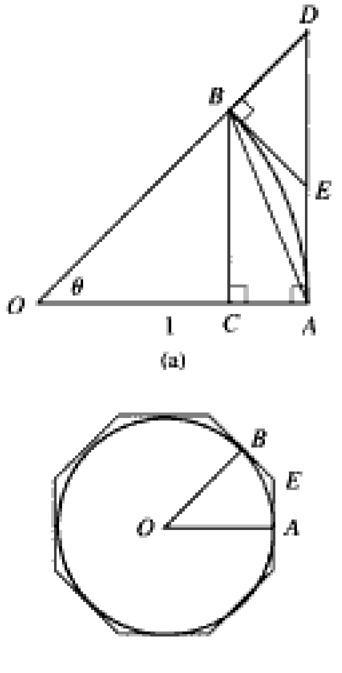
Deux de ces quatre limites sont faciles à calculer. Puisque, lorsque nous faisons tendre h vers 0, x est considéré comme une constante, nous avons

$$\lim_{h \to 0} \sin x = \sin x \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x.$$

Par contre, la limite de $(\sin h)/h$ n'est pas évidente. À l'exemple 3 de la section 2.2, nous avons conjecturé, sur la base d'observations numérique et graphique, que

2 $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Nous démontrons ici ce résultat géométriquement. Supposons d'abord que θ est compris entre 0 et $\pi/2$. La figure 2(a) montre un secteur d'un cercle centré en O, de



(a)

(b)

FIGURE 2

rayon 1 et d'angle au centre θ. BC est la perpendiculaire à OA. Par la définition même du radian, la longueur de l'arc AB est égale à θ. Par ailleurs, $|BC| = |OB| \sin\theta = \sin\theta$. Il est géométriquement évident que

$$|BC| < |AB| < \text{arc}AB.$$

De là,

$$\sin\theta < \theta \qquad \text{et aussi} \qquad \frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

Les tangentes au cercle en A et en B se coupent en E. Il est clair sur la figure 2(b) que la longueur de la circonférence d'un cercle est inférieure au périmètre d'un polygone circonscrit. Par conséquent, la longueur de l'arc AB est inférieure à $|AE| + |EB|$. De là

$$\begin{aligned} \theta = \text{arc}\, AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \operatorname{tg}\theta \\ &= \operatorname{tg}\theta \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité s'écrit encore

$$\theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

ou

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

Comme $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ et $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$, le théorème du sandwich est applicable et conduit à

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Parce que $\sin\theta/\theta$ est une fonction paire, ses limites à droite et à gauche de 0 doivent être égales et donc

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Nous avons ainsi démontré l'équation 2.

Il reste encore à calculer la quatrième limite de l'expression 1 :

Nous avons multiplié numérateur et dénominateur par $\cos\theta + 1$ afin de mettre la fonction sous une forme telle que nous puissions utiliser les limites que nous connaissons.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0} \left[\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} \right] = \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \\ &= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \\ &= -1 \cdot \left(\frac{0}{1+1} \right) = 0 \qquad \text{(par l'équation 2)} \end{aligned}$$

3
$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0}$$

Nous introduisons maintenant les limites (2) et (3) dans (1) :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$
$$= (\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x.$$

Ainsi est démontrée la formule de la dérivée de la fonction sinus :

4
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$$

EXEMPLE 1 ■ Dérivez $y = x^2 \sin x$.

La figure 3 montre les graphiques de la fonction de l'exemple 1 et de sa dérivée. Remarquez que $y' = 0$ là où y a une tangente horizontale.

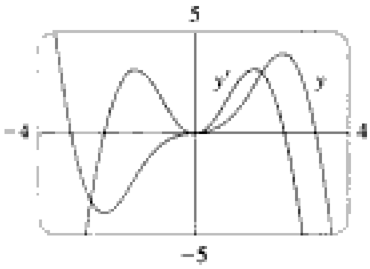


FIGURE 3

SOLUTION La Règle de dérivation du produit et la formule (4) donnent

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$= x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

Par une démonstration analogue à celle de la formule (4), on peut prouver (voyez l'exercice 16) que

5
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

La dérivée de la fonction tangente peut aussi être obtenue à partir de la définition de la dérivée, mais il est plus facile d'exploiter la Règle de dérivation du quotient jointe aux formules (4) et (5) :

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x}$$

Les dérivées des autres fonctions trigonométriques, cosec, sec et cotg s'obtiennent de la même manière par la Règle de dérivation du quotient (voyez les exercices 13-15). Nous réunissons dans un seul tableau toutes les formules de dérivation des fonctions trigonométriques.

Pour mémoriser cette table, il est utile de remarquer que les signes moins vont avec les « cofonctions », c'est-à-dire cosinus, cotangente et cosécante.

Dérivées des fonctions trigonométriques

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

EXEMPLE 2 ■ Calculez la dérivée de $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$. Pour quelles valeurs de x le graphique de f a-t-il une tangente horizontale ?

SOLUTION La Règle de dérivation du quotient donne

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \operatorname{tg} x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)\sec x \operatorname{tg} x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,[\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x]}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} \\
&= \frac{\sec x\,(\operatorname{tg} x - 1)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}
\end{aligned}$$

Pour simplifier la réponse, nous avons utilisé l'identité $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Comme $\sec x$ n'est jamais nulle, $f'(x) = 0$ lorsque $\operatorname{tg} x = 1$ ou $x = n\pi + \pi/4$, où n est un entier (voyez la figure 4).

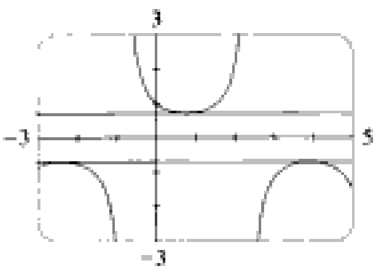


FIGURE 4
Les tangentes horizontales dans l'exemple 2

Les fonctions trigonométriques servent souvent à modéliser des phénomènes issus du monde réel. En particulier, les vibrations, les ondes, les mouvements élastiques et autres quantités qui varient de façon périodique sont décrites par des fonctions trigonométriques. L'exemple suivant propose un type de mouvement harmonique simple.

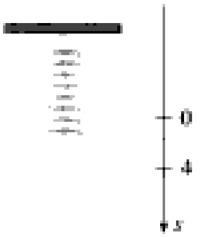


FIGURE 5

EXEMPLE 3 ■ Un objet fixé à l'extrémité d'un ressort en position verticale est étiré de 4 cm au-delà de sa position de repos et relaché au moment $t = 0$ (voyez la figure 5 et remarquez que la direction positive est dirigée vers le bas). Sa position en fonction du temps t est donnée par

$$s = f(t) = 4 \cos t.$$

Trouvez l'expression de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps t et servez-vous en pour décrire le mouvement de l'objet.

SOLUTION Les expressions de la vitesse et de l'accélération sont

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4 \frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \sin t,$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \sin t) = -4 \frac{d}{dt}(\sin t) = -4 \cos t.$$

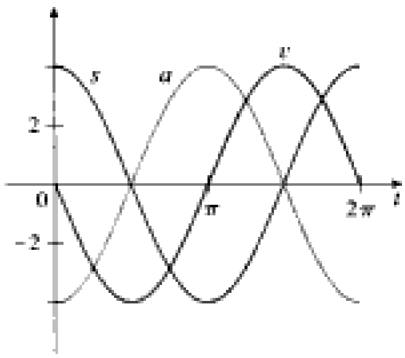


FIGURE 6

L'objet oscille entre sa position la plus basse ($s = 4$ cm) et sa position la plus haute ($s = -4$ cm). La période de l'oscillation est 2π, celle de $\cos t$.

La vitesse, indépendamment de son sens, $|v| = 4|\sin t|$ est la plus grande quand $\sin t = 1$, autrement dit quand $\cos t = 0$. L'objet se déplace donc le plus vite au moment où il passe par la position d'équilibre ($s = 0$). En revanche, sa vitesse est nulle quand $\sin t = 0$, c'est-à-dire aux points le plus haut et le plus bas.

L'accélération $a = -4 \cos t = 0$ quand $s = 0$. Elle est maximum aux points le plus haut et le plus bas. Voyez le graphique de la figure 6.

■ Reconnaître une régularité

EXEMPLE 4 ■ Calculez la dérivée d'ordre 27 de $\cos x$.

SOLUTION Les quelques premières dérivées de $f(x) = \cos x$ sont

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ f^{(5)}(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Nous remarquons que les dérivées successives ont un cycle de longueur 4 et, en particulier, que $f^{(n)}(x) = \cos x$ lorsque n est un multiple de 4. Par conséquent,

$$f^{(24)}(x) = \cos x.$$

En dérivant encore trois fois, nous obtenons

$$f^{(27)}(x) = \sin x.$$

3.4 Exercices

1-12 ■ Calculez $\dfrac{dy}{dx}$.

1. $y = \sin x + \cos x$
2. $y = \cos x - 2 \operatorname{tg} x$
3. $y = x^2 \cos x$
4. $y = e^x \sin x$
5. $y = 2 \operatorname{cotg} x - \sqrt{x} \sec x$
6. $y = x \operatorname{cosec} x$
7. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

8. $y = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

9. $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

10. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$

11. $y = e^{x}(\operatorname{tg} x - x)$

12. $y = x \sin x \cos x$

13. Démontrez que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$.

14. Démontrez que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$.

15. Démontrez que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cosec}^2 x$.

16. Démontrez à partir de la définition de la dérivée que si $f(x) = \cos x$, alors $f'(x) = -\sin x$.

17-18 ■ Déterminez une équation de la tangente à la courbe au point indiqué.

17. $y = \operatorname{tg} x$, $(\pi/4, 1)$

18. $y = 2 \sin x$, $(\pi/6, 1)$

19. a) Écrivez une équation de la tangente à la courbe $y = x \cos x$ au point $(\pi, -\pi)$.
   b) Illustrez la partie a) en affichant la courbe et sa tangente dans la même fenêtre.

20. a) Écrivez une équation de la tangente à la courbe $y = \sec x - 2 \cos x$ au point $(\pi/3, 1)$.
   b) Illustrez la partie a) en affichant la courbe et sa tangente dans la même fenêtre.

21. a) Si $f(x) = 2x + \operatorname{cotg} x$, calculez $f'(x)$.
   b) Vérifiez que votre réponse à la partie a) est plausible en dessinant f et f' pour $0 < x < \pi$.

22. a) Si $f(x) = e^{x} \cos x$, trouvez les expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b) Vérifiez que vos réponses à la partie a) sont plausibles en dessinant f, f' et f''.

23. Si $g(s) = s^2 \cos s$, trouvez les expressions de g' et g''.

24. Si $f(x) = \sec x$, calculez $f''(\pi/4)$.

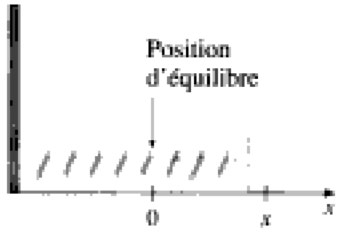
25. En quelles valeurs de x la courbe $y = x + 2 \sin x$ a-t-elle une tangente horizontale ?

26. Cherchez les points en lesquels la courbe $y = (\cos x)/(2 + \sin x)$ a une tangente horizontale.

27. Soit $f(x) = x - 2 \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Sur quel intervalle f est-elle croissante ?

28. Soit $f(x) = x - \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Sur quel intervalle f est-elle convexe ?

29. Un bloc au bout d'un ressort vibre horizontalement sur une surface lisse selon un mouvement harmonique simple (voyez la figure). L'équation de mouvement est $x(t) = 8 \sin t$ où t est exprimé en secondes et x en centimètres.
   a) Déterminez la vitesse et l'accélération au moment t.
   b) Déterminez la position, la vitesse et l'accélération du bloc au temps $t = 2\pi/3$. Dans quelle direction se déplace-t-il à ce moment ? Est-il en train d'accélérer ou de ralentir ?



30. À l'extrémité d'un élastique pendu à un crochet on place un objet pesant. Quand on tire l'objet vers le bas, puis qu'on le lâche, il est rappelé vers le haut et commence un mouvement harmonique simple. L'équation du mouvement est $s = 2 \cos t + 3 \sin t$, $t \geqslant 0$, où s est mesuré en centimètres et t en secondes. (La direction positive est dirigée vers le bas.)
   a) Déterminez la vitesse et l'accélération au moment t.
   b) Dessinez les fonctions vitesse et accélération.
   c) Quand l'objet passe-t-il pour la première fois par la position d'équilibre ?
   d) De combien s'écarte-t-il de sa position d'équilibre ?
   e) Quand la vitesse est-elle la plus grande ? Quand l'objet subit-il une accélération ?

31. Une échelle de 3 m est appuyée contre un mur vertical. Soit θ l'angle que fait le haut de l'échelle avec le mur et x la distance entre le pied de l'échelle et le mur. Si le pied de l'échelle s'écarte du mur en glissant, à quelle vitesse varie x par rapport à θ quand $\theta = \pi/3$?

32. Un objet de poids P est tiré sur une surface horizontale par l'intermédiaire d'une corde sur laquelle est exercée une force. Si la corde fait un angle θ avec le plan, alors l'intensité de la force est donnée par

$$F = \frac{\mu P}{\mu \sin \theta + \cos \theta},$$

où μ est une constante appelée *coefficient de friction*.
   a) Quelle formule exprime le taux de variation de F par rapport à θ ?
   b) Quand ce taux de variation est-il égal à 0 ?
   c) Si $P = 50$ kg et $\mu = 0{,}6$, dessinez le graphique de F comme une fonction de θ et localisez-y la valeur de θ pour laquelle $dF/d\theta = 0$. Cette valeur est-elle en accord avec votre réponse à la partie b) ?

33-34 ■ Calculez la dérivée demandée en calculant les premières dérivées et en découvrant une régularité.

33. $\dfrac{d^{99}}{dx^{99}}(\sin x)$

34. $\dfrac{d^{35}}{dx^{35}}(x \sin x)$

35. Déterminez les constantes A et B telles que la fonction $y = A\sin x + B\cos x$ satisfasse à l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = \sin x$.

36. a) Utilisez la substitution $\theta = 5x$ pour trouver

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

b) Grâce à la partie a) et à la définition de la dérivée, calculez $\dfrac{d}{dx}(\sin 5x)$.

37-39 ■ Utilisez la formule 2 et les identités trigonométriques pour obtenir les limites.

37. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$

38. $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \operatorname{cotg} x$

39. $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta + \operatorname{tg}\theta}$

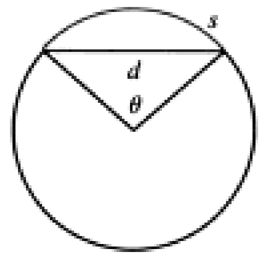
40. a) Calculez $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$.

b) Calculez $\displaystyle\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

c) Illustrez les parties a) et b) en dessinant $y = x\sin(1/x)$.

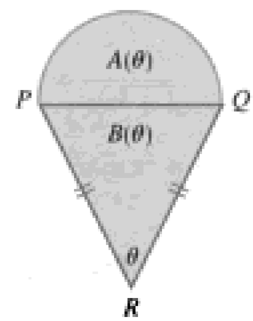
41. La figure montre un arc de cercle de longueur s et une corde de longueur d, sous-tendue par un angle au centre θ. Calculez

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}.$$



42. Un demi-cercle de diamètre PQ est accolé à un triangle isocèle de manière à former une région qui ressemble à l'image d'un cornet de crème glace (voyez la figure). Si $A(\theta)$ est l'aire du demi-cercle et $B(\theta)$ l'aire du triangle, déterminez

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$$



3.5 La dérivation des fonctions composées

Supposons que vous ayez à dériver la fonction

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Aucune des formules que nous avons apprises jusqu'à présent ne nous permet de calculer $F'(x)$.

Pour revoir les fonctions composées, voyez la section 1.2.

Observez que F est une fonction composée. En posant $y = f(u) = \sqrt{u}$ et $u = g(x) = x^2 + 1$, nous pouvons écrire $y = F(x) = f(g(x))$, c'est-à-dire $F = f \circ g$. Comme nous savons comment dériver f et g séparément, il serait intéressant d'avoir une formule qui donne la dérivée de $F = f \circ g$ en termes de f' et g'.

Il s'avère que la dérivée de la fonction composée $f \circ g$ est le produit des dérivées de f et g. Ceci constitue une des plus importantes règles de dérivation et s'appelle la *règle de dérivation des fonctions composées*. Elle apparaît tout à fait vraisemblable quand nous regardons les dérivées comme des taux de variation. Regardons donc du/dx comme le taux de variation de u par rapport à x, dy/du comme le taux de variation de y par rapport à u et dy/dx comme le taux de variation de y par rapport à x. Si u varie deux fois plus vite que x et y trois fois plus vite que u, il semble normal que y change six fois plus vite que x et nous nous attendons à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Dérivée d'une fonction composée Si f et g sont deux fonctions dérivables et si $F = f \circ g$ est la fonction composée définie par $F(x) = f(g(x))$, alors F est dérivable et l'expression de F' est donnée par le produit

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Avec les notations de Leibniz, si $y = f(u)$ et $u = g(x)$ sont des fonctions dérivables, alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Commentaires à propos de la démonstration de la règle de dérivation des fonctions composées. Soit Δu la variation de u qui résulte de la variation Δx de x, autrement dit

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Par ricochet, la variation de y est

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Il est tentant d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
\boxed{1} \qquad &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \text{(La continuité de } g \text{ fait que } \Delta u \to 0 \text{ quand } \Delta x \to 0) \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.
\end{aligned}$$

La seule faille dans ce raisonnement est que dans (1), il se peut que Δu soit nul (même si $\Delta x \neq 0$) et il est bien sûr interdit de diviser par 0. Néanmoins, ce raisonnement *laisse penser* au moins que la règle de dérivation des fonctions composées est exacte. Pour combler la faille il faut un raisonnement plus subtil que nous ne présentons pas ici. ■

Cette Règle de dérivation des fonctions composées peut s'écrire soit avec des primes

2 $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

soit, si $y = f(u)$ et $u = g(x)$, avec la notation de Leibniz :

3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

L'équation (3) est facile à retenir, car si dy/du et du/dx étaient des quotients, nous pourrions simplifier par du. Souvenons-nous pourtant que du n'a reçu aucune définition jusqu'à présent et que l'expression du/dx ne peut pas être vue comme un réel quotient.

EXEMPLE 1 ■ Dérivez $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUTION 1 (par l'équation (2)) : au début de cette section, nous avons exprimé F comme $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ où $f(u) = \sqrt{u}$ et $g(x) = x^2 + 1$. Comme

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = 2x,$$

nous avons

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

SOLUTION 2 (par l'équation (3)): si nous posons $u = x^2 + 1$ et $y = \sqrt{u}$, alors nous avons

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Lorsque nous employons la formule 3, nous devons avoir à l'esprit que dy/dx se rapporte à la dérivée de y lorsque y est considérée comme une fonction de x (appelée dérivée de y par rapport à x), tandis que dy/du se rapporte à la dérivée de y lorsqu'elle est considérée comme une fonction de u (la dérivée de y par rapport à u). Dans l'exemple 1, y est vue comme une fonction de x ($y = \sqrt{x^2 + 1}$) et comme une fonction de u ($y = \sqrt{u}$). Remarquez que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{alors que} \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

REMARQUE ● Appliquer la règle de dérivation des fonctions composées revient à travailler de l'extérieur vers l'intérieur. La formule 2 impose de *dériver la fonction extérieure* f *[en la fonction intérieure* $g(x)$*] et d'ensuite multiplier par la dérivée de la fonction intérieure.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{extérieure}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculée}\\ \text{en la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{dérivée}\\ \text{de la}\\ \text{fonction}\\ \text{extérieure}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{calculée}\\ \text{en la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{dérivée}\\ \text{de la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}}$$

EXEMPLE 2 ■ Dérivez a) $y = \sin(x^2)$ et b) $y = \sin^2 x$.

SOLUTION

a) Pour $y = \sin(x^2)$, la fonction extérieure est la fonction sinus et la fonction intérieure, la fonction carrée, de sorte que la dérivation se déroule comme suit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\sin}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{extérieure}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculée}\\ \text{en la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{dérivée}\\ \text{de la}\\ \text{fonction}\\ \text{extérieure}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{calculée}\\ \text{en la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{dérivée}\\ \text{de la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

b) Remarquez que $\sin^2 x = (\sin x)^2$. Ici, la fonction extérieure est la fonction carrée et la fonction intérieure, la fonction sinus. D'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\sin x)^2}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{intérieure}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{dérivée}\\ \text{de la}\\ \text{fonction}\\ \text{extérieure}}} \cdot \underbrace{(\sin x)}_{\substack{\text{évaluée}\\ \text{en la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{dérivée}\\ \text{de la}\\ \text{fonction}\\ \text{intérieure}}}$$

La réponse peut rester sous la forme $2\sin x\cos x$ ou être écrite $\sin 2x$ (par l'identité trigonométrique bien connue de l'arc double).

Dans l'exemple 2 a), nous avons combiné la Règle de dérivation des fonctions composées avec celle de la fonction sinus. De façon générale, si $y = \sin u$, où u est une fonction dérivable de x, alors selon la Règle de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u\frac{du}{dx}.$$

D'où

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\frac{du}{dx}.$$

De la même manière, toutes les formules de dérivation des fonctions trigonométriques peuvent être combinées avec la Règle de dérivation des fonctions composées.

Regardons en détail le cas particulier d'application de la dérivation d'une fonction composée où la fonction extérieure f est la fonction puissance. Si $y = [g(x)]^n$, alors nous pouvons écrire $y = f(u) = u^n$ où $u = g(x)$. Les Règles de dérivation des fonctions composées et des puissances donnent ensemble

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x).$$

4 Règle de dérivation d'une puissance combinée avec celle d'une fonction composée Soit n un nombre réel quelconque et $u = g(x)$ une fonction dérivable. Alors

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}.$$

Ou aussi

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x).$$

Remarquez que la dérivée de l'exemple 1 pourrait maintenant être calculée en posant $n = 1/2$ dans la règle (4).

EXEMPLE 3 ■ Dérivez $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUTION Nous appliquons la règle (4) au cas $u = g(x) = x^3 - 1$ et $n = 100$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} &= 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 \\ &= 300x^2(x^3 - 1)^{99}.\end{aligned}$$

EXEMPLE 4 ■ Calculez $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUTION Réécrivons d'abord f sous la forme $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$. Alors

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) \\ &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1).\end{aligned}$$

EXEMPLE 5 ■ Cherchez l'expression de la dérivée de la fonction

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9.$$

SOLUTION Combinant Règle de dérivation d'une puissance d'une fonction composée et d'un quotient, nous arrivons à

$$\begin{aligned}g'(t) &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right) \\ &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1)\cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} \\ &= \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}.\end{aligned}$$

EXEMPLE 6 ■ Dérivez $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUTION Dans cet exemple, il convient d'appliquer la Règle de dérivation du produit avant celle d'une fonction composée, pour obtenir,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (2x + 1)^5\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1)^5 \\ &= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3\frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) \\ &\quad + (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4\frac{d}{dx}(2x + 1) \\ &= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2.\end{aligned}$$

Nous terminons les calculs par une mise en évidence des facteurs communs

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3).$$

La figure 1 montre les graphiques des fonctions y et y'. Remarquez que quand y croît rapidement, y' est grand. Et quand y a une tangente horizontale, y' est nulle. Notre réponse est donc très probablement correcte.

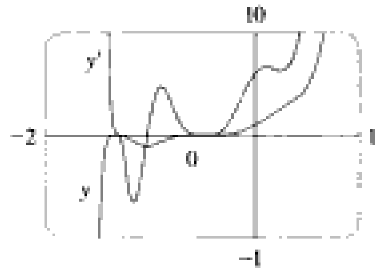


FIGURE 1

EXEMPLE 7 ■ Dérivez $y = e^{\sin x}$.

SOLUTION Ici, la fonction intérieure est $g(x) = \sin x$ et la fonction extérieure, la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. Par la Règle de dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = e^{\sin x}\cos x.$$

Il est possible, par la Règle de dérivation des fonctions composées, d'obtenir la dérivée d'une fonction exponentielle de base quelconque $a > 0$. Il suffit de se rappeler que, d'après la section 1.6, $a = e^{\ln a}$. Alors

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x},$$

et, par la Règle de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x$$

$$= e^{(\ln a)x}\cdot \ln a = a^x \ln a$$

parce que $\ln a$ est une constante. Nous avons donc la formule

Attention de ne pas confondre la formule 5 (dans laquelle x est l'exposant) avec la règle de dérivation des puissances (où x est la base)

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.}$$

En particulier, si $a = 2$,

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2.$$

À la section 3.1, nous étions arrivé à l'estimation

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0{,}69)2^x,$$

qui s'accorde très bien avec la formule exacte (6) puisque $\ln 2 \approx 0{,}693147$.

Dans l'exemple 6 de la section 3.3, nous avons envisagé une colonie de bactéries qui doublait toutes les heures et nous avons vu qu'après t heures, son effectif se monte à $n = n_0 2^t$, où n_0 est l'effectif initial. La formule (6) nous permet de calculer la vitesse de croissance de la colonie de bactéries :

$$\frac{dn}{dt} = n_0 2^t \ln 2.$$

La Règle de dérivation des fonctions composées s'applique encore dans le cas où plus de deux fonctions sont impliquées, c'est-à-dire où il y a plus d'une composition. Supposons que $y = f(u)$, $u = g(x)$ et $x = h(t)$ avec f, g et h toutes trois dérivables. Alors, pour calculer la dérivée de y par rapport à t, nous employons deux fois de suite la Règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

EXEMPLE 8 ■ Si $f(x) = \sin(\cos(\operatorname{tg} x))$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\operatorname{tg} x))\,\frac{d}{dx}\cos(\operatorname{tg} x) \\ &= \cos(\cos(\operatorname{tg} x))\,[-\sin(\operatorname{tg} x)]\,\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) \\ &= -\cos(\cos(\operatorname{tg} x))\,\sin(\operatorname{tg} x)\,\sec^2 x. \end{aligned}$$

La Règle de dérivation des fonctions composées a été employée deux fois.

■ Tangentes aux courbes paramétrées

À la section 1.4, nous avons présenté des courbes définies par des équations paramétriques

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

C'est par la Règle de dérivation des fonctions composées que l'on peut obtenir les tangentes à de telles courbes. On suppose que les fonctions f et g sont dérivables et on souhaite connaître la tangente en un point de la courbe en lequel y est aussi une fonction dérivable de x. La règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

À condition que $dx/dt \neq 0$, on peut résoudre par rapport à dy/dx :

7

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{si } \frac{dx}{dt} \neq 0}$$

La formule 7 (dont on peut se souvenir en pensant à la simplification par dt) permet de calculer la pente dy/dx de la tangente à la courbe paramétrée sans avoir à éliminer le paramètre t. Si on voit la courbe comme la trajectoire décrite par un mobile, alors dy/dt et dx/dt sont les vitesses verticale et horizontale du mobile et la formule 7 affirme que la pente de la tangente est le rapport de ces vitesses. Elle conduit aussi aux points où la tangente est horizontale quand $dy/dt = 0$ (et $dx/dt \neq 0$) ou verticale quand $dx/dt = 0$ (et $dy/dt \neq 0$).

EXEMPLE 9 ■ Écrivez une équation de la tangente à la courbe paramétrée

$$x = 2\sin 2t \qquad y = 2\sin t$$

au point $(\sqrt{3}, 1)$. En quels points de cette courbe la tangente est-elle horizontale ou verticale ?

SOLUTION En fonction du paramètre t, la pente est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}(2\sin t)}{\dfrac{d}{dt}(2\sin 2t)} = \frac{2\cos t}{2(\cos 2t)(2)} = \frac{\cos t}{2\cos 2t}.$$

Comme le point $(\sqrt{3}, 1)$ correspond à $t = \pi/6$, la pente de la tangente y vaut

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/6} = \frac{\cos(\pi/6)}{2\cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{2(1/2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Une équation de la tangente est donc

$$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3}) \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}.$$

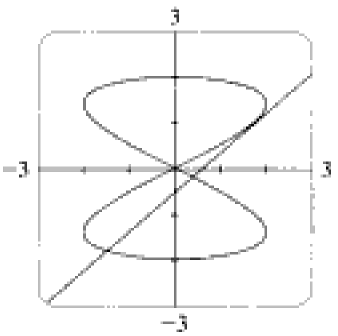


FIGURE 2

La figure 2 montre la courbe et sa tangente.

La tangente est horizontale quand $dy/dx = 0$, ce qui arrive quand $\cos t = 0$ (et $\cos 2t \neq 0$), ou $t = \pi/2$ ou $3\pi/2$. C'est donc aux points $(0, 2)$ et $(0, -2)$ que la tangente est horizontale, ce que nous aurions pu deviner au vu de la figure 2.

La tangente est verticale quand $dx/dt = 4\cos 2t = 0$ (et $\cos t \neq 0$), c'est-à-dire quand $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ ou $7\pi/4$. Les quatre points correspondants sur la courbe sont $(\pm 2, \pm\sqrt{2})$. Un coup d'oeil à la figure 2 montre que cette réponse est acceptable.

3.5 Exercices

1-6 ■ Écrivez la fonction composée sous la forme $f(g(x))$. [Reconnaissez la fonction intérieure $u = g(x)$ et la fonction extérieure $y = f(u)$.] Ensuite, calculez la dérivée dy/dx.

1. $y = (x^2 + 4x + 6)^5$

2. $y = \operatorname{tg} 3x$

3. $y = \cos(\operatorname{tg} x)$

4. $y = \sqrt[3]{1 + x^3}$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \sin(e^x)$

7-30 ■ Calculez la dérivée de la fonction.

7. $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

8. $f(t) = \dfrac{1}{(t^2 - 2t - 5)^4}$

9. $y = \cos(x^3)$

10. $y = \cos^3 x$

11. $y = 5^{-1/x}$

12. $y = 4\sec 5x$

13. $y = xe^{-x^2}$

14. $y = e^{-5x}\cos 3x$

15. $G(x) = (3x - 2)^{10}(5x^2 - x + 1)^{12}$

16. $g(t) = (6t^2 + 5)^3(t^3 - 7)^4$

17. $y = e^{x\cos x}$

18. $F(s) = \sqrt{s^3 + 1}\,(s^2 + 1)^4$

19. $F(y) = \left(\dfrac{y - 6}{y + 7}\right)^3$

20. $s(t) = \sqrt[4]{\dfrac{t^3 + 1}{t^3 - 1}}$

21. $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2z-1}}$ **22.** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{7-3x}}$

23. $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ **24.** $y = \operatorname{tg}(x^2) + \operatorname{tg}^2 x$

25. $y = \operatorname{tg}^2(x^3)$ **26.** $y = \sin(\sin(\sin x))$

27. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ **28.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

29. $y = \sin(\operatorname{tg} \sqrt{\sin x})$ **30.** $y = 2^{3^{x^2}}$

31-32 ■ Trouvez une équation de la tangente à la courbe au point donné.

31. $y = \dfrac{8}{\sqrt{4+3x}}$, $(4, 2)$ **32.** $y = x^2 e^{-x}$, $(1, 1/e)$

33. a) Trouvez une équation de la tangente à la courbe $y = 2/(1+e^{-x})$ au point $(0, 1)$.

b) Illustrez la partie a) en faisant apparaître le graphique de la courbe et la tangente dans la même fenêtre.

34. a) La courbe $y = |x|/\sqrt{2-x^2}$ est appelée **courbe en nez d'obus** ; trouvez une équation de la tangente à cette courbe au point $(1, 1)$.

b) Illustrez la partie a) en dessinant le graphique de la courbe et la tangente dans la même fenêtre d'affichage.

35. a) Si $f(x) = \sqrt{1-x^2}/x$, calculez $f'(x)$.

b) Vérifiez si votre réponse à la partie a) est acceptable en comparant les graphiques de f et f'.

36. a) Si $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$, calculez $f'(x)$ et $f''(x)$

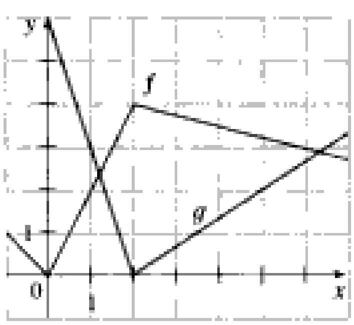
b) Vérifiez si vos réponses à la partie a) sont acceptables en comparant les graphiques de f, f' et f''.

37. Supposons que $F(x) = f(g(x))$ et que $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ et $f'(6) = 7$. Trouvez $F'(3)$.

38. Supposons que $w = u \circ v$ et $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $u'(0) = 3$, $u'(2) = 4$, $v'(0) = 5$ et $v'(2) = 6$. Trouvez $w'(0)$.

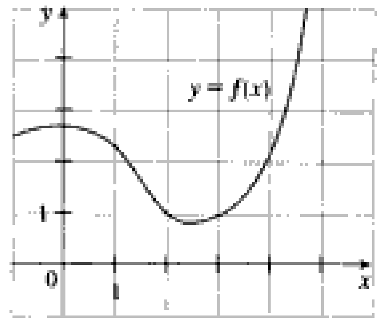
39. Étant donné les graphiques des fonctions f et g et les fonctions $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ et $w(x) = g(g(x))$, calculez chaque dérivée, si elle existe. Si elle n'existe pas, expliquez pourquoi.

a) $u'(1)$ b) $v'(1)$ c) $w'(1)$.



40. Le graphique ci-après est celui de la fonction f, $h(x) = f(f(x))$ et $g(x) = f(x^2)$. Utilisez le graphique de f pour estimer la valeur de chaque dérivée.

a) $h'(2)$ b) $g'(2)$



41. Utilisez la table pour estimer la valeur de $h'(0,5)$, si $h(x) = f(g(x))$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	12,6	14,8	18,4	23,0	25,9	27,5	29,1
$g(x)$	0,58	0,40	0,37	0,26	0,17	0,10	0,05

42. Si $g(x) = f(f(x))$, utilisez la table pour estimer la valeur de $g'(1)$.

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
$f(x)$	1,7	1,8	2,0	2,4	3,1	4,4

43. Soit $G(x) = h(\sqrt{x})$ où h est une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$.

a) Où G est-elle dérivable ?

b) Trouvez une expression de $G'(x)$.

44. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et α un nombre réel. Cherchez les expressions de $F'(x)$ et $G'(x)$ si $F(x) = f(x^\alpha)$ et $G(x) = [f(x)]^\alpha$.

45. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Cherchez les expressions de $F'(x)$ et $G'(x)$ si $F(x) = f(e^x)$ et $G(x) = e^{f(x)}$.

46. Si g est une fonction deux fois dérivable et $f(x) = xg(x^2)$, cherchez f'' en termes de g, g' et g''.

47. Déterminez les abscisses de tous les points de la courbe $y = \sin 2x - 2\sin x$ en lesquels la tangente est horizontale.

48. Sur quel intervalle la courbe $y = e^{-x^2}$ est-elle concave ?

49. Démontrez que la fonction $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ satisfait à l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$.

50. Pour quelles valeurs de r la fonction $y = e^{rx}$ satisfait-elle à l'équation $y'' + 5y' - 6y = 0$?

51. Calculez la dérivée d'ordre 50 de la fonction $y = \cos 2x$.

52. Calculez la dérivée d'ordre 1000 de la fonction $f(x) = xe^{-x}$.

53. Le déplacement d'un point sur une corde vibrante est décrit par l'équation $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\sin(10\pi t)$, où s est mesuré en centimètres et t en secondes. Déterminez la vitesse et l'accélération du point après t secondes.

54. Lorsque l'équation du mouvement d'un point est donné par l'équation $s = A\cos(\omega t + \delta)$, on dit que le point est soumis à un *mouvement harmonique simple.*

a) Déterminez la vitesse du point au moment t.

b) Quand la vitesse est-elle nulle ? Quand l'accélération est-elle nulle ?

55. Une céphéide est une étoile dont l'éclat varie suivant une période bien déterminée. Le prototype d'une telle étoile est la δ *Cep* dont le maximum d'éclat se produit tous les 5,4 jours. L'éclat moyen de cette étoile est 4,0 et son éclat varie de $\pm 0{,}35$. Au vu de ces données, l'éclat de la δ *Cep* au moment t, où t est mesuré en jours, est rendu par le modèle

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35\sin(2\pi t/5{,}4).$$

a) Déterminez le taux de variation de l'éclat après t jours.

b) Calculez, avec deux décimales correctes, le taux de croissance après un jour.

56. Dans certaines circonstances, une rumeur se répand selon l'équation

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

où $p(t)$ est la proportion de la population au courant de la rumeur au moment t et où a et k sont des constantes positives. À la section 7.6, nous verrons qu'une telle équation pour modéliser $p(t)$ convient bien.

a) Calculez $\lim_{t\to\infty} p(t)$.

b) Quelle est la vitesse de propagation de la rumeur ?

c) Dessinez p dans le cas $a = 10$, $k = 0{,}5$, le temps étant mesuré en heures. Sur la base du graphique, estimez le temps qu'il faudra pour que 80 % de la population ait appris la rumeur.

57. Un point se déplace en ligne droite et sa position est donnée par $s(t)$, sa vitesse par $v(t)$ et son accélération par $a(t)$. Démontrez que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}.$$

Expliquez la différence de sens entre dv/dt et dv/ds.

58. On gonfle un ballon atmosphérique sphérique. Au moment t, le volume du ballon est désigné par $V(t)$ et son rayon, par $r(t)$.

a) Que représentent les dérivées dV/dr et dV/dt ?

b) Exprimez dV/dt en termes de dr/dt.

. Quand le flash d'un appareil photo se déclenche, une charge, accumulée sur une capacité, est soudainement libérée. Les données du tableau décrivent la charge Q résiduelle de la capacité (mesurée en microcoulombs) au temps t (mesuré en secondes).

t	Q
0,00	100,00
0,02	81,87
0,04	67,03
0,06	54,88
0,08	44,93
0,10	36,76

a) En vous inspirant des méthodes de la section 1.7, trouvez un modèle exponentiel de la charge.

b) La dérivée $Q'(t)$ représente le courant électrique (mesuré en microampères, μA) qui passe de la capacité à la lampe. Utilisez la partie a) pour estimer le courant lorsque $t = 0{,}04$ s. Comparez avec le résultat de l'exemple 2 de la section 2.1.

60. La table reprend l'effectif de la population aux USA entre 1790 et 1860.

Année	Population
1790	3 929 000
1800	5 308 000
1810	7 240 000
1820	9 639 000
1830	12 861 000
1840	17 063 000
1850	23 192 000
1860	31 443 000

a) En vous inspirant des méthodes de la section 1.7, trouvez un modèle exponentiel de ces données. Indiquez les points et tracez le modèle. Que pensez-vous de la qualité du modèle ?

b) Estimez les taux de croissance de la population en 1800 et en 1850 en prenant la moyenne des pentes des sécantes.

c) Quels sont les taux de croissance en 1800 et en 1850 fournis par le modèle exponentiel ? Comparez-les avec ceux de la partie b).

d) Utilisez le modèle exponentiel pour prévoir la population en 1870. Comparez avec la population effective de 38 558 000. Comment expliquez-vous la divergence ?

61. Écrivez une équation de la tangente à la courbe paramétrée $x = t\sin t$, $y = t\cos t$ au point $(0, -\pi)$.

62. Montrez que la courbe décrite par les équations paramétriques $x = \sin t$, $y = \sin(t + \sin t)$ a deux tangentes à l'origine et écrivez leurs équations. Illustrez en dessinant la courbe et ses tangentes.

63. Une courbe C est décrite par les équations paramétriques $x = t^2, y = t^3 - 3t$.

a) Montrez que C a deux tangentes au point $(3, 0)$ et écrivez leurs équations.

b) Déterminez les points de C en lesquels la tangente est horizontale ou verticale.

c) Illustrez les parties a) et b) en dessinant C et les tangentes.

64. La cycloïde $x = r(\theta - \sin\theta), y = r(1 - \cos\theta)$ a été étudiée à l'exemple 6 de la section 1.4.

a) Trouvez une équation de la tangente à la cycloïde au point où $\theta = \pi/3$.

b) En quels points de cette courbe la tangente est-elle horizontale ? Verticale ?

c) Dessinez la cycloïde et ses tangentes en choisissant $r = 1$.

65. Certaines calculatrices disposent d'un mode algébrique qui les rend aptes à calculer la dérivée des fonctions, mais la forme que prend la réponse ne convient pas toujours et d'autres commandes sont alors nécessaires pour simplifier le résultat.

a) Commandez à une calculatrice d'effectuer la dérivation de la fonction de l'exemple 5 et comparez le résultat à celui de l'exemple. Demandez la simplification et comparez à nouveau.

b) Commandez à une calculatrice d'effectuer la dérivation de la fonction de l'exemple 6. Que se passe-t-il si vous demandez la simplification ? Que se passe-t-il si vous demandez la factorisation ? Quelle est la meilleure forme pour repérer les tangentes horizontales ?

66. a) Commandez à une calculatrice d'effectuer la dérivation de la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

et de simplifier le résultat.

b) Où le graphique de f a-t-il une tangente horizontale ?

c) Faites dessiner f et f' dans la même fenêtre d'affichage. Ces graphiques s'accordent-ils avec votre réponse à la partie b) ?

67. a) Démontrez

$$\frac{d}{dx}(\sin^n x \cos nx) = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$$

où n est un entier strictement positif.

b) Trouvez une formule analogue à celle de la partie a) pour la dérivée de $y = \cos^n x \cos nx$.

68. Soit la courbe $y = f(x)$ d'une fonction partout dérivable entièrement située au-dessus de l'axe Ox et qui n'a aucune tangente horizontale. Pour quelle valeur de y le taux de variation de y^5 par rapport à x est-il quatre-vingts fois supérieur au taux de variation de y par rapport à x ?

69. Utilisez la Règle de dérivation des fonctions composées pour montrer que si θ était mesuré en degrés, alors

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta.$$

(Ceci justifie la convention d'adopter la mesure en radians dans le traitement des fonctions trigonométriques en calcul différentiel et intégral : les formules de dérivation ne seraient pas aussi simples si l'unité de mesure était le degré.)

70. a) Écrivez $|x| = \sqrt{x^2}$ et par la Règle de dérivation des fonctions composées, montrez que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}.$$

b) Si $f(x) = |\sin x|$, calculez $f'(x)$ et dessinez les graphiques de f et f'. Où f n'est-elle pas dérivable ?

c) Si $g(x) = \sin|x|$, calculez $g'(x)$ et dessinez les graphiques de g et g'. Où g n'est-elle pas dérivable ?

71. Si $y = f(u)$ et $u = g(x)$, où f et g sont des fonctions deux fois dérivables, montrez que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

72. Le volume d'une boule de neige en train de fondre décroît à une vitesse proportionnelle à sa surface. S'il a fallu trois heures pour que la boule de neige perde la moitié de son volume, combien de temps faudra-t-il pour qu'elle soit complètement fondue ?

Sujet d'étude

Les courbes de Bézier

On rencontre les **courbes de Bézier**, du nom d'un mathématicien qui travaillait dans l'industrie automobile, dans le dessin assisté par ordinateur. Une cubique de Bézier est déterminée par quatre *points de contrôle* $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ et $P_3(x_3, y_3)$ et définie par les équations paramétriques

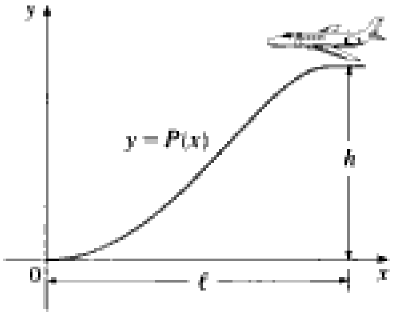
$$x = x_0(1-t)^3 + 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3$$
$$y = y_0(1-t)^3 + 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + y_3t^3,$$

où $0 \leqslant t \leqslant 1$. Remarquez que quand $t = 0$, $(x, y) = (x_0, y_0)$ et quand $t = 1$, $(x, y) = (x_3, y_3)$, ce qui fait que la courbe relie P_0 à P_3.

1. Faites dessiner la courbe de Bézier dont les points de contrôle sont $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ et $P_3(40, 5)$. Ensuite, dans la même fenêtre d'affichage, ajoutez les segments P_0P_1, P_1P_2 et P_2P_3 (l'exercice 19 de la section 1.4 indique comment procéder). Remarquez que les points de contrôle du milieu ne se trouvent pas sur la courbe ; la courbe part de P_0, prend la direction de P_1 et de P_2 sans les atteindre, et se termine en P_3.
2. Il semble d'après le dessin du problème 1 que la tangente en P_0 passe par P_1 et que la tangente en P_3 passe par P_2. Démontrez-le.
3. Essayer de produire une courbe de Bézier qui fasse une boucle en changeant le deuxième point de contrôle dans le problème 1.
4. Certaines imprimantes laser utilisent une courbe de Bézier pour représenter des lettres ou d'autres symboles. Procédez expérimentalement en jouant sur les points de contrôle jusqu'à ce que vous trouviez une courbe de Bézier qui donne un tracé décent de la lettre C.
5. On peut obtenir des formes plus compliquées en mettant bout à bout deux ou plusieurs courbes de Bézier. Les points de contrôle d'une première courbe de Bézier sont P_0, P_1, P_2 et P_3 et ceux d'une seconde courbe de Bézier, P_3, P_4, P_5 et P_6. Pour que les deux arcs de courbe se prolongent bien l'un l'autre, il faut que les tangentes en P_3 se superposent et de là, que les points P_2, P_3 et P_4 soient alignés sur cette tangente commune. En respectant ce principe, trouvez des points de contrôle d'une paire de courbes de Bézier qui forment ensemble la lettre S.

Projet appliqué

Où un pilote doit-il amorcer la descente ?



Le dessin montre la trajectoire d'un avion prêt à atterrir. Cette trajectoire satisfait à un certain nombre de conditions :

a) L'altitude de croisière est h au moment où la descente commence et l'avion est à une distance horizontale l du point d'atterrissage, situé à l'origine des coordonnées.

b) Durant toute la descente, le pilote doit maintenir une vitesse horizontale constante v.

c) La valeur absolue de l'accélération verticale ne peut dépasser une constante k (qui est bien moindre que l'accélération due à la gravité).

1. Déterminez un polynôme du troisième degré $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui satisfait à la condition a) en imposant les conditions qui conviennent sur $P(x)$ et $P'(x)$ au point initial de la descente et au point d'atterrissage.
2. Démontrez que les conditions b) et c) impliquent
$$\frac{6hv^2}{l^2} \leqslant k.$$
3. Supposons qu'une compagnie aérienne décide que l'accélération verticale d'un avion ne peut pas dépasser $k = 1\,400$ km/h². Si l'altitude de croisière est 10 000 mètres et la vitesse, 480 km/h, à quelle distance de l'aéroport le pilote doit-il amorcer la descente?
4. Faites dessiner la trajectoire d'approche dans les conditions décrites au problème 3.

3.6 La dérivation implicite

La plupart des fonctions que nous avons rencontrées jusqu'ici admettent une description où l'une des variables est exprimée explicitement par rapport à l'autre variable—par exemple,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \quad \text{ou} \quad y = x \sin x,$$

ou, de façon générale, $y = f(x)$. Certaines fonctions, par contre, sont définies implicitement par une relation qui lie x et y comme

1 $$x^2 + y^2 = 25,$$

ou

2 $$x^3 + y^3 = 6xy.$$

Dans certains cas il est possible de résoudre une telle équation par rapport à y comme une fonction (ou plusieurs fonctions) explicite(s) de x. Par exemple, si on résout l'équation 1 par rapport à y, on obtient $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. L'équation implicite 1 comprend donc les deux fonctions $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ et $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Les graphiques de f et g sont les demi-cercles supérieur et inférieur du cercle $x^2 + y^2 = 25$ (voyez la figure 1).

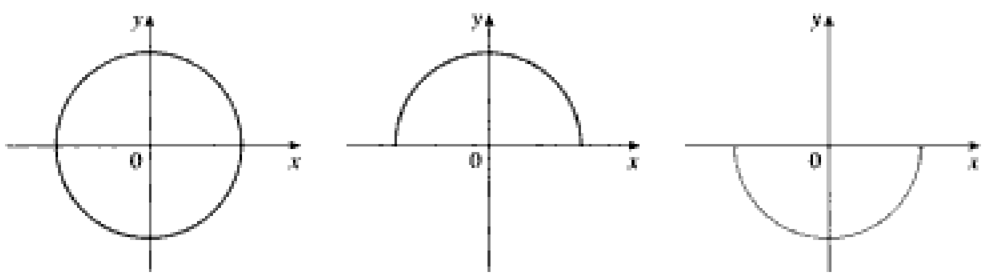


FIGURE 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

Il n'est pas facile en revanche de résoudre à la main l'équation 2 pour obtenir une expression explicite de y par rapport à x (un logiciel de calcul symbolique n'a aucune difficulté, mais les expressions qu'il produit sont très compliquées). Néanmoins, l'équation 2 est celle d'une courbe appelée le **folium de Descartes** présenté à la figure 2. Cette équation définit implicitement y comme plusieurs fonctions de x. La

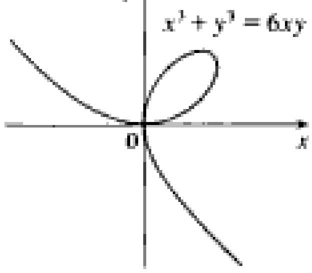


FIGURE 2
Le folium de Descartes

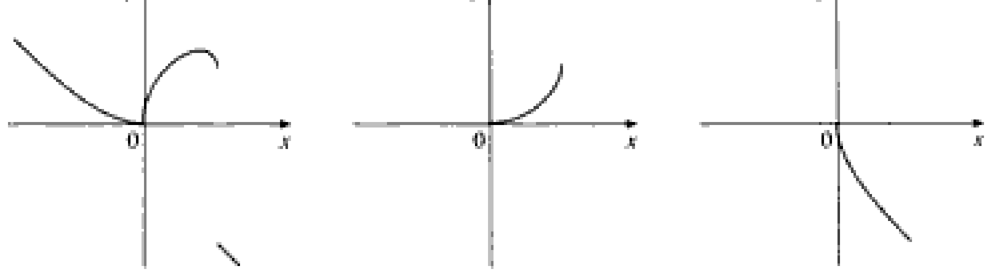


FIGURE 3
Graphiques de trois fonctions définies par le folium de Descartes

figure 3 montrent trois de ces fonctions. Quand on dit qu'une fonction f est définie implicitement par l'équation 2, cela signifie que l'équation

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

est satisfaite par toutes les valeurs de x appartenant au domaine de définition de f.

Heureusement, il n'est pas nécessaire d'expliciter y par rapport à x pour en calculer la dérivée. La **méthode de la dérivation implicite** sert à cela. Elle consiste à dériver d'abord les deux membres de l'équation par rapport à x et à résoudre ensuite l'équation qui en résulte par rapport à y'. Dans les exemples et les exercices qui vont suivre, il est toujours supposé que l'équation donnée détermine implicitement y comme une fonction dérivable de x afin que la méthode de la dérivation implicite soit applicable.

EXEMPLE 1 ■

a) Si $x^2 + y^2 = 25$, calculez $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Déterminez l'équation de la tangente au cercle $x^2 + y^2 = 25$ au point $(3, 4)$.

SOLUTION 1

a) Dérivons les deux membres de l'équation $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25),$$
$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0.$$

Comme y est une fonction de x, il faut appliquer au deuxième terme la Règle de dérivation des fonctions composées et cela donne

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx}.$$

D'où,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

On résout maintenant l'équation par rapport à dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

b) Comme au point $(3, 4)$, $x = 3$ et $y = 4$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}.$$

Une équation de la tangente au cercle au point $(3, 4)$ est dès lors

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad 3x + 4y = 25.$$

SOLUTION 2

b) La résolution de $x^2 + y^2 = 25$ par rapport à y conduit à $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Comme le point $(3, 4)$ appartient au demi-cercle supérieur d'équation $y = \sqrt{25 - x^2}$, nous considérons la fonction $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Sa dérivée, par la Règle de dérivation des fonctions composées, est

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$
$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

et, comme à la solution 1, l'équation de la tangente est $3x + 4y = 25$.

REMARQUE 1 ● L'exemple 1 met en évidence le fait que, même s'il est possible d'expliciter y en fonction de x, la dérivation implicite est plus facile à utiliser.

REMARQUE 2 ● L'expression dy/dx donne la dérivée en fonction à la fois de x et de y. Elle est correcte, quelle que soit la fonction y déterminée par l'équation implicite donnée. Par exemple, pour $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

tandis que pour $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

EXEMPLE 2 ■

a) Cherchez l'expression de y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

b) Déterminez la tangente au folium de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$ au point $(3, 3)$.

c) En quels points cette courbe admet-elle une tangente horizontale ou verticale ?

SOLUTION

a) On dérive les deux membres de $x^3 + y^3 = 6xy$ par rapport à x, on considère y comme une fonction de x, on emploie la Règle de dérivation des fonctions composées et celle du produit pour le membre de droite et il vient

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy',$$

ou

$$x^2 + y^2y' = 2y + 2xy'.$$

On résout par rapport à y' :

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

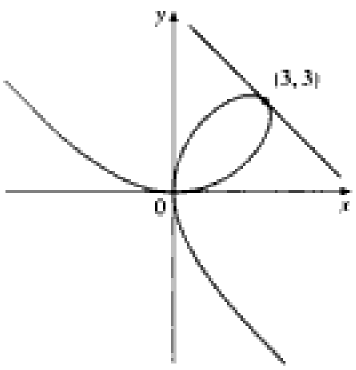


FIGURE 4

b) Quand $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1,$$

et un coup d'oeil à la figure 4 confirme que cette valeur est effectivement celle de la pente de la tangente en $(3, 3)$. Une équation de la tangente au folium en $(3, 3)$ est donc

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{ou} \qquad x + y = 6.$$

c) La tangente est horizontale si $y' = 0$. L'expression de y' obtenue à la partie a) montre que $y' = 0$ quand $2y - x^2 = 0$. On substitue $y = \frac{1}{2}x^2$ dans l'équation de la courbe et on trouve

$$x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right).$$

Cette dernière équation se simplifie en $x^6 = 16x^3$. D'où, soit $x = 0$, soit $x^3 = 16$. Quand $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, alors $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Ainsi, la tangente est horizontale en $(0, 0)$ et en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ ou approximativement $(2{,}5198; 3{,}1748)$. La figure 5 conforte notre réponse.

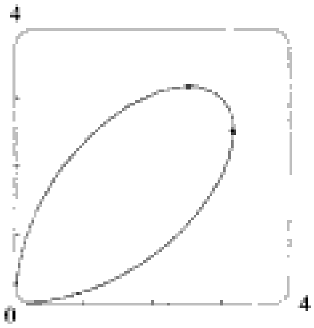


FIGURE 5

La tangente est verticale quand le dénominateur de l'expression dy/dx est nul. Mais on peut aussi observer que l'équation est inchangée lorsque x et y sont intervertis, ce qui se traduit graphiquement par une symétrie par rapport à la droite $y = x$. Les tangentes horizontales en $(0, 0)$ et en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$ deviennent des tangentes verticales en $(0, 0)$ et en $(2^{5/3}, 2^{4/3})$ (voyez la figure 5). □

REMARQUE ● De même qu'il existe une formule qui fournit les racines d'un polynôme du second degré, il existe aussi une formule qui donne les trois racines d'une équation du troisième degré, mais beaucoup plus compliquée. Une telle formule ou un logiciel de calcul symbolique appliqué à l'équation $x^3 + y^3 = 6xy$ donnerait comme expression de y en termes de x les trois fonctions suivantes :

Le mathématicien norvégien Niels Abel démontra en 1824 qu'il n'existait aucune formule générale qui donne les racines d'une équation du cinquième degré. Plus tard, le mathématicien français Evariste Galois démontra qu'il était impossible de trouver une formule générale qui donne les racines d'une équation de degré n (en termes d'opérations algébriques sur les coefficients) si n est un entier quelconque supérieur à 4.

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

et

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

(Ce sont les trois fonctions dont les graphiques sont dessinés à la figure 3). Il est indéniable que la dérivation implicite fait épargner beaucoup d'effort dans des cas comme celui-ci. De plus, elle fonctionne tout aussi bien pour des équations telles que

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12,$$

qu'il est *impossible* cette fois d'expliciter en y.

EXEMPLE 3 ■ Déterminez l'expression de y' si $\sin(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUTION En dérivant implicitement par rapport à x et en se souvenant que y est une fonction de x, on obtient

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = 2yy' \cos x + y^2(-\sin x).$$

(Au membre de gauche a été appliquée la Règle de dérivation des fonctions composées tandis que dans le membre de droite, il a aussi fallu utiliser la Règle de dérivation du produit.) On regroupe les termes qui contiennent y' :

$$\cos(x + y) + y^2 \sin x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'.$$

D'où

$$y' = \frac{y^2 \sin x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}.$$

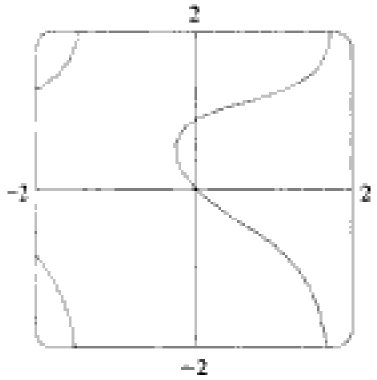


FIGURE 6

Pour autant que votre outil graphique permette de commander le graphique d'une fonction implicite, vous obtenez la figure 6 qui montre une partie de la courbe $\sin(x+y) = y^2 \cos x$. À titre de vérification des calculs, en $x = y = 0$, $y' = -1$ et on voit que la courbe passe par l'origine avec une pente plus ou moins égale à -1. ■

Deux courbes sont **orthogonales** si en chaque point où elles se coupent leurs tangentes sont perpendiculaires. Dans l'exemple suivant, on utilise la dérivation implicite pour montrer que les deux familles de courbes sont des **trajectoires orthogonales** l'une de l'autre ; c'est-à-dire que chaque courbe d'une famille est orthogonale à chaque courbe de l'autre famille. Les familles orthogonales se rencontrent dans divers domaines de la physique. Par exemple, les lignes de force d'un champ électrostatique sont orthogonales aux lignes de potentiel constant. En thermodynamique, les isothermes (courbes de température égale) sont orthogonales aux lignes de flux de chaleur. En aérodynamique, les lignes de courant (courbes de direction du flux d'air) sont des trajectoires orthogonales des courbes de vitesse équipotentielle.

EXEMPLE 4 ■ L'équation

3 $$xy = c \qquad c \neq 0$$

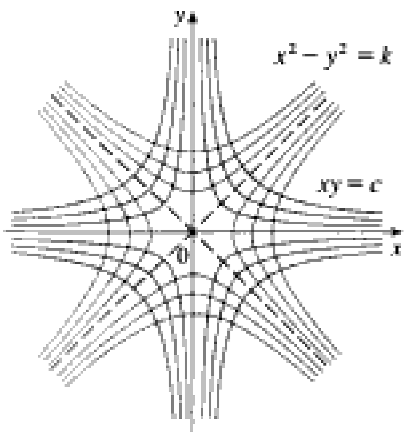


FIGURE 7

représente une famille d'hyperboles (les hyperboles diffèrent selon la valeur de c ; voyez la figure 7). L'équation

4 $$x^2 - y^2 = k \qquad k \neq 0$$

représente une autre famille d'hyperboles, d'asymptotes $y = \pm x$. Démontrez que chaque courbe de la famille (3) est orthogonale à chaque courbe de la famille (4) ; autrement dit que les familles sont mutuellement des trajectoires orthogonales.

SOLUTION La dérivation implicite de l'équation (3) donne

5 $$y + x\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{et de là,} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

La dérivation implicite de l'équation (4) donne

6 $$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{et de là,} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

Les équations (5) et (6) montrent qu'en chaque point d'intersection des courbes de chaque famille, les pentes des tangentes sont opposées de l'inverse l'une de l'autre. Par conséquent, les courbes se coupent à angle droit. ■

Dérivée des fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions trigonométriques réciproques sont revues dans l'annexe C.

Il est possible d'obtenir la dérivée des fonctions trigonométriques réciproques en recourant à la dérivation implicite. On se souvient que

$$y = \operatorname{Arcsin} x \qquad \text{signifie} \qquad \sin y = x \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

c) Exploitez le fait que x et y doivent satisfaire à l'équation initiale $x^4 + y^4 = 16$ pour simplifier votre réponse de la partie b) et obtenir :

$$y'' = -48\frac{x^2}{y^7}.$$

24. Si $x^2 + 6xy + y^2 = 8$, calculez y'' par dérivation implicite.

25-30 ■ Dérivez la fonction. Simplifiez quand c'est possible.

25. $y = \text{Arc}\sin(x^2)$ **26.** $y = (\text{Arc}\sin x)^2$

27. $y = \text{Arc}\,\text{tg}\,(e^x)$ **28.** $h(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{Arc}\sin x$

29. $H(x) = (1 + x^2)\text{Arc}\,\text{tg}\,x$ **30.** $y = \text{Arc}\,\text{tg}\,(x - \sqrt{1 + x^2})$

31-32 ■ Déterminez $f'(x)$. Vérifiez que votre réponse est plausible en comparant les graphiques de f et f'.

31. $f(x) = e^x - x^2\,\text{Arctg}\,x$

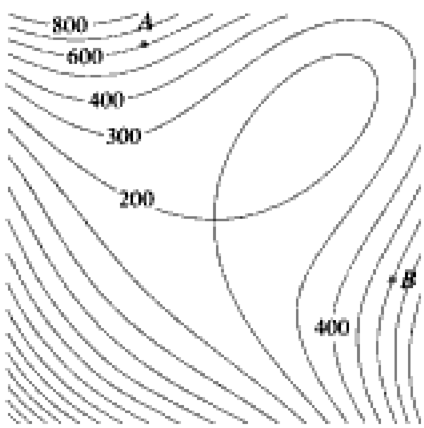
32. $f(x) = x\,\text{Arcsin}(1 - x^2)$

33-34 ■ Démontrez que les courbes données sont orthogonales.

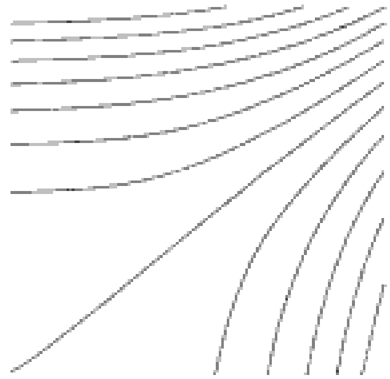
33. $2x^2 + y^2 = 3, \quad x = y^2$

34. $x^2 - y^2 = 5, \quad 4x^2 + 9y^2 = 72$

35. Les courbes de niveau sur la carte d'une région montagneuse relient tous les points de même altitude. Une balle qui roule en bas d'une montagne suit le tracé imposé par la pente la plus raide, qui est orthogonale aux courbes de niveau. Étant donné, ci-dessous, l'image par ses courbes de niveau d'une montagne, tracez le chemin que prendra une balle qui part de la position A ou qui part de la position B.



36. Le « monsieur météo » de la télévision présente des cartes qui montrent les fronts de pression. De telles cartes exhibent des *isobares*—des courbes le long desquelles la pression de l'air est constante. Considérez la famille d'isobares de la figure. Tracez quelques membres de la famille des trajectoires orthogonales des isobares. Sachant que le vent souffle des régions de haute pression vers les régions de basse pression, que représente la famille orthogonale ?



37-40 ■ Démontrez que les familles données sont des trajectoires orthogonales les unes des autres. Dessinez les deux familles de courbes dans le même système d'axes.

37. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

38. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

39. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

40. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

41. Démontrez, grâce à la dérivation implicite, qu'une tangente en un point P d'un cercle de centre O est perpendiculaire au rayon OP.

42. Montrez que la somme des coordonnées des points d'intersection avec les axes de n'importe quelle tangente à la courbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ est égale à c.

43. L'équation $x^2 - xy + y^2 = 3$ est celle d'une ellipse qui a subi une rotation, c'est-à-dire que ses axes ne sont plus parallèles aux axes de coordonnées. Déterminez les points en lesquels l'ellipse croise l'axe Ox et démontrez que les tangentes en ces points à l'ellipse sont parallèles.

44. a) En quel point la normale à l'ellipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ au point $(-1, 1)$ traverse-t-elle une deuxième fois l'ellipse ?

b) Illustrez la partie a) en faisant dessiner l'ellipse et la normale.

45. Repérez tous les points de la courbe $x^2y^2 + xy = 2$ en lesquels la tangente est de pente égale à -1.

46. Écrivez les équations des deux tangentes à l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 36$ qui passent par le point $(12, 3)$.

47. a) On suppose que f est une fonction injective dérivable et que sa réciproque f^{-1} est aussi dérivable. Utilisez la dérivation implicite pour montrer que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))},$$

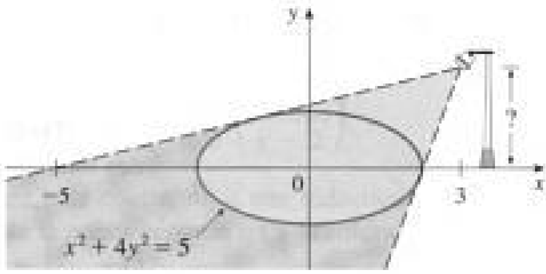
à condition que le dénominateur ne soit pas nul.

b) Si $f(4) = 5$ et $f'(4) = \frac{2}{3}$, que vaut $(f^{-1})'(5)$.

48. a) Montrez que $f(x) = 2x + \cos x$ est injective.
b) Quelle est la valeur de $f^{-1}(1)$?
c) Employez la formule de l'exercice 47 pour calculer $(f^{-1})'(1)$.

49. La **fonction de Bessel** d'ordre 0, $y = J(x)$, satisfait à l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ quel que soit x et sa valeur en 0 est $J(0) = 1$.
a) Que vaut $J'(0)$?
b) Par dérivation implicite, calculez $J''(0)$.

50. La figure montre l'ombre créée par une région elliptique $x^2 + 4y^2 \leqslant 5$ placée dans le champ d'une lampe située en un point d'abscisse 3. Si le bord de l'ombre passe par le point $(-5, 0)$, à quelle hauteur au-dessus de l'axe Ox la lampe se trouve-t-elle ?



3.7 La dérivée des fonctions logarithmes

Dans cette section, nous mettons la dérivation implicite au service du calcul des dérivées des fonctions logarithmes $y = \log_a x$ et, en particulier, de la fonction $y = \ln x$

1
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}.}$$

Démonstration Soit $y = \log_a x$. Alors,

$$a^y = x.$$

La formule 5 de la section 3.5 établit que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a.$$

On dérive implicitement par rapport à x et, grâce à la formule 5 de la section 3.5, on arrive à

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1,$$

et encore

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$ ■

Dans le cas où $a = e$, le facteur $\ln a$ dans le membre de droite de la formule 1 devient $\ln e = 1$ et on a la formule de la dérivée de la fonction logarithme en base e :

2
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.}$$

La comparaison des formules 1 et 2 révèle une des raisons qui fait préférer les logarithmes en base e aux autres en calcul différentiel et intégral : la formule de la dérivée est plus simple quand $a = e$ car $\ln e = 1$.

EXEMPLE 1 ■ Dérivez $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUTION Dans l'intention d'appliquer la Règle de dérivation des fonctions composées, on pose $u = x^3 + 1$. Alors, $y = \ln u$ et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1}.$$

De façon générale, la combinaison de la formule 2 et de la Règle de dérivation des fonctions composées, comme à l'exemple 1, conduit à

3 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}.}$$

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\dfrac{d}{dx}\ln(\sin x)$.

SOLUTION Grâce à 3,

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \operatorname{cotg} x.$$

EXEMPLE 3 ■ Dérivez $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUTION Cette fois, le logarithme est la fonction intérieure, de sorte que la Règle de dérivation des fonctions composées fournit :

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

EXEMPLE 4 ■ Dérivez $f(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$.

SOLUTION On applique la formule 1 dans le cas $a = 10$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \sin x) = \frac{1}{(2 + \sin x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \sin x)$$

$$= \frac{\cos x}{(2 + \sin x)\ln 10}.$$

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUTION 1

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}$$

$$= \frac{x - 2 - \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}.$$

SOLUTION 2 Si on commence par simplifier la fonction donnée selon les lois des logarithmes, la dérivation en est facilitée :

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right).$$

(Cette réponse peut être laissée telle quelle, mais une réduction au même dénominateur ferait voir qu'il s'agit de la même réponse qu'à la solution 1).

La figure 1 montre le graphique de la fonction f de l'exemple 5 et celui de sa dérivée. On peut ainsi vérifier visuellement le résultat. On remarque que $f'(x)$ prend des valeurs très grandes négatives lorsque f décroît rapidement.

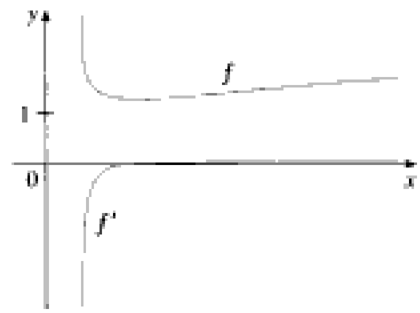


FIGURE 1

EXEMPLE 6 ■ Calculez $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$.

SOLUTION Comme

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

il s'ensuit que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donc, $f'(x) = 1/x$ pour tout x non nul.

La figure 2 montre le graphique de la fonction $f(x) = \ln|x|$ de l'exemple 6 et celui de sa dérivée $f'(x) = 1/x$. On remarque que quand x est petit, le graphique de $y = \ln|x|$ est très raide, ce qui correspond à de très grandes valeurs (négatives et positives) de $f'(x)$.

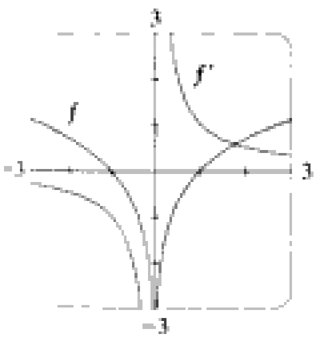


FIGURE 2

Le résultat de l'exemple 6 mérite d'être mémorisé :

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}.}$$

■ Dérivation logarithmique

Le calcul des dérivées des fonctions compliquées où interviennent des produits, des quotients ou des puissances peut être simplifié en passant préalablement aux logarithmes. Cette méthode, utilisée dans l'exemple suivant, s'appelle **dérivation logarithmique**.

EXEMPLE 7 ■ Dérivez

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}.$$

SOLUTION On prend le logarithme des deux membres de l'équation et on simplifie en accord avec les lois des logarithmes :

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2).$$

On dérive implicitement par rapport à x :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}.$$

Enfin, on résout en dy/dx :

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

$$= \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Étapes de la dérivation logarithmique

1. Prendre le logarithme en base e des deux membres de l'équation $y = f(x)$ et simplifier selon les lois des logarithmes.
2. Dériver implicitement par rapport à x.
3. Résoudre l'équation qui en résulte en y'.

Si $f(x) < 0$ pour certaines valeurs de x, alors $\ln f(x)$ n'est pas défini, mais on peut écrire $|y| = |f(x)|$ et utiliser la formule 4. Pour illustrer cette méthode, nous démontrons la version générale de la règle de dérivation d'une puissance, comme promis à la section 3.1.

La règle de dérivation d'une puissance Si n est un nombre réel quelconque et $f(x) = x^n$, alors

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Démonstration Appliquons à $y = x^n$ la dérivation logarithmique :

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0.$$

On peut montrer, directement à partir de la définition de la dérivée, que $f'(0) = 0$.

De là,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}.$$

Finalement

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}.$$ ■

Il est important de ne pas confondre la Règle de dérivation des puissances $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, où la base est variable et l'exposant une constante avec la Règle de dérivation des fonctions exponentielles $[(a^x)' = a^x \ln a]$, où la base est une constante et l'exposant variable. **Généralement, quatre cas peuvent se présenter :**

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a et b sont des constantes)
2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$
3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = [a^{g(x)}](\ln a)g'(x)$
4. Pour calculer $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^{g(x)}$, adopter la dérivation logarithmique, comme à l'exemple suivant.

La figure 3 illustre l'exemple 8 en exhibant le graphique de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ et celui de sa dérivée

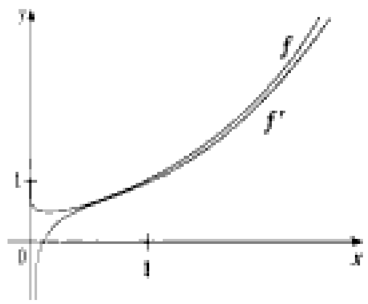


FIGURE 3

EXEMPLE 1 ■ Dérivez $y = x^{\sqrt{x}}$.

SOLUTION 1 Par dérivation logarithmique,

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$y' = y\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUTION 2 Une autre méthode consiste à d'abord écrire $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$ et à dériver ensuite :

$$\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}\ln x})$$

$$= e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln x)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(comme ci-dessus)}$$

Le nombre e, limite d'une fonction

Nous avons démontré que si $f(x) = \ln x$, alors $f'(x) = 1/x$ et donc, en particulier, $f'(1) = 1$. Nous exploitons ce résultat ici pour exprimer le nombre e comme une limite.

D'après la définition de la dérivée,

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] \qquad \text{(car ln est continue)}$$

Et comme $f'(1) = 1$, nous avons

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1.$$

Dès lors,

5
$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.}$$

La formule 5 est illustrée par le graphique de la fonction $y = (1+x)^{1/x}$ de la figure 4 et une table de valeurs de cette fonction pour de petites valeurs de x. C'est ainsi que la valeur de e avec 7 décimales correctes est

$$e \approx 2{,}7182818.$$

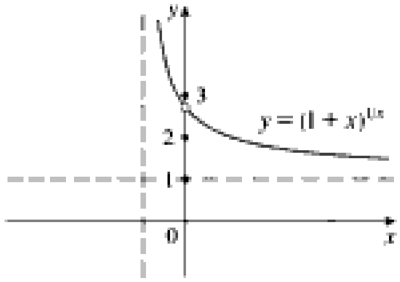


FIGURE 4

x	$(1+x)^{1/x}$
0,1	2,59374246
0,01	2,70481383
0,001	2,71692393
0,0001	2,71814593
0,00001	2,71826824
0,000001	2,71828047
0,0000001	2,71828169
0,00000001	2,71828181

Si on pose $n = 1/x$ dans la formule 5, alors, quand $x \to 0^+$, $n \to +\infty$ et il en résulte une autre expression de e

6
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

3.7 Exercices

1. Expliquez pourquoi, parmi les fonctions logarithmes $y = \log_a x$, celle en base e est beaucoup plus souvent utilisée que les autres.

2-16 ■ Dérivez la fonction.

2. $f(x) = \ln(2-x)$
3. $f(\theta) = \ln(\cos\theta)$
4. $f(x) = \cos(\ln x)$
5. $f(x) = \log_3(x^2-4)$
6. $f(x) = \log_{10}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$
7. $g(x) = \ln\dfrac{a-x}{a+x}$
8. $h(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$
9. $F(x) = \ln\sqrt{x}$
10. $G(x) = \sqrt{\ln x}$
11. $f(x) = \sqrt{x}\ln x$
12. $h(y) = \ln(y^3\sin y)$
13. $y = \ln|x^3-x^2|$
14. $G(u) = \ln\sqrt{\dfrac{3u+2}{3u-2}}$
15. $y = \ln(e^{-x}+xe^{-x})$
16. $y = \ln(x+\ln x)$

17-18 ■ Calculez y' et y''.

17. $y = \log_{10} x$
18. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$.

19-20 ■ Dérivez f et déterminez son domaine de définition.

19. $f(x) = x^2\ln(1-x^2)$
20. $f(x) = \ln\ln\ln x$

21. Si $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, calculez $f'(e)$.
22. Écrivez une équation de la tangente à la courbe $y = (\ln x)/x$ aux points $(1, 0)$ et $(e, 1/e)$. Faites une illustration qui reprend le graphique de la fonction et celui de ses tangentes.
23. a) Sur quel intervalle $f(x) = x\ln x$ est-elle décroissante ?
    b) Sur quel intervalle f est-elle convexe ?
24. Soit $f(x) = \sin x + \ln x$. Calculez $f'(x)$. Vérifiez si votre réponse est pertinente en comparant les graphiques de f et f'.

25-34 ■ Dérivez la fonction par dérivation logarithmique.

25. $y = (3x - 7)^4(8x^2 - 1)^3$

26. $y = x^{2/5}(x^2 + 8)^4 e^{x^2 + x}$

27. $y = \dfrac{(x + 1)^4(x - 5)^3}{(x - 3)^8}$

28. $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x + 1}}$

29. $y = x^x$

30. $y = x^{1/x}$

31. $y = x^{\sin x}$

32. $y = (\sin x)^x$

33. $y = (\ln x)^x$

34. $y = x^{\ln x}$

35. Calculez y' sachant que $y = \ln(x^2 + y^2)$.

36. Calculez y' sachant que $x^y = y^x$.

37. Trouvez une formule pour $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

38. Calculez $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

39. Démontrez par la définition de la dérivée que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$$

40. Démontrez que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, quel que soit $x > 0$.

Sujet à découvrir

Les fonctions hyperboliques

Certaines combinaisons des fonctions exponentielles e^x et e^{-x} surgissent tellement souvent en mathématiques et dans ses appplications qu'elles méritent de recevoir des noms particuliers. Il est proposé ici d'explorer les propriétés des fonctions appelées **hyperboliques**. Le **sinus hyperbolique**, le **cosinus hyperbolique**, la **tangente hyperbolique** et la **sécante hyperbolique** sont définis par

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

De la même façon que les fonctions trigonométriques sont liées au cercle, ces fonctions-ci sont liées à l'hyperbole, ce qui explique le nom qu'elles portent.

1. a) Tracez, à la main, dans un même système d'axes, les graphiques des fonctions $y = \frac{1}{2}e^x$ et $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ et construisez par addition graphique la courbe $y = \operatorname{ch} x$.

b) Vérifiez la précision de votre dessin en commandant à votre calculatrice ou ordinateur de dessiner le graphique de ch x. Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de cette fonction.

2. L'application la plus connue des fonctions hyperboliques est l'usage du ch pour décrire le profil d'un câble suspendu. On démontre que, si un câble pesant souple (tel un fil de téléphone ou une ligne à haute tension) est suspendu entre deux points situés à la même hauteur, il prend la forme d'une courbe d'équation $y = a(\operatorname{ch}(x/a))$, appelée aussi *caténaire* (le mot latin *catena* signifie « chaîne »). Tracez quelques courbes de la famille des fonctions $y = a(\operatorname{ch} x/a)$. Observez comment les graphiques se modifient en fonction de a.

3. Faites dessiner sh et th. Sur la base du graphique, à votre avis, laquelle des fonctions sh, ch et th est paire? Est impaire? Démontrez votre conjecture à partir des définitions.

4. Démontrez l'identité $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

5. Faites dessiner les courbes décrites paramétriquement par $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$. Reconnaissez-vous cette courbe?

6. Démontrez l'identité $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.

7. Les identités des points 4 et 6 ressemblent à des identités trigonométriques bien connues. Essayez de découvrir d'autres identités hyperboliques en vous inspirant d'identités trigonométriques connues.
8. Les formules de dérivation des fonctions hyperboliques ressemblent à celles des fonctions trigonométriques, au signe près parfois.
   a) Démontrez que $\frac{d}{dx}(\text{sh } x) = \text{ch } x$.
   b) Découvrez les formules de dérivation de $y = \text{ch } x$ et $y = \text{th } x$.
9. a) Expliquez pourquoi la fonction sh x est injective.
   b) Cherchez la formule de la dérivée de la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique appelée fonction Argument sh et notée Argsh (indication: comment avons-nous déduit la dérivée de $y = \text{Arcsin } x$?).
   c) Démontrez que $\text{Argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
   d) Calculez la dérivée de Argsh x à partir de son expression en logarithme. Comparez avec la formule obtenue en b).
10. a) Expliquez pourquoi la fonction th est injective.
   b) Cherchez la formule de la dérivée de la fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique appelée fonction Argument th et notée Argth.
   c) Démontrez que $\text{Argth} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
   d) Calculez la dérivée de th x à partir de son expression en logarithme. Comparez avec la formule obtenue en b).
11. En quel point la courbe $y = \text{ch } x$ admet-elle une tangente de pente 1?

3.8 Les approximations affines et les différentielles

À la section 2.9, nous avons envisagé les approximations affines des fonctions, basées sur l'idée qu'une tangente passe vraiment très près de la courbe à proximité du point de tangence. Maintenant que nous disposons des règles de dérivation, nous revenons à cette idée et utilisons des méthodes graphiques pour décider de la qualité d'une approximation affine. Nous allons également voir de quelle manière les approximations affines sont appliquées en physique.

Approximations affines

Une équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Ainsi, comme à la section 2.9, l'approximation

1 $$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

est appelée **approximation affine** ou **approximation par la tangente** de f en a et la fonction

2 $$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

dont le graphique est la droite tangente, est appelée la **linéarisation** de f en a. L'approximation affine $f(x) \approx L(x)$ est bonne lorsque x est proche de a (voyez la figure 1).

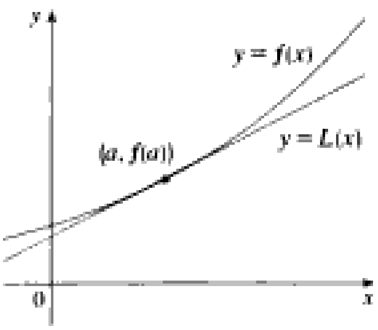


FIGURE 1

EXEMPLE 1 ■ Cherchez l'approximation affine de la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $a = 1$ et servez-vous en pour estimer la valeur de $\sqrt{3{,}98}$ et de $\sqrt{4{,}05}$.

SOLUTION La dérivée de $f(x) = (x+3)^{1/2}$ est

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}},$$

et donc nous avons $f(1) = 2$ et $f'(1) = 1/4$. Introduisons ces valeurs dans l'expression 2,

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}.$$

L'approximation affine correspondante est

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}.$$

En particulier,

$$\sqrt{3{,}98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0{,}98}{4} = 1{,}995 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{4{,}05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1{,}05}{4} = 2{,}0125.$$

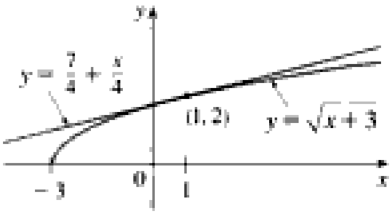


FIGURE 2

L'approximation affine établie à l'exemple 1 est illustrée dans la figure 2. Vous observez que la tangente est une bonne approximation de la fonction donnée pour des valeurs de x proches de 1. Évidemment une calculatrice ou un ordinateur pourrait vous donner aussi des approximations de $\sqrt{3{,}98}$ et de $\sqrt{4{,}05}$, mais l'approximation affine vaut, elle, sur tout un intervalle.

Quelle est la qualité de l'approximation obtenue à l'exemple 1 ? L'exemple qui suit montre que, à l'aide d'un outil graphique, il est possible de déterminer un intervalle sur lequel une précision déterminée est garantie par l'approximation affine.

EXEMPLE 2 ■ Pour quelles valeurs de x l'approximation affine

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

fournit-elle une précision à moins de 0,5 ? Et si on souhaite une précision à moins de 0,1 ?

SOLUTION Une précision à moins de 0,5 signifie que la différence entre les fonctions doit être inférieure à 0,5 :

$$\left|\sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4}\right)\right| < 0{,}5.$$

On peut aussi écrire, de façon équivalente,

$$\sqrt{x+3} - 0{,}5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0{,}5.$$

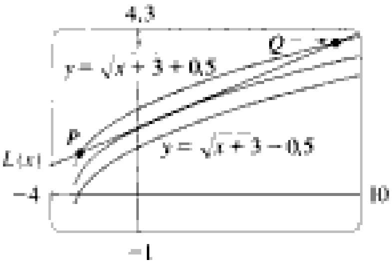


FIGURE 3

Ceci signifie que l'approximation affine doit se trouver entre les courbes obtenues en translatant la courbe $\sqrt{x+3}$ vers le haut et vers le bas de 0,5. La figure 3 montre les points P et Q en lesquels la tangente $y = (7+x)/4$ coupe la plus haute des deux courbes. En zoomant et à l'aide du curseur, on peut estimer que l'abscisse de P vaut à

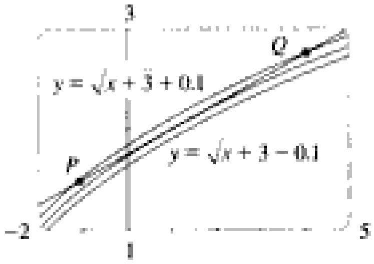


FIGURE 4

peu près −2,66 et celle de Q, 8,66. Donc, l'approximation

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

est précise à moins de 0,5 pour $-2,6 < x < 8,6$ (les nombres ont été arrondis par précaution).

De la même façon, une lecture rapprochée de la figure 4 montre que l'approximation est à moins de 0,1 pour $-1,1 < x < 3,9$.

Les approximations du premier degré sont fréquemment utilisées en physique. Pour pouvoir analyser la portée d'une équation, un physicien est parfois contraint de simplifier une fonction en la remplaçant par son approximation affine. Par exemple, dans le chapitre consacré à l'étude de la période d'un pendule dans un manuel de physique, on peut lire que l'accélération tangentielle est donnée par l'expression $a_T = -g \sin\theta$, qui est immédiatement remplacée par $a_T \approx -g\theta$ avec la raison que $\sin\theta$ est très proche de θ lorsque θ n'est pas trop grand. [Voyez, par exemple, Eugène Hecht, *Physique* (De Boeck Université, 1999), p. 457]. On peut effectivement vérifier que la linéarisation de la fonction $f(x) = \sin x$ en $a = 0$ est $L(x) = x$ et donc que l'approximation affine en 0 est

$$\sin x \approx x,$$

(voyez l'exercice 11). Quand on établit la formule de la période d'un pendule, on fait donc bien usage de l'approximation que donne la tangente à la courbe représentative de la fonction sinus.

Voici un autre exemple ; en optique, on étudie les rayons paraxiaux, ce sont ceux qui font un angle faible par rapport à l'axe principal. Dans la théorie de ces rayons, tant $\sin\theta$ que $\cos\theta$ sont remplacés par leur linéarisation. Autrement dit,

$$\sin\theta \approx \theta \qquad \text{et} \qquad \cos\theta \approx 1$$

parce que θ est proche de 0. Les résultats des calculs faits avec ces approximations sont devenus la base théorique sur laquelle repose la fabrication des lentilles [Voyez Eugène Hecht, *Physique* (De Boeck Université, 1999), p. 971].

D'autres exemples de linéarisation seront encore présentés à la section 8.9.

Différentielles

Les idées en toile de fond des approximations affines sont parfois présentées en termes de *différentielles*. Si $y = f(x)$ et si f est une fonction dérivable, alors la **différentielle** dx est une variable indépendante ; ce qui revient à dire que dx peut prendre n'importe quelle valeur réelle. La **différentielle** dy est maintenant définie en termes de dx par l'équation

Si $dx \neq 0$, on peut diviser les deux membres de l'équation 3 par dx

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Nous avions écrit des équations similaires précédemment, mais ici le membre de gauche peut réellement être interprété comme un quotient de différentielles.

$$dy = f'(x)dx. \tag{3}$$

Cette expression fait de dy une variable dépendante, qui en réalité dépend à la fois de x et de dx. La valeur de dy n'est calculable qu'après avoir attribué une valeur à dx et une valeur du domaine de définition de f à x.

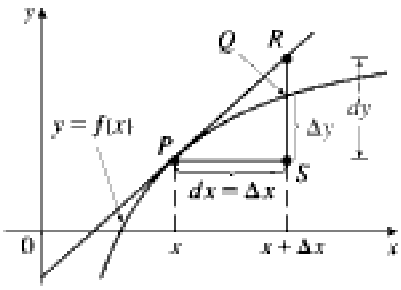


FIGURE 5

La figure 5 montre l'interprétation géométrique de la différentielle. Soit $P(x, f(x))$ et $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ des points sur la courbe $y = f(x)$ et soit $dx = \Delta x$. La variation correspondante de y est

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Comme la pente de la tangente PR est égale à la dérivée $f'(x)$, la distance de S à R est égale à $f'(x)dx$. Dès lors, dy représente l'augmentation (ou diminution) d'ordonnée sur la tangente (la variation de l'approximation affine) tandis que Δy représente l'augmentation (ou diminution) d'ordonnée sur la courbe $y = f(x)$ suite à une variation dx de x.

Avec ces notations, l'approximation affine (1) s'écrit

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy.$$

Par exemple, pour la fonction $f(x) = \sqrt{x + 3}$ de l'exemple 1, on a

$$dy = f'(x)dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}.$$

Si $a = 1$ et $dx = \Delta x = 0{,}05$, alors

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0{,}0125,$$

et

$$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125,$$

comme on avait déjà trouvé à l'exemple 1.

Notre exemple final montre l'usage des différentielles pour estimer les erreurs commises suite à des imprécisions de mesurage.

EXEMPLE 3 ■ On mesure le rayon d'une sphère et on trouve 21 cm, avec une erreur qui ne dépasse pas 0,05 cm. On calcule alors le volume de la sphère. Quelle est la précision de ce résultat ?

SOLUTION On sait que le volume d'une sphère de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si l'erreur maximale possible de la mesure du rayon est notée $\Delta r = dr$, alors, l'erreur ΔV qui peut affecter la valeur du volume est approximée par la différentielle

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Dans le cas $r = 21$ et $dr = 0{,}05$, la différentielle vaut

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277.$$

Au pire, la valeur calculée du volume est exacte à 277 cm^3 près.

REMARQUE ● L'erreur possible dans l'exemple 3 semble à première vue assez importante. On en a cependant une meilleure idée en considérant l'**erreur relative**, qui s'obtient en divisant l'erreur par le volume total :

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}.$$

Ainsi, l'erreur relative sur le volume est environ le triple de l'erreur relative sur le rayon. À l'exemple 3, l'erreur relative sur le rayon était à peu près égale à $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ et provoquait une erreur relative d'à peu près 0,007 sur le volume. On s'exprime encore plus couramment en **pourcentages d'erreur** : 0,24 % d'erreur sur le rayon et 0,7 % sur le volume.

3.8 Exercices

1-4 ■ Déterminez la linéarisation $L(x)$ de la fonction en a ?

1. $f(x) = x^3$, $a = 1$

2. $f(x) = \ln x$, $a = 1$

3. $f(x) = e^{-2x}$, $a = 0$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = -8$

5. Quelle est l'approximation affine de la fonction $f(x) = \sqrt{1 - x}$ en $a = 0$? Quelle valeur approchée vous donne-t-elle des nombres $\sqrt{0{,}9}$ et $\sqrt{0{,}99}$? Illustrez en dessinant f et sa tangente.

6. Quelle est l'approximation affine de la fonction $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ en $a = 0$? Quelle valeur approchée vous donne-t-elle des nombres $\sqrt[3]{0{,}95}$ et $\sqrt[3]{1{,}1}$? Illustrez en dessinant g et sa tangente.

7-10 ■ Vérifiez l'approximation affine donnée en $a = 0$. Déterminez ensuite les valeurs de x pour lesquelles la précision fournie par cette fonction du premier degré est à moins de 0,1 près.

7. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

8. $\operatorname{tg} x \approx x$

9. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \approx 1 + x$

11. Dans un livre de physique, pour établir la formule $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ de la période d'un pendule de longueur L, l'auteur obtient l'expression $a_T = -g \sin\theta$ pour l'accélération tangentielle de la masse oscillante. Il ajoute alors « pour des angles faibles, la valeur de θ en radians est très proche de la valeur de $\sin\theta$; elles diffèrent de moins de 2 % si les oscillations n'excèdent pas des angles de 20°. »

a) Vérifiez que l'approximation affine de la fonction sinus en 0 est bien

$$\sin x \approx x.$$

b) Utilisez un outil graphique pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles la différence entre $\sin x$ et x est inférieure à 2 %. Faites alors la conversion en degrés pour confirmer l'affirmation de l'auteur.

12. Soit f une fonction telle que $f(1) = 2$ et dont la dérivée est $f'(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ (La formule de $f(x)$ n'est pas donnée et ne cherchez pas à la trouver, vous n'y réussiriez pas).

a) Estimez la valeur $f(1{,}1)$ par approximation du premier degré.

b) Votre estimation est-elle par défaut ou par excès ? Pourquoi ?

13. Soit $y = \cos x$.

a) Écrivez l'expression de dy.

b) Calculez dy et Δy pour $x = \pi/6$ et $dx = 0{,}05$.

14. Soit $y = \sqrt{x}$.

a) Écrivez l'expression de dy.

b) Calculez dy et Δy pour $x = 1$ et $dx = \Delta x = 1$.

c) Faites un dessin comme celui de la figure 5 où apparaissent les segments de longueur dx, dy et Δy.

15. On mesure l'arête d'un cube et on trouve 30 cm, mais il est possible que la mesure ne soit correcte qu'à 0,1 cm près. Quelle est, dans ces conditions, l'erreur maximale qui peut affecter a) la valeur du volume du cube et b) la valeur de la surface latérale du cube, calculées à partir de cette mesure ?

16. Le rayon d'un disque mesure 24 cm avec une erreur maximum de 0,2 cm.

a) Utilisez les différentielles pour estimer l'erreur maximale dont la valeur de l'aire peut être affectée.

b) Que vaut l'erreur relative ? Quel est le pourcentage d'erreur ?

17. Utilisez les différentielles pour évaluer la quantité de peinture nécessaire à couvrir d'une couche de 0,05 cm d'épaisseur un dôme hémisphérique de 50 m de diamètre.

18. Quand le sang circule dans un vaisseau sanguin, le flux F (volume de sang écoulé par unité de temps en un point donné) est proportionnel à la quatrième puissance du rayon R du vaisseau sanguin :

$$F = kR^4.$$

C'est la loi de Poiseuille (nous la justifierons à la section 6.6). Quand une artère est partiellement bouchée, on peut, par une opération appelée angioplastie, rétablir une circulation normale en introduisant un cathéter terminé par un ballon que l'on place à l'intérieur de l'artère et par lequel on insuffle de l'air de façon à élargir l'artère.

Montrez que la variation relative de F est environ quatre fois supérieure à la variation relative de R. Quel est l'effet sur le flux sanguin d'un accroissement de 5 % du rayon de l'artère ?

Sujet d'étude

Les polynômes de Taylor

L'approximation par la tangente $L(x)$ est la meilleure approximation du premier degré de $f(x)$ près de $x = a$ parce que $f(x)$ et $L(x)$ ont le même taux de variation (dérivée) en a. Pour améliorer cette approximation du premier degré, essayons une du second degré, quadratique, $P(x)$. Géométriquement parlant, cela veut dire que nous approchons la courbe par une parabole au lieu de l'approcher par une droite. Afin de s'assurer que l'approximation soit bonne, nous requérons les conditions suivantes :

a) $P(a) = f(a)$ (P et f doivent avoir la même valeur en a)
b) $P'(a) = f'(a)$ (P et f doivent avoir le même taux de variation en a)
c) $P''(a) = f''(a)$ (les pentes de P et f doivent avoir le même taux de variation)

1. Déterminez l'approximation quadratique $P(x) = A + Bx + Cx^2$ de la fonction $f(x) = \cos x$ qui satisfait aux trois conditions ci-dessus en $a = 0$. Dessinez P, f et l'approximation affine $L(x) = 1$ dans la même fenêtre d'affichage. Commentez la manière dont P et L approximent la fonction cosinus au voisinage de 0.

2. Déterminez les valeurs de x pour lesquelles l'approximation quadratique $f(x) = P(x)$ de la question précédente est précise au dixième près (*Indication :* Dessinez $y = P(x)$, $y = \cos x - 0{,}1$ et $y = \cos x + 0{,}1$ dans la même fenêtre d'affichage.)

3. Pour approximer une fonction f par une fonction du deuxième degré P au voisinage d'un point a, il est préférable d'écrire P sous la forme

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2.$$

Montrez que la fonction du deuxième degré qui satisfait aux conditions ci-dessus est

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2.$$

4. Déterminez l'approximation quadratique de $f(x) = \sqrt{x + 3}$ au voisinage de $a = 1$. Dessinez f, l'approximation quadratique et l'approximation affine obtenue à l'exemple 2 de la section 3.8 dans la même fenêtre d'affichage. Quelles sont vos conclusions ?

5. Loin d'être satisfaits d'une approximation du premier ou du second degré de $f(x)$ au voisinage de $x = a$, nous tentons de trouver de meilleures approximations à l'aide de polynômes de degrés encore plus élevés. Nous envisageons un polynôme de degré n

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tel que T_n et f soient égales en $x = a$ ainsi que leurs n premières dérivées respectives. Montrez, en calculant les dérivées successives en $x = a$, que ces conditions sont remplies si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ et, de façon générale, si

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

où $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$. Le polynôme qui en découle

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

s'appelle le **polynôme de Taylor de degré n de f centré en a.**

6. Écrivez le polynôme de Taylor de degré 8 centré en $a = 0$ de la fonction $f(x) = \cos x$. Faites dessiner f ainsi que les polynômes de Taylor T_2, T_4, T_6 et T_8 dans la fenêtre $[-5, 5]$ sur $[-1{,}4; 1{,}4]$ et appréciez la qualité de l'approximation de f par ces polynômes.

Chapitre 3 Révision

• CONTRÔLE DES CONCEPTS •

1. Énoncez chacune des règles de dérivation et écrivez-la en symboles mathématiques.

a) La Règle de dérivation d'une puissance.
b) La Règle de dérivation du produit par une constante.
c) La Règle de dérivation d'une somme.
d) La Règle de dérivation d'un produit.
e) La Règle de dérivation d'un quotient.
f) La Règle de dérivation d'une fonction composée.

2. Calculez la dérivée de la fonction.

a) $y = x^n$ b) $y = e^x$ c) $y = a^x$
d) $y = \ln x$ e) $y = \log_a x$ f) $y = \sin x$
g) $y = \cos x$ h) $y = \operatorname{tg} x$ i) $y = \operatorname{cosec} x$
j) $y = \sec x$ k) $y = \operatorname{cotg} x$
l) $y = \operatorname{Arcsin} x$ m) $y = \operatorname{Arctg} x$

3. a) Comment le nombre e est-il défini?
b) Donnez une définition de e en termes de limite.
c) Expliquez pourquoi la fonction exponentielle $y = e^x$ est plus souvent utilisée en calcul différentiel et intégral que les autres fonctions exponentielles $y = a^x$.
d) Expliquez pourquoi la fonction logarithme $y = \ln x$ est plus souvent utilisée en calcul différentiel et intégral que les autres fonctions logarithmes $y = \log_a x$.

4. a) Expliquez comment fonctionne la dérivation implicite.
b) Expliquez comment fonctionne la dérivation logarithmique.

5. Donnez une expression de la linéarisation de f en a.

▲ VRAI-FAUX ▲

Dites si la proposition est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquez pourquoi. Si elle est fausse, expliquez pourquoi et donnez un exemple qui contredit la proposition.

1. Si f et g sont dérivables, alors
$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x).$$

2. Si f et g sont dérivables, alors
$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x).$$

3. Si f et g sont dérivables, alors
$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

4. Si f est dérivable, alors
$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

5. Si f est dérivable, alors
$$\frac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{x}}.$$

6. Si $y = e^2$, alors $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg}^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Si $g(x) = x^5$, alors $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80.$

◆ EXERCICES ◆

1-26 ■ Calculez y'.

1. $y = (x + 2)^8(x + 3)^6$ **2.** $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

3. $y = \dfrac{x}{\sqrt{9 - 4x}}$ **4.** $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

5. $y = \sin(\cos x)$ **6.** $y = \operatorname{Arcsin}(e^x)$

7. $y = xe^{-1/x}$

8. $y = x^r e^{sx}$

9. $y = \operatorname{tg}\sqrt{1-x}$

10. $y = \dfrac{1}{\sin(x - \sin x)}$

11. $y = x/(8-3x)$

12. $y = \ln(\operatorname{cosec} 5x)$

13. $y = e^{cx}(c\sin x - \cos x)$

14. $y = \ln(x^2e^x)$

15. $y = e^{e^x}$

16. $y = 5^{x \operatorname{tg} x}$

17. $x^2y^3 + 3y^2 = x - 4y$

18. $x \operatorname{tg} y = y - 1$

19. $y = \log_{10}(x^2 - x)$

20. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

21. $y = \ln \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$

22. $y = \operatorname{Arctg}(\operatorname{Arcsin}\sqrt{x})$

23. $y = \sin(\operatorname{tg}\sqrt{1+x^3})$

24. $xe^y = y - 1$

25. $y = \dfrac{\sqrt{x+1}\,(2-x)^5}{(x+3)^7}$

26. $y = x^{e^x}$

27. Calculez $f'''(0)$ si $f(x) = 1/(2x-1)^5$.

28. Calculez y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

29. Si $f(x) = 2^x$, trouvez l'expression de $f^{(n)}(x)$.

30. Écrivez une équation de la tangente à la courbe $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ au point $(4, 1)$.

31. a) Calculez $f'(x)$ si $f(x) = x\sqrt{5-x}$.
    b) Trouvez des équations pour les tangentes à la courbe $y = x\sqrt{5-x}$ aux points $(1, 2)$ et $(4, 4)$.
    c) Illustrez la partie b) en faisant tracer la courbe et ses tangentes.
    d) Vérifiez si votre réponse à la partie a) est vraisemblable en comparant les graphiques de f et f'.

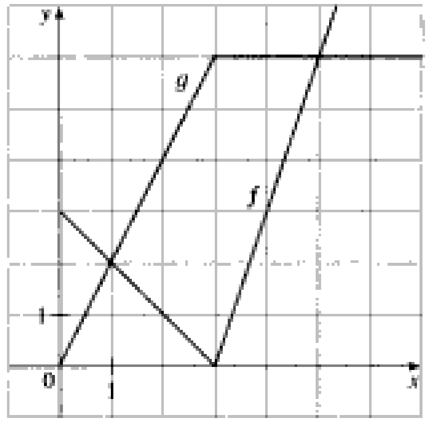
32. a) Calculez f' et f'' si $f(x) = 4x - \operatorname{tg} x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
    b) Vérifiez si votre réponse à la partie a) est plausible en comparant les graphiques de f, f' et f''.

33. Déterminez l'expression de $f'(x)$, si $f(x) = xe^{\sin x}$. Faites afficher dans la même fenêtre les graphiques de f et f' et commentez.

34. a) Faites afficher le graphique de la fonction $f(x) = x - 2\sin x$ dans la fenêtre $[0, 8]$ sur $[-2, 8]$.
    b) Sur lequel des intervalles $[1, 2]$ ou $[2, 3]$ le taux moyen de variation est-il le plus grand ?
    c) Est-ce en $x = 2$ ou en $x = 5$ que le taux de variation instantané est le plus grand ?
    d) Contrôlez vos estimations visuelles de la partie c) en calculant $f'(x)$ et en comparant les valeurs numériques $f'(2)$ et $f'(5)$.

35. On suppose que $h(x) = f(x)g(x)$ et que $F(x) = f(g(x))$. En outre, $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ et $f'(5) = 11$. Calculez a) $h'(2)$ et b) $F'(2)$.

36. On pose $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ et $C(x) = f(g(x))$ où f et g sont les fonctions dont vous voyez les graphiques ci-après. Calculez a) $P'(2)$, b) $Q'(2)$ et c) $C'(2)$.



37-44 ■ Exprimez $f'(x)$ en termes de $g'(x)$.

37. $f(x) = x^2g(x)$

38. $f(x) = g(x^2)$

39. $f(x) = [g(x)]^2$

40. $f(x) = g(g(x))$

41. $f(x) = g(e^x)$

42. $f(x) = e^{g(x)}$

43. $f(x) = \ln|g(x)|$

44. $f(x) = g(\ln x)$

45-46 ■ Exprimez $h'(x)$ en termes de $f'(x)$ et $g'(x)$.

45. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

46. $h(x) = f(g(\sin 4x))$

47. En quel point la courbe $y = [\ln(x+4)]^2$ admet-elle une tangente horizontale ?

48. a) Déterminez une équation de la tangente à la courbe $y = e^x$ qui soit parallèle à la droite $x - 4y = 1$.
    b) Déterminez une équation de la tangente à la courbe $y = e^x$ qui passe par l'origine.

49. En quels points de l'ellipse $x^2 + 2y^2 = 1$ la tangente a-t-elle une pente égale à 1 ?

50. a) Sur quel intervalle la fonction $f(x) = (\ln x)/x$ est-elle strictement croissante ?
    b) Sur quel intervalle f est-elle convexe ?

51. Une équation de mouvement de la forme $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ caractérise un objet animé d'un mouvement oscillant amorti. Cherchez l'expression de la vitesse et de l'accélération d'un tel mouvement.

52. Un objet se meut sur une droite verticale et sa position à chaque instant t est donnée par $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geqslant 0$.
    a) Donnez l'expression de la fonction vitesse et de la fonction accélération.
    b) Quand l'objet est-il porté vers le haut ? Vers le bas ?
    c) Quelle distance l'objet parcourt-il durant l'intervalle de temps $0 \leqslant t \leqslant 3$.

d) Dessinez les fonctions position, vitesse et accélération pour $0 \leqslant t \leqslant 3$.

e) À quel moment l'objet est-il en train d'accélérer ? De ralentir ?

53. La masse d'une tige est donnée par $x(1 + \sqrt{x})$ kg, où x est mesuré en mètres depuis une des extrémités de la tige. Quelle est la densité linéaire de la tige en $x = 4$ m ?

54. Le volume d'un cône circulaire droit est, en fonction du rayon r de la base et de la hauteur h, donné par la formule $V = \pi r^2 h/3$.

a) Déterminez le taux de variation du volume par rapport à la hauteur, si le rayon est constant.

b) Déterminez le taux de variation du volume par rapport au rayon de la base, si la hauteur est constante.

55. Pour produire x unités d'un bien, cela coûte, en euros,

$$C(x) = 920 + 2x - 0{,}02x^2 + 0{,}00007x^3.$$

a) Quelle est l'expression de la fonction coût marginal ?

b) Calculez $C'(100)$ et expliquez la signification de cette valeur.

c) Comparez $C'(100)$ avec le coût de fabrication de la 101^e^ unité.

d) En quelle valeur de x la fonction C a-t-elle un point d'inflexion ? Quelle est la signification de cette valeur de x ?

56. La fonction $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, où a, b et K sont des constantes positives et où, de plus, $b > a$, sert à modéliser la concentration en fonction du temps t d'un produit injecté dans le sang.

a) Montrez que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.

b) Calculez $C'(t)$, la vitesse à laquelle le produit est éliminé par le sang.

c) Quand ce taux devient-il nul ?

57. a) Cherchez l'expression de la linéarisation de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Déduisez-en l'approximation affine et utilisez-la pour calculer une valeur approchée de $\sqrt[3]{1{,}03}$.

b) Déterminez les valeurs de x pour lesquelles l'approximation linéaire de la partie a) fournit des valeurs précises à moins de 0,1 près.

58. Une fenêtre a la forme d'un carré surmonté d'un demi-cercle. Quand on mesure la base de la fenêtre, on trouve 60 cm au millimètre près. Utilisez les différentielles pour avoir une idée de l'erreur maximale que cette imprécision entraîne dans le calcul de la surface de la fenêtre.

59. Exprimez

$$\lim_{\theta\to\pi/3} \frac{\cos\theta - 0{,}5}{\theta - \pi/3}$$

comme une dérivée et ensuite, calculez sa valeur.

60. Calculez $f'(x)$ s'il est connu que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2.$$

61. Calculez

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

62. Démontrez que le segment que les axes de coordonnées délimitent sur n'importe quelle tangente à l'astroïde $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ a toujours la même longueur.

Avant de parcourir la solution de l'exemple suivant, cachez-la et essayez d'abord de résoudre le problème par vous-même. Il peut s'avérer utile de consulter les principes de la résolution de problèmes à la page 87.

Pleins feux sur la résolution de problèmes

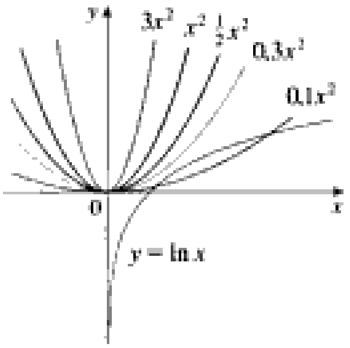


Figure 1

EXEMPLE 1 ■ Pour quelles valeurs de c l'équation $\ln x = cx^2$ a-t-elle exactement une solution ?

SOLUTION Un des plus importants principes de la résolution de problème est d'esquisser un diagramme, même si dans sa formulation l'énoncé ne comporte aucun élément de nature géométrique. En l'occurence, le problème peut être reformulé géométriquement comme suit : Pour quelle valeur de c, la courbe $y = \ln x$ rencontre-t-elle la courbe $y = cx^2$ en exactement un point ?

Commençons par dessiner $y = \ln x$ et $y = cx^2$ pour quelques valeurs de c. Nous savons que, pour $c \neq 0$, $y = cx^2$ est l'équation d'une parabole ouverte vers le haut si $c > 0$ et vers le bas si $c < 0$. La figure 1 montre des paraboles $y = cx^2$ pour plusieurs valeurs strictement positives de c. Certaines ne coupent pas du tout $y = \ln x$, une la coupe deux fois. Ce qui nous fait penser qu'il doit y avoir une valeur de c (quelque part entre 0,1 et 0,3) pour laquelle la courbe correspondante coupe exactement une fois. C'est la situation que montre la figure 2.

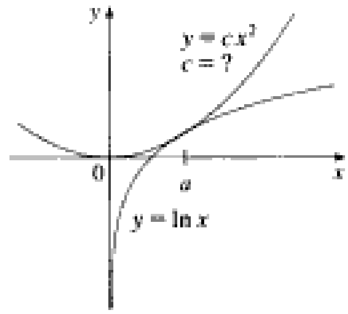


Figure 2

Afin de trouver cette valeur particulière de c, on décide d'appeler a l'abscisse de cet unique point d'intersection. Autrement dit, $\ln a = ca^2$ et a est l'unique solution de l'équation donnée. Nous observons à la figure 2 que les deux courbes se touchent tout juste de sorte que la tangente en ce point est commune. Les pentes des deux courbes $y = \ln x$ et $y = cx^2$ en $x = a$ doivent être égales :

$$\frac{1}{a} = 2ca.$$

Résolvons les équations $\ln a = ca^2$ et $1/a = 2ca$. Il vient

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}.$$

De là, $a = e^{1/2}$ et la valeur de c cherchée est

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}.$$

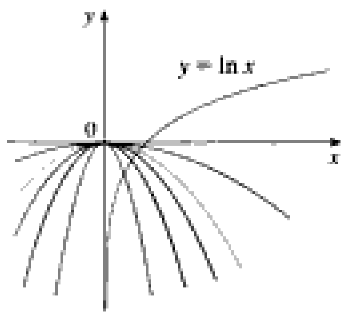


Figure 3

La figure 3 montre comment se présente la situation pour des valeurs négatives de c : toutes les paraboles $y = cx^2$ coupe $y = \ln x$ exactement une fois. N'oublions pas le cas $c = 0$: la courbe $y = 0x^2 = 0$ est l'axe Ox qui coupe exactement une fois $y = \ln x$.

En résumé, les valeurs de c demandées sont $c = 1/(2e)$ et $c \leqslant 0$.

Voici trois des applications de la dérivée envisagées dans ce chapitre. La formation et la localisation des arcs-en-ciel est expliquée dans le projet de la page 282. L'exercice 34 à la page 320 détermine l'angle sous lequel il convient de brancher deux vaisseaux sanguins pour réduire au maximum l'énergie dépensée par le cœur. Enfin, le projet de la page 321 étudie le coût de fabrication des boîtes à conserve dans le but de comprendre pourquoi les petites boîtes sont généralement hautes et étroites tandis que les grosses boîtes sont presque carrées.

Nous avons déjà abordé un certain nombre d'applications des dérivées, mais maintenant que nous disposons des règles de dérivation nous sommes en meilleure position pour approfondir ces applications. Nous allons montrer comment étudier le comportement de familles de fonctions, comment résoudre des problèmes de vitesses liées (comment calculer des vitesses non mesurables à partir de celles qui le sont), et comment déterminer les valeurs maximales et minimales d'une grandeur. En particulier, nous allons être à même de rechercher la forme optimale d'une boîte à conserve et d'expliquer la position des arcs-en-ciel.

4

Applications de la dérivée

4.1 Les vitesses liées

Lorsqu'on pompe de l'air dans un ballon, à la fois le volume et le rayon du ballon augmentent et les vitesses avec lesquelles ils croissent sont liées l'une à l'autre. Mais il est beaucoup plus facile de mesurer directement la vitesse de croissance du volume que celle du rayon.

De façon générale, dans un problème de vitesses liées, on s'attache à calculer la vitesse de variation d'une grandeur en fonction de celle de l'autre grandeur (supposée plus facile à mesurer). Pour cela, il faut d'abord établir une équation qui lie les deux grandeurs et ensuite dériver les deux membres par rapport au temps, grâce à la Règle de dérivation des fonctions composées.

EXEMPLE 1 ■ Un ballon sphérique est en train de gonfler et son volume s'accroît à raison de 100 cm^3/s. À quelle vitesse s'accroît le rayon au moment où le diamètre mesure 50 cm ?

Selon le principe de la résolution de problème vu à la page 87, la première étape consiste à comprendre le problème. Ceci inclut une lecture attentive de l'énoncé, une identification de ce qui est donné et de ce qui est inconnu et l'introduction d'une notation adaptée.

SOLUTION Nous commençons par identifier deux éléments :

l'*information donnée* :

la vitesse d'accroissement du volume est 100 cm^3/s

et *l'inconnue* :

la vitesse d'accroissement du rayon quand le diamètre mesure 50 cm

Afin d'exprimer cet énoncé mathématiquement, nous introduisons des *notations* suggestives :

V désigne le volume du ballon et r, son rayon

Il est important de se souvenir que des vitesses de variation sont des dérivées. Dans ce problème, tant le volume que le rayon varie avec le temps. La vitesse d'accroissement du volume par rapport au temps est la dérivée dV/dt et la vitesse d'accroissement du rayon, dr/dt. Les données et inconnues du problème peuvent maintenant être exprimées comme suit :

$$\text{Données :} \quad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3/\text{ s}$$

$$\text{Inconnues :} \quad \frac{dr}{dt} \text{ au moment où } r = 25 \text{ cm}$$

La deuxième étape de la résolution de problème est de penser à lier les données aux inconnues.

De façon à lier dV/dt et dr/dt, on écrit d'abord la relation qui lie V et r et qui n'est autre ici que la formule du volume d'une sphère:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

En vue de pouvoir introduire l'information connue, on dérive chaque membre de l'équation par rapport à t. La dérivation du membre de droite requiert la Règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Ensuite, on résout par rapport à la grandeur inconnue :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}.$$

Il ne reste plus alors qu'à calculer cette expression pour $r = 25$ et $dV/dt = 100$:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}.$$

Le rayon du ballon augmente à la vitesse de $1/(25\pi)$ cm/s.

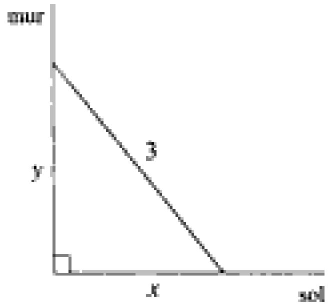


FIGURE 1

EXEMPLE 2 ■ Une échelle de 3 m de long est appuyée contre un mur. Si le pied de l'échelle glisse et s'écarte du mur à la vitesse de 30 cm/s, à quelle vitesse le haut de l'échelle glisse-t-il le long du mur au moment où le pied de l'échelle se trouve à 1,80 m du mur ?

SOLUTION On commence par faire un croquis de la situation et on y inscrit les notations choisies (voyez la figure 1). Le pied de l'échelle est à x m du mur et le haut, à y m du sol. Ces deux grandeurs sont fonctions du temps t.

On sait que $dx/dt = 0{,}3$ m/s et on désire calculer dy/dt au moment où $x = 1{,}8$ m (voyez la figure 2). La relation entre x et y est tout simplement donnée par le théorème de Pythagore :

$$x^2 + y^2 = 9.$$

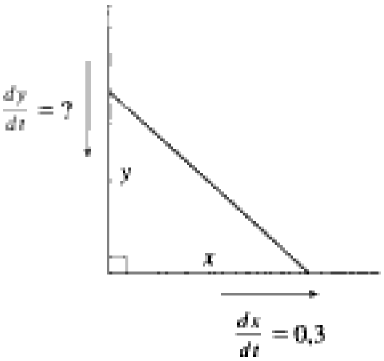


FIGURE 2

On dérive chaque membre par rapport à t, en faisant usage de la règle de dérivation des fonctions composées,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0,$$

et on résout cette équation par rapport à la grandeur recherchée,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}.$$

Quand $x = 1{,}8$, par le théorème de Pythagore, $y = 2{,}4$ et donc, en substituant ces valeurs et $dx/dt = 0{,}3$, on obtient

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1{,}8}{2{,}4}(0{,}3) = -0{,}225 \text{ m/s}.$$

EXEMPLE 3 ■ Un réservoir de forme conique est destiné à contenir de l'eau. Le disque supérieur mesure 2 m de rayon et la hauteur, 4 m. S'il est rempli avec une pompe qui débite 2 m^3/min, à quelle vitesse monte le niveau de l'eau au moment où ce niveau est de 3 m ?

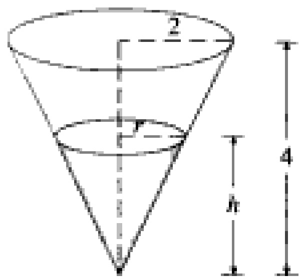


FIGURE 3

SOLUTION Nous esquissons d'abord le réservoir et indiquons les notations. C'est la figure 3. Le volume d'eau est désigné par V, le rayon de la surface par r et la hauteur en fonction du temps, mesuré en minutes, par $h(t)$.

Nous savons que $dV/dt = 2$ m^3/min et nous voulons connaître dh/dt quand $h = 3$ m. Les grandeurs V et h sont liées par la relation

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

dans laquelle intervient aussi r. Mais il est possible d'exprimer V en fonction de h seulement, puisque r et h sont liés par la relation issue de la similitude des triangles dans la figure 3

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4}, \qquad r = \frac{h}{2}.$$

L'expression de V devient

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3.$$

Nous pouvons maintenant dériver chaque membre par rapport à t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt},$$

et isoler la grandeur cherchée

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}.$$

Il reste à substituer $h = 3$ m et $dV/dt = 2$ m^3/min, ce qui donne

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi} \approx 0{,}28 \text{ m/min.}$$

Revenir sur ce qui a été fait : que pouvons-nous retirer des exemples 1-3 qui puisse être réinvesti dans des problèmes ultérieurs !

STRATÉGIE Elle est dictée par certains principes de la résolution de problèmes qui figurent à la page 87, adaptés aux problèmes de vitesses liées d'après l'expérience des exemples 1 à 3 :

1. Lire attentivement l'énoncé.
2. Faire un croquis si possible.
3. Choisir des notations. Attribuer des lettres à toutes les grandeurs qui dépendent du temps.
4. Exprimer l'information donnée et la vitesse cherchée en termes de dérivées.
5. Écrire une équation qui lie les différentes variables du problème. Si nécessaire, éliminez une de ces variables par substitution (comme à l'exemple 3) en exploitant une propriété géométrique.
6. Dériver chaque membre de l'équation par rapport à t en employant la Règle de dérivation des fonctions composées.
7. Introduire les données dans l'expression résultante et résoudre par rapport au taux inconnu.

Avertissement : Une erreur fréquente consiste à substituer trop tôt les valeurs numériques (des variables qui dépendent du temps). Cette substitution ne peut avoir lieu qu'après avoir effectué la dérivation (l'étape 7 après l'étape 6). Par exemple, à l'exemple 3, nous avons travaillé avec la variable h jusqu'à la dernière étape où nous l'avons finalement remplacée par sa valeur 3. (Si nous avions remplacé h par 3 plus tôt, nous aurions obtenu $dV/dt = 0$, ce qui est manifestement incorrect.)

Les exemples qui suivent sont là pour illustrer davantage la stratégie.

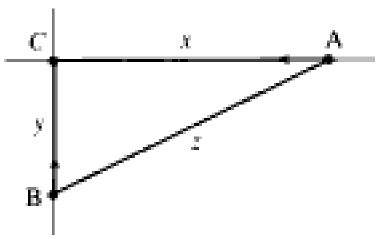


FIGURE 4

EXEMPLE 4 ■ Une voiture A se dirige vers l'ouest à la vitesse de 50 km/h et une voiture B va vers le nord à la vitesse de 60 km/h. Les deux voitures se dirigent vers le croisement des deux routes. À quelle vitesse se rapprochent-elles l'une de l'autre quand la voiture A est à 0,3 km et la voiture B à 0,4 km du croisement ?

SOLUTION On dessine la figure et on désigne par C le point où les deux routes se croisent. À un moment donné t, la voiture A est à la distance x de C, la voiture B à la distance y de C et la distance qui les sépare l'une de l'autre est notée z. Toutes ces distances sont mesurées en kilomètres.

On sait que $dx/dt = -50$ km/h et que $dy/dt = -60$ km/h. (Les dérivées sont négatives car les distances x et y sont en train de diminuer.) On voudrait connaître dz/dt. L'équation qui lie les trois variables x, y et z est celle du théorème de Pythagore

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

On dérive chaque membre, par rapport à t,

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

et on résout par rapport à dz/dt,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

Quand $x = 0{,}3$ km et $y = 0{,}4$ km, le théorème de Pythagore donne $z = 0{,}5$ km et de là,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0{,}5}[0{,}3(-50) + 0{,}4(-60)] = -78 \text{ km/h}.$$

Les voitures se rapprochent donc à la vitesse de 78 km/h.

EXEMPLE 5 ■ Un homme se promène sur un sentier rectiligne à la vitesse de 1 m/s. Un projecteur, posé sur le sol à 6 m du chemin, est pointé vers l'homme. À quelle vitesse le projecteur tourne-t-il au moment où l'homme est à 4,5 m du point du chemin le plus proche du projecteur ?

SOLUTION On fait un plan de la situation (figure 5) sur lequel x désigne la distance entre l'homme et le point du chemin le plus proche du projecteur et θ, l'angle entre le rayon du projecteur et la perpendiculaire au chemin.

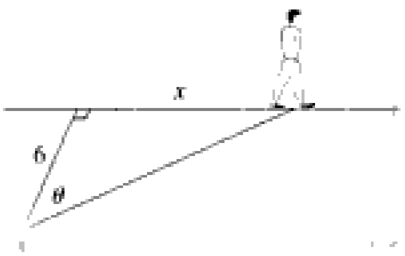


FIGURE 5

On sait que $dx/dt = 1$ et on demande $d\theta/dt$, quand $x = 4{,}5$. L'équation qui lie x et θ provient de la figure 5 :

$$\frac{x}{6} = \operatorname{tg}\theta \qquad x = 6 \operatorname{tg}\theta.$$

On dérive chaque membre par rapport à t,

$$\frac{dx}{dt} = 6\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt},$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}\cos^2\theta\frac{dx}{dt} = \frac{1}{6}\cos^2\theta(1) = \frac{1}{6}\cos^2\theta.$$

Quand $x = 4{,}5$, le rayon lumineux mesure 7,5 ; d'où $\cos\theta = \frac{4}{5}$ et

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{150} \approx 0{,}1.$$

Le projecteur tourne à la vitesse d'environ 0,1 rad/s.

4.1 Exercices

1. Si V désigne le volume d'un cube d'arête x, exprimez dV/dt en termes de dx/dt.
2. Si A désigne l'aire d'un cercle de rayon r, exprimez dA/dt en termes de dr/dt.

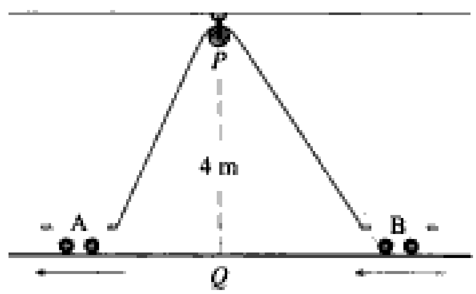
3-6 ■
- a) Quelles sont les données du problème ?
- b) Quelle est l'inconnue ?
- c) Faites un croquis de la situation à un moment t quelconque.
- d) Écrivez une équation qui lie les grandeurs impliquées.
- e) Achevez la résolution du problème.

3. La surface d'une boule de neige en train de fondre perd 1 cm^2/min. À quelle vitesse diminue le diamètre au moment où ce diamètre mesure 10 cm ?
4. À midi, un bateau A est à 150 km à l'ouest d'un bateau B. Le bateau A navigue vers l'est à la vitesse de 35 km/h tandis que le bateau B vogue vers le nord à la vitesse de 25 km/h. À quelle vitesse varie la distance entre les deux bateaux à 16 h ?
5. Un avion qui vole horizontalement à 8 km d'altitude, à une vitesse de 900 km/h, survole une station radar. À quelle vitesse s'éloigne-t-il de la station radar lorsqu'il s'en trouve distant de 10 km ?
6. Un réverbère mesure 4,5 m et un passant de 1,80 m s'en éloigne (en ligne droite) à la vitesse de 5 km/h. À quelle vitesse la pointe de son ombre se déplace-t-elle quand il est à 12 m du réverbère ?

7. Deux voitures quittent le même point au même moment. L'une se dirige vers le sud à 60 km/h et l'autre vers l'ouest à 25 km/h. À quelle vitesse s'éloignent-elles l'une de l'autre deux heures plus tard ?
8. Un projecteur, posé sur le sol, éclaire le mur d'un immeuble situé à 12 m. Si un homme de 2 m de haut marche depuis le projecteur jusqu'au mur à la vitesse de 1,6 m/s, à quelle vitesse son ombre s'abaisse-t-elle au moment où l'homme se trouve à 4 m de l'immeuble ?
9. À un moment donné, un homme franchit le point P à une vitesse de 1,2 m/s et se dirige vers le nord. Cinq minutes plus tard, une femme quitte un point situé à 150 m à l'est de P et progresse vers le sud à la vitesse de 1,5 m/s. À quelle vitesse ces deux personnes s'éloignent-elles l'une de l'autre 15 minutes après que la femme se soit mise en route ?
10. Au base-ball, l'angle de l'aire de jeu est occupé par un carré de 27,5 m, improprement appelé le « diamant ». Un batteur frappe la balle et court vers la première base à la vitesse de 7,5 m/s.
    - a) Au moment où il se trouve à mi-chemin de la première base, à quelle vitesse se rapproche-t-il de la deuxième base ?
    - b) Au même moment, à quelle vitesse s'éloigne-t-il de la troisième base ?

11. La hauteur d'un triangle s'allonge de 1cm/min tandis que l'aire augmente de 2 cm^2/min. À quelle vitesse varie la longueur de la base quand la hauteur mesure 10 cm et l'aire 100 cm^2 ?
12. On tire un bateau vers les docks avec une corde attachée à la proue et qui passe par une poulie, placée au bord des docks, 1 m plus haut que l'attache. Si la corde est tirée à la vitesse de 1 m/s, à quelle vitesse le bateau s'approche-t-il des docks lorsqu'il en est à 8 m ?

13. Deux chariots A et B sont reliés par une corde de 12 m de long qui passe par une poulie P. Le point Q, situé sur le sol, entre les chariots, est juste sous P à 4 m. On tire le chariot A de sorte qu'il s'écarte de Q à la vitesse de 1 m/s. À quelle vitesse le chariot B avance-t-il vers Q à l'instant où le chariot A est à 3 m de Q ?

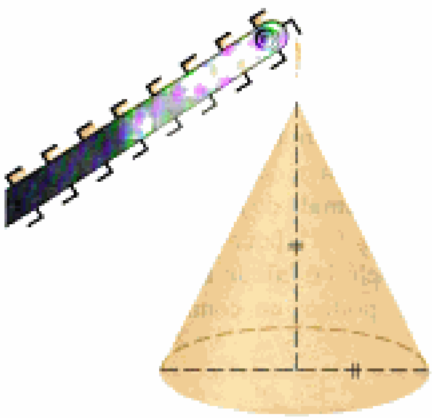


14. De l'eau s'échappe d'un réservoir en forme de cône renversé à raison de 10 000 cm^3/min en même temps qu'une pompe remplit ce réservoir à débit constant. La hauteur du réservoir mesure 6 m et le diamètre de sa face supérieure, 4 m. Déterminez le débit de la pompe sachant que le niveau de l'eau monte à la vitesse de 20 cm/min au moment où il atteint 2 m.
15. Un abreuvoir mesure 10 m de long et sa section transversale est un trapèze isocèle dont les bases, distantes de 50 cm, mesurent respectivement 30 cm et 80 cm. Une pompe remplit cet

abreuvoir à raison de $0{,}2\ m^3/min$. À quelle vitesse monte le niveau de l'eau au moment où la profondeur de l'eau est de 30 cm ?

16. Une piscine mesure 20 m de large, 40 m de long, 1 m de profondeur dans sa partie la moins profonde et 9 m dans sa partie la plus profonde. La figure montre une vue de profil. Cette piscine est remplie par une pompe dont le débit est de $0{,}05\ m^3/min$. À quelle vitesse monte le niveau de l'eau au moment où, à l'endroit le plus profond, la profondeur atteint 2 m ?

17. Du gravier est déversé d'un tapis roulant à raison de $1\ m^3/min$ et s'entasse en formant un cône dont le diamètre de base est toujours égal à la hauteur. À quelle vitesse croît la hauteur du tas au moment où il mesure 3 m de haut ?



18. Un cerf-volant, à une altitude de 30 m, file horizontalement à la vitesse de 2,5 m/s. L'angle que fait la corde avec l'horizontale diminue à mesure que la corde est débobinée. À quelle vitesse diminue cet angle lorsque 60 m de corde a été débobinée ?

19. Deux côtés d'un triangle mesurent respectivement 4 m et 5 m et l'angle qu'ils forment grandit à raison de 0,06 rad/s. À quelle vitesse augmente l'aire du triangle quand l'angle entre les deux côtés de longueur fixe mesure $\pi/3$?

20. Deux côtés d'un triangle mesurent respectivement 12 m et 15 m. L'angle entre eux grandit à la vitesse de $2°$/min. À quelle vitesse croît le troisième côté quand l'angle entre les deux côtés de longueur fixe mesure $60°$?

21. Selon la loi de Boyle, quand un échantillon de gaz est comprimé à température constante, la pression P et le volume V satisfont à l'équation $PV = C$ où C est une constante. On suppose qu'à un certain moment le volume est de $600\ cm^3$, la pression de 150 kPa et qu'elle croît de 20 kPa/min. À quelle vitesse le volume diminue-t-il à ce moment ?

22. Quand de l'air se dilate de façon adiabatique (sans ni gagner ni perdre de chaleur), sa pression P et son volume V sont liés par l'équation $PV^{1,4} = C$ où C est une constante. On suppose qu'à un certain moment le volume est de $400\ cm^3$, la pression de 80 kPa et qu'elle décroît de 10 kPa/min. À quelle vitesse le volume augmente-t-il à ce moment ?

23. Une caméra de télévision est postée à 1200 m d'une base de lancement de fusée. L'angle d'élévation de la caméra doit varier à une certaine vitesse de manière à garder la fusée dans son champ de vision. De plus, le mécanisme de mise au point de la caméra doit tenir compte du fait que la distance entre la caméra et la fusée en train de s'élever augmente. On suppose que la fusée s'élève verticalement et que sa vitesse est de 180 m/s quand elle a atteint l'altitude de 900 m.

a) À quelle vitesse la fusée s'éloigne-t-elle de la caméra à ce moment-là ?

b) Si la caméra reste tout le temps braquée sur la fusée, à quelle vitesse s'ouvre l'angle d'élévation de la caméra ?

24. Un phare, situé sur une petite île à 3 km du point le plus proche d'un littoral rectiligne, accomplit 4 révolutions par minute. À quelle vitesse le rayon lumineux balaie-t-il le littoral en un point situé à 1 km de P ?

25. Un avion vole à une vitesse constante de 300 km/h et passe à la verticale d'une station radar à 1 km d'altitude. Il se met à monter selon un angle de $30°$. À quelle vitesse augmente la distance entre l'avion et la station radar 1 min plus tard ?

26. Deux personnes se quittent à un moment donné. L'une marche vers l'est à la vitesse de 3 km/h et l'autre vers le nord-est à la vitesse de 2 km/h. À quelle vitesse ces deux personnes s'éloignent-elles l'une de l'autre après 15 minutes ?

27. Un coureur tourne autour d'une piste circulaire de 100 m de rayon à la vitesse constante de 7 m/s. Un de ses amis se tient à 200 m du centre de la piste. À quelle vitesse la distance entre les deux amis varie-t-elle au moment où elle est de 200 m ?

28. L'aiguille des minutes d'une montre mesure 8 mm de long et celle des heures, 4 mm. À quelle vitesse les extrémités des aiguilles varient-elles quand la montre indique 1 h ?

4.2 Les valeurs maximales et minimales

Les *problèmes d'optimisation* constituent l'une des plus importantes applications du calcul différentiel. On y demande de trouver la façon optimale (meilleure) de faire quelque chose. Voici des exemples de problèmes de ce genre qui seront résolus dans ce chapitre.

- Quelles dimensions faut-il donner à une boîte à conserve afin de minimiser son coût de fabrication?
- Quelle est l'accélération maximale que l'on puisse imprimer à une navette spatiale? (Cette question intéresse les astronautes qui doivent résister aux effets de l'accélération.)
- De quel rayon doit être l'ouverture de la trachée, pour que, contractée elle permette d'expulser l'air le plus rapidement lors d'un accès de toux?
- Sous quel angle faut-il raccorder des vaisseaux sanguins de manière à atténuer le plus possible l'effort à fournir par le coeur qui pompe le sang?

Tous ces problèmes peuvent être ramenés à trouver les valeurs maximales ou minimales d'une fonction. Explicitons d'abord avec précision ce que nous entendons par valeur maximale et minimale.

1 Définition Une fonction f atteint un **maximum absolu** (ou **maximum global**) en c lorsque $f(c) \geqslant f(x)$ pour tout x de son domaine de définition D. Le nombre $f(c)$ est appelé la **valeur maximale** de f sur D. De même, f atteint un **minimum absolu** en c lorsque $f(c) \leqslant f(x)$ pour tout x de son domaine de définition D. Le nombre $f(c)$ est appelé la **valeur minimale** de f sur D. Les valeurs minimale et maximale de f portent en commun le nom de **valeurs extrêmes** de f.

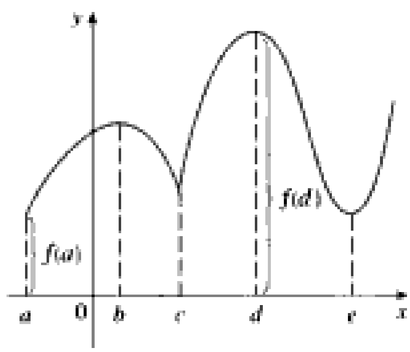


FIGURE 1
$f(a)$ est la valeur minimale
$f(d)$ est la valeur maximale

La figure 1 présente le graphique d'une fonction f qui a un maximum absolu en d et un minimum absolu en a. Remarquez que $(d, f(d))$ est le point le plus haut du graphique et $(a, f(a))$ le point le plus bas. Si, à la figure 1, on ne regarde que les valeurs de x située non loin de b, celles de l'intervalle $]a, c[$ par exemple, on constate que $f(b)$ dépasse $f(x)$ pour ces valeurs-là de x. C'est pourquoi on dit que $f(b)$ est un *maximum local* de f. De même, $f(c)$ est appelé un *minimum local* de f parce que $f(c) \leqslant f(x)$ pour x au voisinage de c, par exemple dans l'intervalle $]b, d[$. La fonction f présente en outre un minimum local en e. Voici la définition générale.

2 Définition Une fonction f présente un **maximum local** (ou **maximum relatif**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ pour x proche de c. [Ceci signifie que $f(c) \geqslant f(x)$ pour tout x appartenant à un certain intervalle ouvert contenant c]. De même, f présente un **minimum local** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ pour x proche de c.

EXEMPLE 1 ■ La fonction $f(x) = \cos x$ passe par sa valeur maximale 1 (locale et globale) une infinité de fois, puisque $\cos 2n\pi = 1$ quel que soit n entier et que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ quel que soit x. De même, $\cos(2n+1)\pi = -1$ est sa valeur minimale, quel que soit n entier.

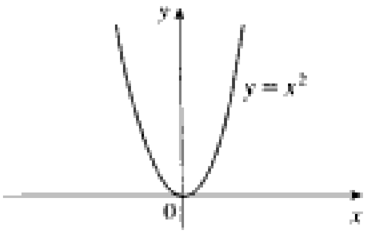


FIGURE 2
Minimum 0, pas de maximum

EXEMPLE 2 ■ Si $f(x) = x^2$, alors $f(x) \geqslant f(0)$ parce que $x^2 \geqslant 0$ quel que soit x. Par conséquent, $f(0) = 0$ est le minimum absolu (et local) de f. L'origine est en effet le point le plus bas de la parabole $y = x^2$ (voyez la figure 2).

Par contre, il n'y a pas de plus haut point sur cette parabole et donc la fonction n'a pas de maximum.

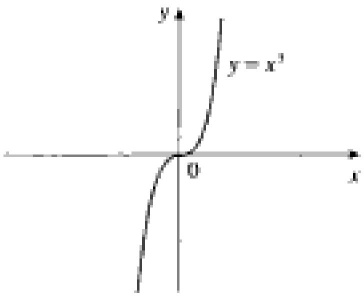


FIGURE 3
Ni minimum, ni maximum

EXEMPLE 3 ■ On constate sur le graphique, présenté à la figure 3, que la fonction $f(x) = x^3$ n'a ni maximum absolu, ni minimum absolu. Elle n'a même pas de valeurs extrêmes locales.

EXEMPLE 4 ■ La figure 4 présente le graphique de la fonction

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4.$$

On y voit que $f(1) = 5$ est un maximum local tandis que $f(-1) = 37$ est un maximum absolu. [Ce maximum absolu n'est pas un maximum local car il se produit en une extrémité]. Il y a également un minimum local $f(0) = 0$ et un minimum local et absolu $f(3) = -27$.

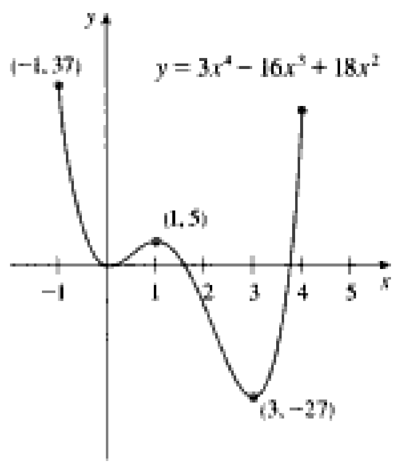


FIGURE 4

Nous avons observé que certaines fonctions ont des valeurs extrêmes alors que d'autres n'en ont pas. Le théorème que voici énonce des conditions sous lesquelles une fonction présente à coup sûr des valeurs extrêmes.

3 Le Théorème des Valeurs Extrêmes Si f est continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f atteint un maximum absolu $f(c)$ et un minimum absolu $f(d)$ aux points c et d de $[a, b]$.

Le Théorème des valeurs extrêmes est illustré dans la figure 5. Remarquez qu'une valeur extrême peut être atteinte plus d'une fois. Bien que ce théorème soit intuitivement facile à accepter, il est difficile à démontrer et donc, nous omettons sa preuve.

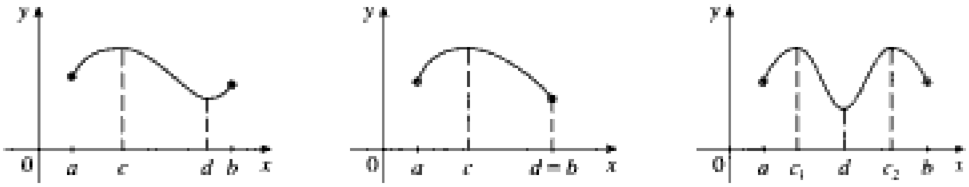


FIGURE 5

Le rôle des figures 6 et 7 est de souligner qu'une fonction ne possède pas nécessairement de valeurs extrêmes dès que l'une ou l'autre des hypothèses requises (continuité ou intervalle fermé) fait défaut.

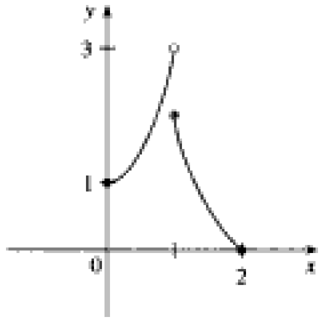


FIGURE 6
La fonction a un minimum $f(2) = 0$ mais pas de maximum.

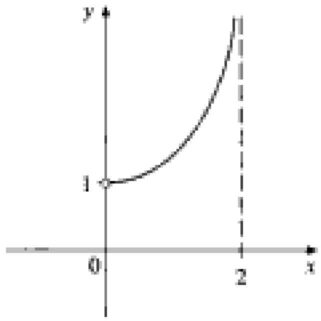


FIGURE 7
Cette fonction continue n'a pas de valeurs extrêmes.

La fonction f dont le graphique est présenté à la figure 6 est définie sur l'intervalle fermé $[0, 2]$ mais n'atteint pas de valeur maximale. (Remarquez que l'ensemble image de f est $[0, 3[$. La fonction atteint des valeurs aussi proches que l'on veut de 3, mais pas la valeur 3 elle-même.) Ceci ne contredit pas le Théorème des valeurs extrêmes parce que l'hypothèse f continue n'est pas remplie. [Néanmoins, il se *pourrait* qu'une fonction discontinue atteigne des valeurs extrêmes. Voyez l'exercice 13 (b)].

La fonction g dont le graphique est tracé à la figure 7 est continue sur l'intervalle ouvert $]0, 2[$, mais n'atteint ni maximum, ni minimum. [L'ensemble image de g est $]1, +\infty[$. La fonction peut prendre des valeurs arbitrairement grandes]. Ceci ne contredit pas le Théorème des valeurs extrêmes parce que l'hypothèse sur le caractère fermé de l'intervalle n'est pas remplie.

Si le Théorème des valeurs extrêmes affirme qu'une fonction continue sur un intervalle fermé atteint un maximum et un minimum, il ne dit pas comment les déterminer. Nous commençons par chercher des valeurs extrêmes locales.

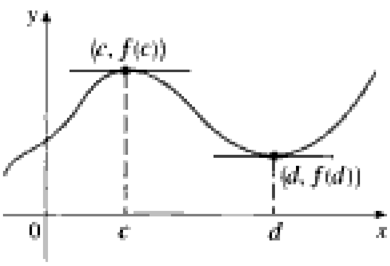


FIGURE 8

La figure 8 montre le graphique d'une fonction f qui passe par un maximum local en c et un minimum local en d. Il apparaît qu'aux points de maximum et de minimum, la tangente est horizontale, donc de pente égale à 0. Comme nous savons que la pente de la tangente est donnée par la dérivée, il s'ensuit que $f'(c) = 0$ et $f'(d) = 0$. Le théorème suivant établit que cette observation est vraie pour toute fonction dérivable.

4 Théorème de Fermat Si f admet un maximum ou un minimum local en c, et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c) = 0$.

Notre intuition nous fait voir le Théorème de Fermat comme évident. Une démonstration rigoureuse qui recourt à la définition de la dérivée en est présentée à l'annexe E.

Bien que le Théorème de Fermat soit d'une grande utilité, il faut faire attention de ne pas y lire plus qu'il ne contient. Prenons le cas de la fonction $f(x) = x^3$, dont la dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$. Cette fonction n'a ni maximum, ni minimum en 0, comme le confirme la figure 9. Le fait que $f'(0) = 0$ entraîne seulement que la tangente en $(0, 0)$ à la courbe $y = x^3$ est horizontale. Au lieu de passer par un maximum ou un minimum, la courbe traverse sa tangente en ce point.

Quand $f'(c) = 0$, f n'a pas nécessairement un maximum ou un minimum en c. (En d'autres mots, la réciproque du Théorème de Fermat n'est généralement pas vraie.)

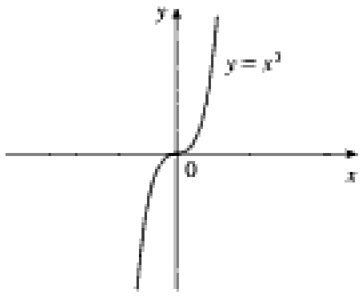


FIGURE 9
La dérivée de la fonction $f(x) = x^3$ est nulle en 0 mais f n'a ni maximum ni minimum.

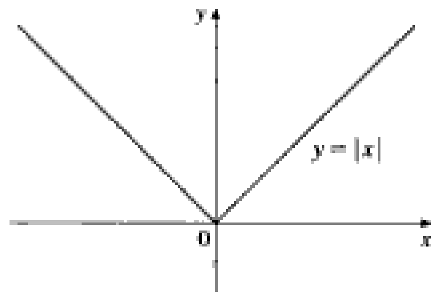


FIGURE 10
Si $f(x) = |x|$, alors $f(0) = 0$ est un minimum mais $f'(0)$ n'est pas défini.

Le Théorème de Fermat est ainsi qualifié à la suite de Pierre de Fermat (1601-1665), un juriste français qui se mit aux mathématiques par hobby. En dépit de son statut d'amateur, Fermat devint avec Descartes l'un des deux inventeurs de la géométrie analytique. Sa méthode pour déterminer des tangentes à une coubre et les valeurs extrêmes (avant l'invention des limites et des dérivées) fit de lui un précurseur de Newton dans la création du calcul différentiel.

Il ne faut pas perdre de vue qu'il peut y avoir une valeur extrême en laquelle $f'(c)$ n'existe pas. C'est le cas, par exemple, de la fonction $f(x) = |x|$ qui a un minimum (local et absolu) en 0 (voyez la figure 10) et cette valeur ne peut certainement pas être trouvée parmi les points en lesquels $f'(x) = 0$ puisque, ainsi que nous l'avons montré à l'exemple 5 de la section 2.8, $f'(0)$ n'existe pas.

Le Théorème de Fermat suggère quand même que, dans la recherche des valeurs extrêmes, nous commencions au moins par les nombres c tels que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas. Ces nombres ont reçu un nom spécial.

5 Définition Un **point critique** d'une fonction f est un point c du domaine de définition de f tel que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ n'existe pas.

La figure 11 expose le graphique de la fonction f de l'exemple 5. Elle conforte notre réponse puisqu'il y a une tangente horizontale en $x = 1{,}5$ et une tangente verticale en $x = 0$.

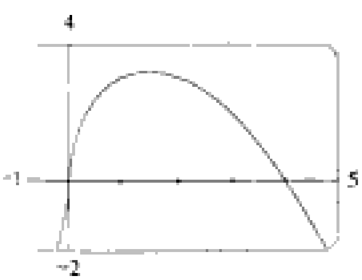


FIGURE 11

EXEMPLE 5 ■ Déterminez les points critiques de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUTION La Règle de dérivation du produit conduit à

$$f'(x) = \tfrac{3}{5}x^{-2/5}(4 - x) + x^{3/5}(-1)$$

$$= \frac{3(4 - x) - 5x}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}.$$

[On pouvait obtenir la même réponse en écrivant d'abord $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Par conséquent, $f'(x) = 0$ quand $12 - 8x = 0$, c'est-à-dire quand $x = \frac{3}{2}$ et $f'(x)$ n'existe pas quand $x = 0$. Les points critiques sont donc $\frac{3}{2}$ et 0.

En termes de points critiques, le Théorème de Fermat peut être reformulé comme suit (comparez la définition 5 et le théorème 4) :

6 Si f admet un maximum ou un minimum local en c, alors c est un point critique de f.

Comme la valeur extrême absolue d'une fonction continue sur un intervalle fermé est soit locale (auquel cas elle se produit en un point critique d'après 6), soit située en une extrémité de l'intervalle, la démarche en trois étapes que voici fonctionne toujours.

7 Méthode de l'intervalle fermé Pour déterminer les valeurs maximales et minimales *absolues* d'une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$:

1. Calculez les valeurs de f aux points critiques de f sur $]a, b[$.
2. Calculez les valeurs de f aux extrémités de l'intervalle.
3. La plus grande des valeurs sorties des étapes 1 et 2 est la valeur maximale absolue ; la plus petite de ces valeurs est la valeur minimale absolue.

Il est facile de localiser à peu près les valeurs extrêmes d'une fonction si l'on dispose d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur muni d'un logiciel graphique. Cependant, comme le montre l'exemple 6, le calcul différentiel, lui, conduit aux valeurs exactes.

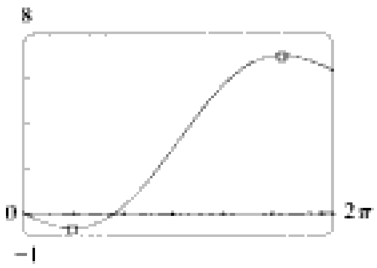


FIGURE 12

EXEMPLE 6 ■

a) À l'aide d'un outil graphique, estimez le minimum et le maximum absolu de la fonction $f(x) = x - 2\sin x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

b) Déterminez les valeurs exactes du maximum et du minimum par les techniques du calcul différentiel.

SOLUTION

a) La figure 12 montre le graphique de f affiché dans la fenêtre $[0, 2\pi]$ sur $[-1, 8]$. En sélectionnant le curseur et en le faisant circuler sur la courbe dans le voisinage du maximum, on voit que les ordonnées ne varient guère. Ce maximum vaut environ 6,97 et se produit aux alentours de $x = 5{,}2$. De même, en faisant circuler le curseur à proximité du minimum, on constate que ce minimum vaut à peu près $-0{,}68$ et se produit près de $x = 1$. On pourrait améliorer la qualité des approximations en regardant ces points de plus près, mais on préfère se tourner vers le calcul différentiel.

b) La fonction $f(x) = x - 2\sin x$ est continue sur $[0, 2\pi]$. Comme $f'(x) = 1 - 2\cos x$, la dérivée s'annule quand $\cos x = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $x = \pi/3$ ou $5\pi/3$. Les valeurs de f en ces points critiques sont

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0{,}684853$$

et

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6{,}968039.$$

Les valeurs de f aux extrémités de l'intervalle sont

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6{,}28.$$

La comparaison de ces quatre nombres mène à la conclusion que $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ est le minimum absolu et que $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$ est le maximum absolu. Les valeurs de la partie a) permettent de vérifier les déductions de la partie b).

La figure 13 montre le graphique de la fonction I index des prix des produits alimentaires de l'exemple 7. Ce modèle est construit sur les données représentées par les points.

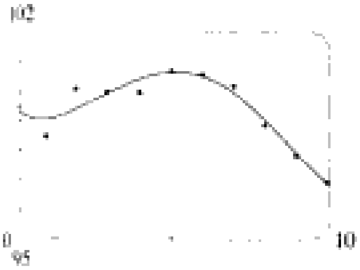


FIGURE 13

EXEMPLE 7 ■ Un modèle de l'index des prix des produits alimentaires (le prix d'un panier représentatif de tous les produits alimentaires) observé entre 1984 et 1994 est donné par la fonction

$$I(t) = 0{,}00009045t^5 + 0{,}001438t^4 - 0{,}06561t^3 + 0{,}4598t^2 - 0{,}6270t + 99{,}33$$

où t est mesuré en années depuis le milieu de l'année 1984, de sorte que $0 \leqslant t \leqslant 10$, et où $I(t)$ est exprimé en valeur de 1987 et étalonné de façon à ce que $I(3) = 100$. À quel moment, entre 1984 et 1994, pouvez-vous dire que les produits alimentaires étaient meilleur marché ou au contraire plus chers.

SOLUTION Nous appliquons la Méthode de l'intervalle fermé à la fonction continue I sur $[0, 10]$. Sa dérivée est

$$I'(t) = 0{,}00045225t^4 + 0{,}005752t^3 - 0{,}19683t^2 + 0{,}9196t - 0{,}6270$$

Comme I' est définie quel que soit t, les seuls points critiques de I sont les racines de $I'(t)$. Nous utilisons la commande de recherche de racines d'un logiciel de calcul formel (ou un outil graphique) pour obtenir que $I'(t) = 0$ en $t \approx -29{,}7186$, $0{,}8231$, $5{,}1309$ ou $11{,}0459$. Seules les deuxième et troisième racines appartiennent à l'intervalle $[0, 10]$. La valeur de I en ces points critiques est

$$I(0{,}8231) \approx 99{,}09 \qquad \text{et} \qquad I(5{,}1309) \approx 100{,}67.$$

Aux extrémités de l'intervalle, I vaut

$$I(0) = 99{,}33 \qquad I(10) \approx 96{,}86.$$

En comparant ces quatre nombres, nous voyons que les produits alimentaires étaient plus chers en $t \approx 5{,}1309$ (qui correspond plus ou moins au mois d'août 1989) et meilleur marché en $t = 10$ (le milieu de l'année 1994).

4.2 Exercices

1. Expliquez la différence entre un minimum absolu et un minimum local.

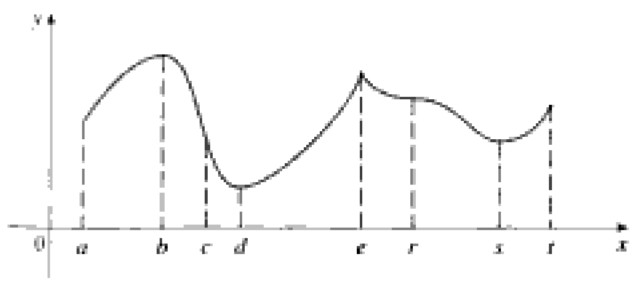
2. On suppose que f est une fonction continue définie sur un intervalle fermé $[a, b]$.

   a) Quel théorème garantit l'existence d'un maximum absolu et d'un minimum absolu pour f ?

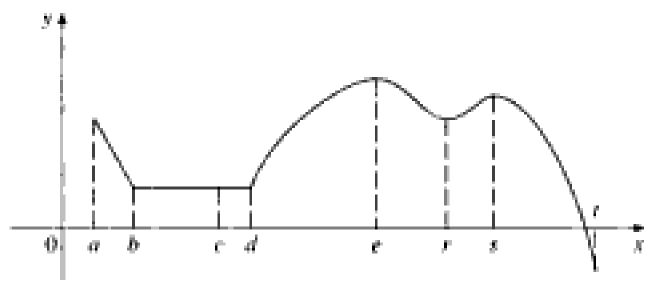
   b) Quelles étapes allez-vous suivre pour déterminer ces valeurs maximale et minimale ?

3-4 ■ Pour chacun des nombres a, b, c, d, e, r, s et t, dites si la fonction dont le graphique est donné passe par un maximum ou minimum absolu, un maximum ou un minimum local ou ni un maximum, ni un minimum.

3.

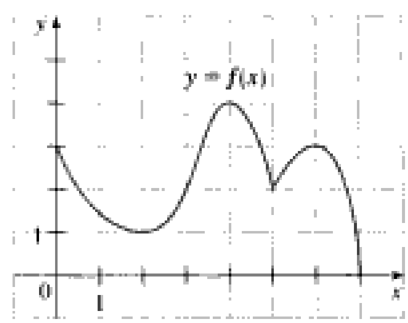


4.

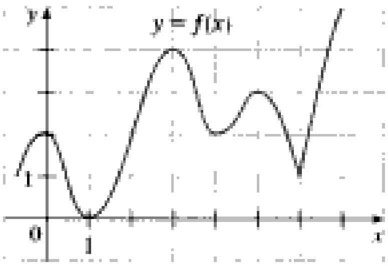


5-6 ■ Au vu du graphique, identifiez les valeurs extrêmes absolues et locales de la fonction.

5.



6.



7-10 ■ Esquissez le graphique d'une fonction continue sur [0, 3] qui jouit des propriétés énoncées.

7. Maximum absolu en 0, minimum absolu en 3, minimum local en 1, maximum local en 2.

8. Maximum absolu en 1, minimum absolu en 2.

9. 2 est un point critique, mais f n'a ni maximum local, ni minimum local.

10. Minimum absolu en 0, maximum absolu en 2, maximum local en 1 et 2, minimum local en 1,5.

11. a) Dessinez le graphique d'une fonction qui a un maximum local en 2 et qui est dérivable en 2.
 b) Dessinez le graphique d'une fonction qui a un maximum local en 2 et qui est continue mais non dérivable en 2.
 c) Dessinez le graphique d'une fonction qui a un maximum local en 2 et qui n'est pas continue en 2.

12. a) Dessinez le graphique d'une fonction sur $[-1, 2]$ qui a un maximum absolu mais pas de maximum local.
 b) Dessinez le graphique d'une fonction sur $[-1, 2]$ qui a un maximum local mais pas de maximum absolu.

13. a) Dessinez le graphique d'une fonction sur $[-1, 2]$ qui a un maximum absolu mais pas de minimum absolu.
 b) Dessinez le graphique d'une fonction non continue sur $[-1, 2]$ mais qui a un maximum absolu et un minimum absolu.

14. a) Dessinez le graphique d'une fonction qui a deux maxima locaux, un minimum local mais pas de minimum absolu.
 b) Dessinez le graphique d'une fonction qui a trois minima locaux, deux maxima locaux et sept points critiques.

15-24 ■ Localisez les valeurs maximales et minimales absolues et locales de f. Commencez par esquissez le graphique à la main. (Utilisez les graphiques et les transformations de la section 1.2).

15. $f(x) = 1 + 2x, \quad x \geq -1$

16. $f(x) = 1 - x^2, \quad 0 < x \leq 1$

17. $f(x) = 1 - x^2, \quad -2 \leq x \leq 1$

18. $f(t) = 1/t, \quad 0 < t < 1$

19. $f(\theta) = \sin\theta, \quad -2\pi \leq \theta \leq 2\pi$

20. $f(\theta) = \operatorname{tg}\theta, \quad -\pi/4 \leq \theta < \pi/2$

21. $f(x) = x^5$

22. $f(x) = 2 - x^4$

23. $f(x) = 1 - e^{-x}, \quad x \geq 0$

24. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

25-36 ■ Déterminez les points critiques de la fonction.

25. $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 3$

26. $f(t) = t^3 + 6t^2 + 3t - 1$

27. $s(t) = t^4 + 4t^3 + 2t^2$

28. $g(x) = |x + 1|$

29. $f(r) = \dfrac{r}{r^2 + 1}$

30. $f(z) = \dfrac{z + 1}{z^2 + z + 1}$

31. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

32. $G(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

33. $f(\theta) = \sin^2(2\theta)$

34. $g(\theta) = \theta + \sin\theta$

35. $f(x) = x \ln x$

36. $f(x) = xe^{2x}$

37-46 ■ Déterminez les maxima et minima absolus de f sur l'intervalle donné.

37. $f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad [0, 3]$

38. $f(x) = x^3 - 12x + 1, \quad [-3, 5]$

39. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1, \quad [-2, 2]$

40. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad [-1, 2]$

41. $f(x) = x^2 + 2/x, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

42. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad [1, 2]$

43. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad [0, \pi/3]$

44. $f(x) = x - 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$

45. $f(x) = xe^{-x}, \quad [0, 2]$

46. $f(x) = (\ln x)/x, \quad [1, 3]$

47-50 ■
 a) À partir du graphique, estimez avec une précision de deux décimales les valeurs extrêmes de la fonction.
 b) À l'aide du calcul différentiel calculez les valeurs exactes des valeurs extrêmes.

47. $f(x) = x^3 - 8x + 1, \quad -3 \leq x \leq 3$

48. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leq x \leq 0$

49. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

50. $f(x) = (\cos x)/(2 + \sin x), \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

51. On peut dire que le volume V (en centimètres cubes) d'un kilo d'eau à une température T comprise entre 0 °C et 30 °C est approximativement donné par la formule

$$V = 999{,}87 - 0{,}064266T + 0{,}0085043T^2 - 0{,}0000679T^3.$$

Déterminez la température à laquelle l'eau a sa densité la plus grande.

52. On tire un objet de poids P sur un plan horizontal à l'aide d'une corde à laquelle est appliquée une force. Si θ désigne l'angle que fait la corde avec le plan, alors l'intensité de la force est donnée par

$$F = \frac{\mu P}{\mu \sin\theta + \cos\theta},$$

où μ est une constante positive appelée *coefficient de friction* et où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Démontrez que F est minimale lorsque $\operatorname{tg}\theta = \mu$.

53. La navette spatiale *Discovery* a installé le télescope Hubble le 24 avril 1990. Pendant cette mission, la navette était animée d'une vitesse $v(t)$ qui, entre le moment du décollage $t = 0$ s et celui du largage des fusées de mise à feu $t = 126$ s, suivait le modèle

$$v(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23{,}61t - 3{,}083$$

(en pieds par seconde). Estimez les valeurs maximale et minimale absolues de l'*accélération* de la navette entre le décollage et le largage des fusées.

54. En mai 1992 la navette spatiale *Endeavour* a décollé dans le cadre de la mission STS-49 dans le but d'installer un nouveau moteur au satellite de télécommunication Intelsat. Voici dans la table quelques valeurs de la vitesse de la navette entre son décollage et le largage de ses fusées de mise à feu.

Étapes	Temps (s)	Vitesse (pieds/s)
Décollage	0	0
Début de la manœuvre de pivotement	10	185
Fin de la manœuvre de pivotement	15	319
Manette des gaz à 89 %	20	447
Manette des gaz à 67 %	32	742
Manette des gaz à 104 %	59	1325
Pression dynamique maximum	62	1445
Séparation des fusées de mise à feu	125	4151

a) À l'aide des méthodes de la section 1.7, cherchez le polynôme du troisième degré qui modélise le mieux la vitesse de la navette sur l'intervalle de temps $[0, 125]$. Tracez le graphique de ce polynôme.

b) Déterminez un modèle pour l'accélération de la navette et utilisez-le pour estimer les valeurs maximale et minimale de l'accélération durant les 125 premières secondes.

55. Lorsqu'une personne, à cause d'un corps étranger logé dans sa trachée, se met à tousser, son diaphragme exerce une poussée violente vers le haut causant ainsi une augmentation de pression dans les poumons. Ceci s'accompagne d'une contraction de la trachée, rétrécissant le conduit qui sert à expulser l'air. Pour qu'une même quantité d'air transite dans un temps donné par un conduit plus étroit, il faut qu'elle circule plus vite. Plus la vitesse du souffle d'air est grande, plus grande aussi est la force imprimée à l'objet étranger. Grâce aux rayons X on peut voir que, pendant la toux, le conduit circulaire formé par la trachée perd 2/3 de son rayon normal. Selon un modèle mathématique de la toux, la vitesse v du flux d'air est liée au rayon r de la trachée par l'équation

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \frac{1}{2}r_0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

où k est une constante et r_0 le rayon normal de la trachée. La restriction sur r provient du fait que, sous l'effet de la pression, la paroi de la trachée se raidit et empêche une contraction supérieure à $r_0/2$ (qui ferait s'étouffer la personne).

a) Déterminez la valeur de r dans l'intervalle $[r_0/2, r_0]$ qui rende la vitesse v maximale. Qu'en est-il par rapport à l'observation expérimentale ?

b) Quelle est la valeur maximale absolue de v sur l'intervalle ?

c) Dessinez le graphique de v sur l'intervalle $[0, r_0]$.

56. Une fonction cubique est un polynôme du troisième degré. Elle est de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où $a \neq 0$.

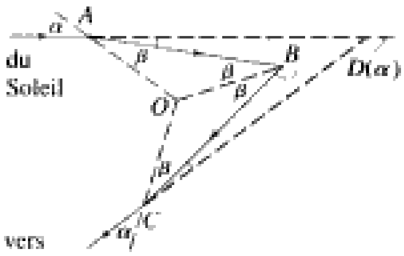
a) Démontrez qu'une fonction cubique peut avoir deux, un ou aucun point(s) critique(s). Donnez des exemples et des graphiques qui illustrent ces trois cas possibles.

b) Combien de valeurs extrêmes locales peut présenter une fonction cubique ?

Projet appliqué

Le calcul différentiel appliqué aux arcs-en-ciel

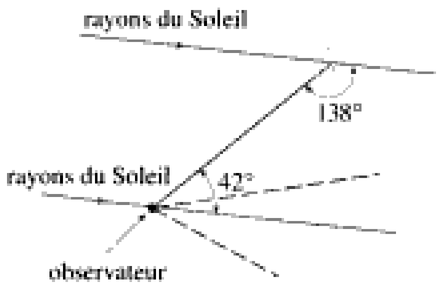
Les arcs-en-ciel se créent suite à la diffraction de la lumière à travers les gouttes d'eau. Depuis toujours ceux-ci ont fasciné les générations et, déjà au temps d'Aristote, on trouve des essais d'explication scientifique. Dans cette étude, nous exploitons les idées de Descartes et de Newton pour justifier la formation, la localisation et les couleurs des arcs-en-ciel.



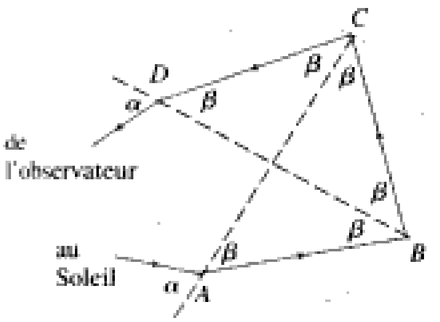
Formation de l'arc-en-ciel primaire

1. La figure montre un rayon de soleil qui pénètre dans une goutte d'eau sphérique en A. Une partie de ce rayon lumineux est réfléchie tandis qu'une autre partie entre dans la goutte en suivant le chemin AB. Vous remarquez que le rayon lumineux, à cause de la réfraction, a été dévié en s'approchant de la normale AO à la surface de la goutte et, d'après les lois de Snell van Royen (dit Snellius), $\sin \alpha = k \sin \beta$, où α est l'angle d'incidence, β l'angle de réfraction et $k \approx \frac{4}{3}$ l'indice de réfraction de l'eau. Arrivé en B, une partie du rayon lumineux sort de la goutte et se réfracte à nouveau au passage dans l'air tandis qu'une autre partie est réfléchie selon la direction BC. (L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion). Quand le rayon atteint C, une partie est réfléchie, mais la partie qui nous intéresse davantage à ce moment est celle qui quitte la goutte en C. (Remarquez qu'elle se réfracte en s'écartant de la direction normale). La *déviation* $D(\alpha)$ est l'amplitude, mesurée dans le sens des aiguilles d'une montre, de la rotation finale subie par le rayon entrant au cours de sa traversée de la goutte, marquée de trois étapes. Voici l'expression de cette déviation en fonction de l'angle d'incidence α :
$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta.$$
Montrez que la déviation minimale est $D(\alpha) \approx 138^\circ$ et se produit quand $\alpha \approx 59{,}4^\circ$.

   Que la déviation soit minimale quand $\alpha \approx 59{,}4^\circ$ signifie que $D'(\alpha) \approx 0$ et donc que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Par conséquent, beaucoup de rayons qui entrent sous l'angle $\alpha \approx 59{,}4^\circ$ sont déviés approximativement de la même façon. C'est la *concentration* des rayons issus de cette direction de déviation minimale qui crée l'éclat de l'arc-en-ciel primaire. La figure montre que pour l'observateur l'angle d'élévation jusqu'au point le plus haut de l'arc-en-ciel mesure $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$. (Cet angle s'appelle l'*angle de l'arc-en-ciel*).



2. La question 1 traitait de la localisation de l'arc-en-ciel primaire mais comment expliquer ses couleurs? La lumière du soleil comporte une étendue de longueur d'ondes, depuis le rouge jusqu'à l'orange, le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet. Ainsi que Newton en fit l'expérience à partir d'un prisme en 1666, l'indice de réfraction est différent pour chaque couleur. (Ce phénomène s'appelle la *dispersion*.) L'indice de réfraction vaut $k \approx 1{,}3318$ pour le rouge alors qu'il vaut $k \approx 1{,}3435$ pour le violet. En recommençant les calculs de la



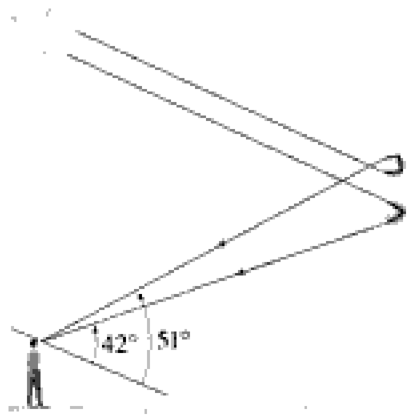
Formation de l'arc-en-ciel secondaire

question 1 pour ces valeurs de k, montrez que l'angle de l'arc-en-ciel mesure environ 42,3° pour l'arc rouge et 40,6° pour l'arc violet. L'arc-en-ciel se compose en fait de sept arcs distincts correspondant aux sept couleurs.

3. Peut-être vous est-il arrivé d'observer un arc-en-ciel secondaire plus pâle au-dessus du premier. Il provient de la partie des rayons qui, en pénétrant dans la goutte d'eau, subit une réfraction en A, puis une double réflexion (en B et en C) et enfin une réfraction à sa sortie de la goutte en D (voyez la figure). Cette fois, la déviation $D(\alpha)$ est le total des rotations, mesurées dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, que le rayon subit en quatre étapes successives. Montrez que

$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi,$$

et que $D(\alpha)$ atteint sa valeur minimale quand $\cos\alpha = \sqrt{\frac{k^2-1}{8}}$. Posant $k = \frac{4}{3}$, montrez que la déviation minimale est d'environ 129° et donc que l'angle de l'arc-en-ciel secondaire est d'environ 51°, ainsi que le montre la figure.



4. Démontrez que les couleurs de l'arc-en-ciel secondaire sont inversées par rapport à celles de l'arc-en-ciel primaire.

4.3 Les dérivées et les formes des courbes

Nous avons étudié dans la section 2.10 comment les signes des dérivées premières et secondes $f'(x)$ et $f''(x)$ sont liés à l'allure du graphique de f. Nous revenons ici sur ces liens pour tenter de les justifier et aussi pour découvrir, en les utilisant, conjointement aux formules de dérivation du chapitre 3, les formes que prennent certains graphiques.

Nous commençons par un résultat, connu sous le nom de Théorème des accroissements finis, qui sera utile non seulement pour le sujet qui nous occupe, mais aussi pour expliquer les raisons d'autres résultats fondamentaux du calcul différentiel et intégral.

Théorème des accroissements finis Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe un nombre c entre a et b tel que

1 $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ou, de façon équivalente,

2 $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

L'interprétation géométrique de cet énoncé le rend immédiatement acceptable. Les figures 1 et 2 mettent en évidence les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ sur les courbes représentatives de deux fonctions dérivables.

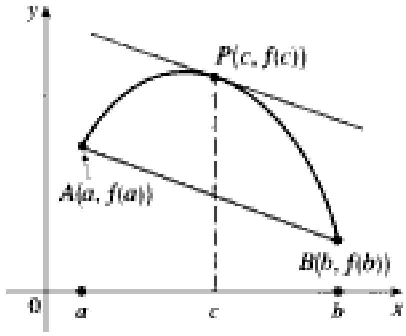


FIGURE 1

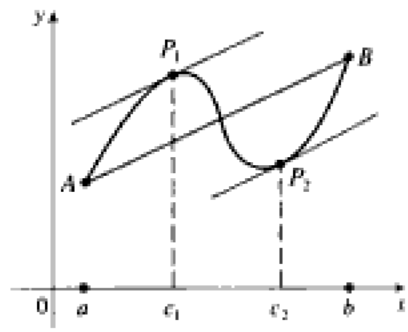


FIGURE 2

La pente de la sécante AB est égale à

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ce qui est la même expression que celle du membre de droite de l'équation 1. Comme $f'(c)$ est égal à la pente de la tangente à la courbe au point $(c, f(c))$, le Théorème des accroissements finis dans la forme 1 affirme qu'il existe au moins un point $P(c, f(c))$ sur la courbe en lequel la tangente présente la même pente que celle de la sécante AB. Un tel point P apparaît clairement dans la figure 1 et deux tels points P_1 et P_2 dans la figure 2. Puisqu'intuitivement nous n'avons guère de doute sur la validité du Théorème des accroissements finis, nous le prenons comme point de départ du développement des principaux résultats du calcul différentiel et intégral. (Quand le calcul différentiel et intégral est exposé de façon déductive, ce théorème fait alors l'objet d'une démonstration à partir des axiomes qui définissent l'ensemble des nombres réels.)

Le Théorème des accroissements finis a été énoncé pour la première fois par Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), né en Italie, d'un père français et d'une mère italienne. Il fut un enfant prodige et devint professeur à Turin à l'âge de 19 ans déjà. On doit à Lagrange une énorme contribution à la théorie des nombres, à la théorie des fonctions, à la théorie des équations ainsi qu'à la mécanique analytique et céleste. Il appliqua en particulier le calcul différentiel et intégral pour étudier la stabilité du système solaire. Sur demande de Frédéric le Grand, il succéda à Euler à l'académie de Berlin et quand Frédéric le Grand mourut, Lagrange accepta l'invitation de Louis XVI à revenir à Paris occuper un des appartements du Louvre. C'était un homme gentil et tranquille qui ne vécut que pour la science.

EXEMPLE 1 ■ Quand un objet se déplace en ligne droite et que sa position à tout instant t est donnée par $s = f(t)$, alors sa vitesse moyenne entre $t = a$ et $t = b$ est égale à

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et sa vitesse en $t = c$ à $f'(c)$. Le Théorème des accroissements finis affirme donc qu'à un certain moment $t = c$ entre a et b la vitesse instantanée $f'(c)$ est égale à la vitesse moyenne. Si une voiture parcourt par exemple 180 km en deux heures, alors son tachymètre indique au moins une fois à un moment donné 90 km/h. □

Ce que le Théorème des accroissements finis nous apprend d'essentiel est qu'il y a moyen de savoir quelque chose de la fonction à partir de sa dérivée. Cette constatation est immédiatement exploitée dans la démonstration des principaux résultats relatifs aux fonctions croissantes et décroissantes (d'autres applications sont énoncées aux exercices 43 et 44).

■ Fonctions croissantes et décroissantes

Après avoir défini, dans la section 1.1, le caractère croissant ou décroissant d'une fonction et après avoir observé graphiquement, dans la section 2.10, qu'une fonction dont la dérivée était strictement positive était strictement croissante, nous le démontrons comme conséquence du Théorème des accroissements finis.

Nous appellerons ce test plus brièvement le Test C/D.

Test de croissance/décroissance

a) Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est strictement croissante sur cet intervalle.

b) Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est strictement décroissante sur cet intervalle.

Démonstration

a) Soit x_1 et x_2 deux nombres de l'intervalle tels que $x_1 < x_2$. Comme $f'(x) > 0$ par hypothèse, on sait que f est dérivable sur $[x_1, x_2]$. Le Théorème des accroissements finis s'applique donc: il existe un nombre c entre x_1 et x_2 tel que

3 $$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Or, $f'(c) > 0$ par hypothèse et $x_2 - x_1 > 0$ puisque $x_1 < x_2$. Dès lors, le membre de droite de l'équation est strictement positif et donc

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{ou} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ce qui prouve que f est strictement croissante.

b) Cette partie se démontre de façon analogue. ■

EXEMPLE 2 ■ Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

SOLUTION

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1).$$

Pour appliquer le test C/D, il faut connaître les valeurs de x pour lesquelles $f'(x)$ est soit strictement positive, soit strictement négative. Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de ses trois facteurs, $12x$, $x - 2$ et $x + 1$. On subdivise la droite réelle en intervalles dont les bornes sont les points critiques -1, 0 et 2 et on dispose l'étude sous forme d'un tableau dans lequel un signe $+$ indique que l'expression est strictement positive et un signe $-$ qu'elle est strictement négative. La dernière colonne présente la conclusion issue du test C/D. Par exemple, comme $f'(x) < 0$ pour $0 < x < 2$, f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 2[$ (il serait aussi vrai de dire que f est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $[0, 2]$).

Intervalle	$12x$	$x - 2$	$x + 1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	décroissante sur $]-\infty, -1[$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	croissante sur $]-1, 0[$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	décroissante sur $]0, 2[$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	croissante sur $]2, \infty[$

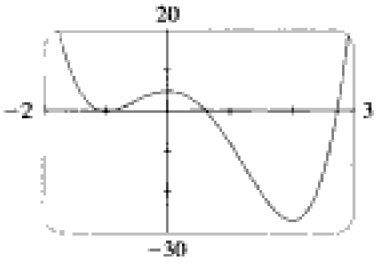
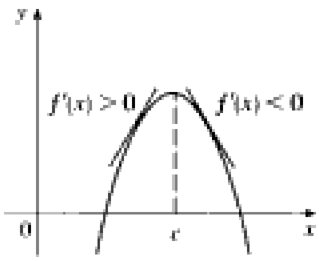
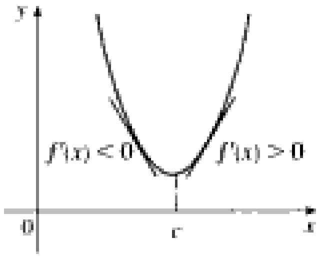


FIGURE 3

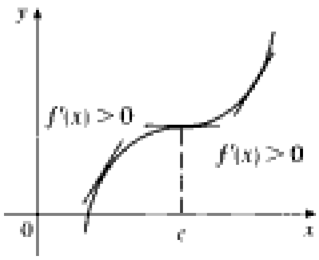
Le graphique de la figure 3 vient confirmer les conclusions du tableau.



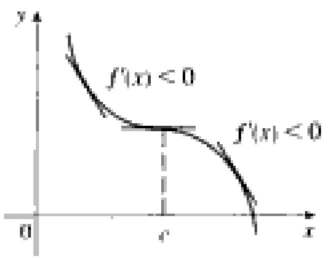
(a) maximum local



(b) minimum local



(c) ni maximum, ni minimum



(d) ni maximum, ni minimum

FIGURE 4

On se souvient (section 4.2) que si f présente un maximum ou un minimum local en c, alors, d'après le théorème de Fermat, c est nécessairement un point critique de f mais aussi que tout point critique ne donne pas lieu à un maximum ou à un minimum local. On a donc besoin d'un test qui dise si oui ou non f passe par un maximum ou un minimum local en un point critique.

On peut observer dans la figure 3 que $f(0) = 5$ est un maximum local de f parce que f croît sur $]-1, 0[$ et décroît sur $]0, 2[$ ou, en termes de dérivées, parce que $f'(x) > 0$ pour $-1 < x < 0$ et $f'(x) < 0$ pour $0 < x < 2$. Autrement dit, le signe de $f'(x)$ passe du positif au négatif en 0. Cette observation est à la base du test que voici.

Test de la dérivée première On suppose que c est un point critique de la fonction continue f.

a) Si f' passe du positif au négatif en c, alors f présente un maximum local en c.

b) Si f' passe du négatif au positif en c, alors f présente un minimum local en c.

c) Si f' ne change pas de signe en c (c'est-à-dire, si f' est positive de part et d'autre de c ou négative de part et d'autre de c), alors f n'a ni maximum ni minimum local en c.

Le Test de la dérivée première est une conséquence du Test de C/D. En ce qui concerne la partie a) par exemple, comme le signe de $f'(x)$ passe du positif au négatif en c, f est strictement croissante à gauche de c et strictement décroissante à droite de c. Il s'ensuit que f présente un maximum local en c.

Les différentes images de la figure 4 permettent de se remémorer aisément le Test de la dérivée première.

EXEMPLE 3 ■ Localisez les extrema de la fonction f de l'exemple 2.

SOLUTION D'après le tableau de signes qui figure dans la solution de l'exemple 2, le signe de $f'(x)$ passe du négatif au positif en -1, de sorte que, si l'on suit le Test de la dérivée première, $f(-1) = 0$ est un minimum local. De même, le signe de f' change du négatif au positif en 2, de sorte que $f(2) = -27$ est également un minimum local. Comme déjà mentionné précédemment, $f(0) = 5$ est un maximum puisque $f'(x)$ passe du positif au négatif en 0. ■

■ Concavité

Rappelons la définition de la concavité telle qu'elle a été vue dans la section 2.10.

Une fonction (ou son graphique) est dite **convexe** (ou tourne sa concavité vers le haut) sur un intervalle I si f' est une fonction croissante sur I. Elle est dite **concave** (ou tourne sa concavité vers le bas) sur I si f' est décroissante sur I.

Si l'on observe sur la figure 5 les pentes des tangentes de gauche à droite de l'intervalle $]a, b[$, on constate qu'elles sont de plus en plus fortes et f' est donc croissante. La fonction f est convexe sur $]a, b[$. On démontre que c'est équivalent à dire que la courbe représentative de f se trouve au-dessus de ses tangentes en tout point d'abscisse strictement comprise entre a et b. De même, les pentes des tangentes en des points d'abscisse allant depuis b jusqu'à c ne font que diminuer. Donc, f' est décroissante et f est concave sur $]b, c[$.

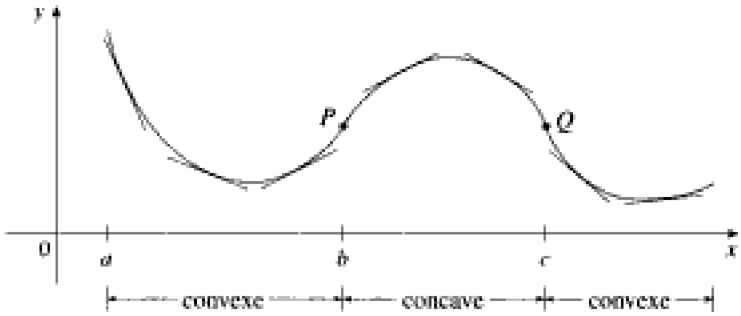


FIGURE 5

Un point en lequel une fonction passe de convexe à concave ou inversement s'appelle un **point d'inflexion**. C'est le cas de la fonction de la figure 5 en P, où elle passe de convexe à concave et en Q où elle passe de concave à convexe. Les points P et Q sont tous les deux des points d'inflexion.

Compte tenu de ce que $f'' = (f')'$, on sait que si $f''(x)$ est strictement positive, alors f' est une fonction strictement croissante et donc f est convexe. De même, si $f''(x)$ est strictement négative, alors f' est strictement décroissante et f est concave. On dispose donc du test suivant sur la concavité.

Test sur la concavité

a) Si $f''(x) > 0$ pour tout x dans I, alors le graphique de f est convexe sur I.
b) Si $f''(x) < 0$ pour tout x dans I, alors le graphique de f est concave sur I.

Eu égard au test sur la concavité, il y a un point d'inflexion en tout point où la dérivée seconde change de signe. Le test sur la concavité entraîne le test que voici sur les valeurs extrêmes.

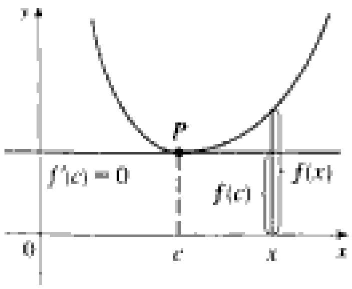


FIGURE 6
$f''(c) > 0$, f convexe

Test de la dérivée seconde On suppose que f'' est continue à proximité de c.

a) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors f présente en c un point de minimum local.
b) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, alors f présente en c un point de maximum local.

La première partie est vraie parce que, $f''(x)$ étant strictement positif à proximité de c, f est convexe près de c. Ce qui veut dire que le graphique de f est au-dessus de la tangente horizontale en c. Ainsi, f admet en c un minimum local (voyez la figure 6).

EXEMPLE 4 ■ Étudiez la courbe $y = x^4 - 4x^3$ du point de vue de la concavité, des points d'inflexion et des maxima et minima locaux.

SOLUTION Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, alors

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)\ ;$$
$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

Afin de déterminer les points critiques, on pose $f'(x) = 0$ et on obtient $x = 0$ et $x = 3$. On calcule ensuite la valeur de f'' en ces points critiques en vue d'appliquer le test de la dérivée seconde :

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0.$$

Comme $f'(3) = 0$ et $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ est un minimum local. Comme $f''(0) = 0$, le Test de la dérivée seconde ne fournit aucune conclusion sur ce qui se passe au point critique 0. Toutefois, $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ ainsi que pour $0 < x < 3$. Le Test de la dérivée première affirme que dans ce cas f n'a ni maximum, ni minimum en 0. [L'expression de $f'(x)$ montre que f décroît à gauche de 3 et croît à droite de 3.]

Puisque $f''(x) = 0$ en $x = 0$ et en $x = 2$, on choisit ces valeurs pour subdiviser la droite réelle en intervalles et on complète un tableau de signes.

Intervalle	$f''(x) = 12x(x-2)$	Concavité
$]-\infty, 0[$	+	vers le haut
$]0, 2[$	−	vers le bas
$]2, \infty[$	+	vers le haut

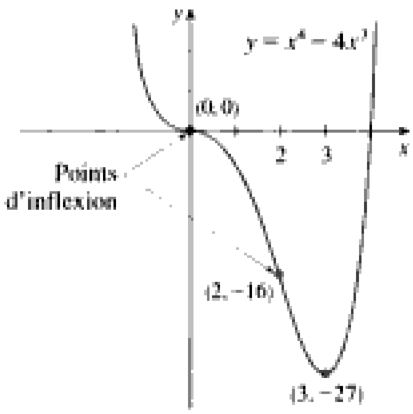


FIGURE 7

Le point $(0, 0)$ est un point d'inflexion puisque la courbe y passe de convexe à concave. Et le point $(2, -16)$ est également un point d'inflexion puisque la courbe y passe de concave à convexe.

On peut tracer la courbe de la figure 7 où apparaissent le minimum local, les intervalles de concavité et les points d'inflexion.

REMARQUE ● Le Test de la dérivée seconde est non concluant quand $f''(c) = 0$. En d'autres mots, en un tel point il peut y avoir un maximum, un minimum ou aucun des deux (comme à l'exemple 4). Ce test échoue aussi lorsque $f''(c)$ n'existe pas. Dans de tels cas, il faut employer le Test de la dérivée première. Au cas où les deux tests sont applicables, celui de la dérivée première est souvent le plus facile à utiliser.

EXEMPLE 5 ■ Dessinez le graphique de la fonction $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$.

SOLUTION On calcule d'abord les deux premières dérivées

Vérifiez ces calculs par les règles de dérivation.

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}.$$

Comme $f'(x)$ s'annule en $x = 4$ et n'existe pas quand $x = 0$ ou $x = 6$, les points critiques sont 0, 4 et 6.

Intervalle	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	+	−	+	−	décroissante sur $]-\infty, 0[$
$0 < x < 4$	+	+	+	+	croissante sur $]0, 4[$
$4 < x < 6$	−	+	+	−	décroissante sur $]4, 6[$
$x > 6$	−	+	+	−	décroissante sur $]6, \infty[$

Les extrema locaux sont obtenus par le Test de la dérivée première. Puisque f' passe du négatif au positif en 0, $f(0) = 0$ est un minimum local. Puisque f' passe du positif au négatif en $x = 4$, $f(4) = 2^{5/3}$ est un maximum local. Le signe de f' ne change pas en $x = 6$ et donc il n'y a là ni maximum, ni minimum (le Test de la dérivée seconde aurait été applicable en $x = 4$, mais pas en 0 ou 6 puisque la dérivée seconde n'existe pas en ces valeurs.)

Examinons $f''(x)$ et, compte tenu que $x^{4/3}$ est toujours positif, nous avons $f''(x) < 0$ pour $x < 0$ et pour $0 < x < 6$ et $f''(x) > 0$ pour $x > 6$. Donc f tourne sa concavité vers le bas sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, 6[$ et vers le haut sur $]6, +\infty[$. Le seul point d'inflexion est $(6, 0)$. La figure 8 présente le graphique de cette fonction. Remarquez que la courbe admet des tangentes verticales en $(0, 0)$ et en $(6, 0)$ parce que $|f'(x)| \to \infty$ lorsque $x \to 0$ et lorsque $x \to 6$.

Essayez de faire dessiner le graphique par une calculatrice graphique ou un ordinateur. Certaines machines affichent la courbe complète, d'autres, seulement la partie située à droite de l'axe Oy, d'autres encore, seulement l'arc au-dessus de l'intervalle $[0, 6]$. Pour une explication et comment y remédier, voyez l'exemple 7 de la section 1.3. Voici une expression équivalente de la fonction qui donne le graphique complet.

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6-x}{|6-x|}|6-x|^{1/3}.$$

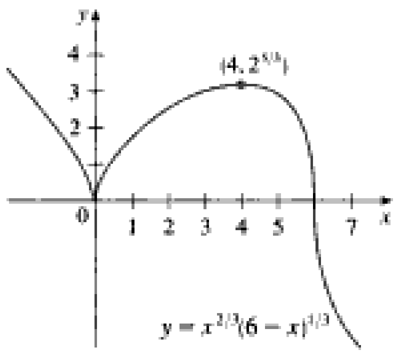


FIGURE 8

EXEMPLE 6 ■ Utilisez les deux premières dérivées et les asymptotes pour dessiner le graphique de la fonction $f(x) = e^{1/x}$.

SOLUTION Comme le domaine de définition de f est $\{x \mid x \neq 0\}$, nous examinons les asymptotes verticales en calculant les limites à droite et à gauche de 0. Quand $x \to 0^+$, nous savons que $t = 1/x \to \infty$ et de là,

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty.$$

L'axe Oy est donc une asymptote verticale. Quand $x \to 0^-$, $t = 1/x \to -\infty$, de sorte que

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0.$$

Quand $x \to \pm\infty$, $1/x \to 0$ et

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

La droite $y = 1$ est donc une asymptote horizontale.

Passons maintenant au calcul des dérivées. La Règle de dérivation des fonctions composées conduit à

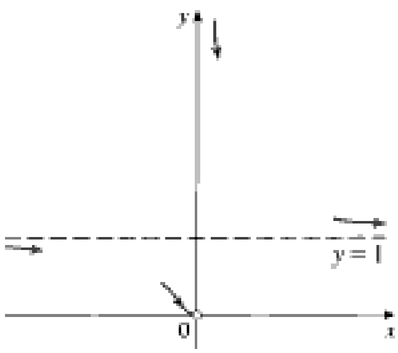
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Vu que $e^{1/x} > 0$ et $x^2 > 0$ quel que soit $x \neq 0$, nous avons $f'(x) < 0$. Par conséquent, la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Par ailleurs, puisqu'il n'y a pas de points critiques, il n'y a ni maximum, ni minimum. La dérivée seconde est

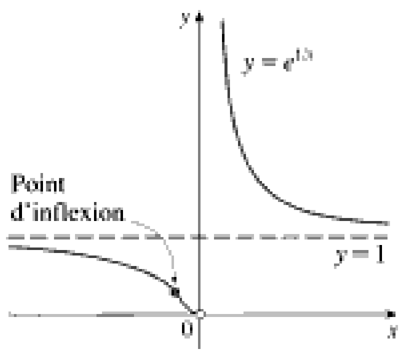
$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}.$$

Comme $e^{1/x} > 0$ et $x^4 > 0$, $f''(x) > 0$ lorsque $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ et $f''(x) < 0$ lorsque $x < -\frac{1}{2}$. La fonction est donc concave sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et convexe sur $]-\frac{1}{2}, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Les coordonnées du point d'inflexion sont $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$.

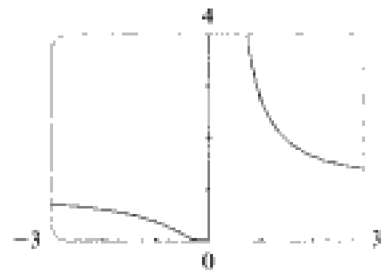
Nous commençons par tracer l'asymptote horizontale $y = 1$ en traits interrompus ainsi que des portions de la courbe proches des asymptotes [figure 9 (a)]. Ces traits traduisent l'information recueillie par les limites calculées ainsi que le caractère décroissant de f sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. Remarquez le trait qui montre que $f(x) \to 0$ quand $x \to 0^-$, même si $f(0)$ n'existe pas. Dans la figure 9 (b), nous complétons la courbe en y introduisant l'information relative au sens de la concavité et le point d'inflexion. La Figure 9 (c) est la fenêtre qu'affiche un outil graphique et confirme notre étude.



(a) Esquisse préliminaire



(b) Tracé complet



(c) Confirmation par outil graphique

FIGURE 9

EXEMPLE 7 ■ Un rucher qui au début comptait 50 abeilles a vu sa population croître. Son effectif au temps t a pu être modélisé par la fonction

$$P(t) = \frac{75\,200}{1 + 1503e^{-0,5932t}},$$

où t est le temps en semaines, $0 \leqslant t \leqslant 25$. Estimez sur la base d'un graphique à quel moment se situe la plus forte croissance de la population. Ensuite, précisez davantage votre estimation à l'aide des dérivées.

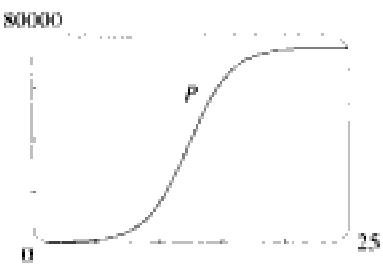


FIGURE 10

SOLUTION Le moment où la population croît le plus correspond au point en lequel la tangente à la courbe a la pente la plus forte. Une lecture du graphique de la figure 10 nous fait penser que c'est aux alentours de $t = 12$ que la tangente est la plus raide, autrement dit après plus ou moins douze semaines.

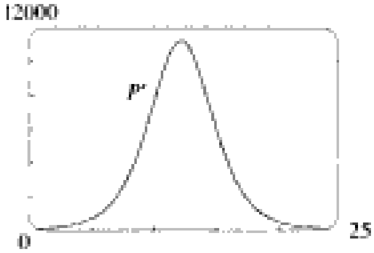


FIGURE 11

En vue de préciser davantage cette première estimation, nous calculons le taux de croissance de la population, donné par la dérivée $P'(t)$:

$$P'(t) = \frac{67\,046\,785{,}92e^{-0{,}5932t}}{(1 + 1\,503e^{-0{,}5932t})^2}.$$

La figure 11 présente le graphique de P' où nous pouvons observer un maximum pour $t \approx 12{,}3$.

Afin d'améliorer encore cette estimation, nous observons que P' atteint sa plus grande valeur au moment où P' cesse de croître pour commencer à décroître. À cet instant, P passe de convexe à concave. Aussi, nous ordonnons à un logiciel de calcul algébrique l'expression de P'' :

$$P''(t) \approx \frac{119555093144e^{-1{,}1864t}}{(1 + 1503e^{-0{,}5932t})^3} - \frac{39772153e^{-0{,}5932t}}{(1 + 1503e^{-0{,}5932t})^2}$$

Nous pourrions lire sur le graphique de cette fonction à quel endroit elle change de signe, mais nous préférons demander encore au logiciel de calculer la solution de l'équation $P''(t) = 0$. Il donne comme réponse $t \approx 12{,}3318$.

Notre dernier exemple se rapporte aux *familles* de fonctions. Les fonctions d'une famille sont liées entre elles par une formule qui contient une ou plusieurs constantes arbitraires. Chaque valeur de la constante correspond à un membre de la famille et il est intéressant d'observer comment le graphique se modifie selon la valeur de la constante.

EXEMPLE 8 ■ Étudiez la famille de fonctions définie par $f(x) = cx + \sin x$. Quelles sont les caractéristiques communes des membres de cette famille ? En quoi sont-ils différents ?

SOLUTION La dérivée est donnée par l'expression $f'(x) = c + \cos x$. Si $c > 1$, alors $f'(x) > 0$ quel que soit x (puisque $\cos x \geqslant -1$), et donc f est toujours strictement croissante. Si $c = 1$, alors $f'(x) = 0$ chaque fois que x est un multiple impair de π et f, même si en ces points elle admet une tangente horizontale, reste une fonction croissante. De même, si $c \leqslant -1$, alors f est toujours décroissante. Si $-1 < c < 1$, alors l'équation $c + \cos x = 0$ a une infinité de solutions $[x = 2n\pi \pm \operatorname{Arccos}(-c)]$ et de ce fait, f présente une infinité de minima et de maxima.

La dérivée seconde est donnée par l'expression $f''(x) = -\sin x$; elle est négative pour $0 < x < \pi$ et, en général, pour $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$ où n est un entier quelconque. C'est ainsi que *tous* les membres de cette famille sont concaves sur $]0, \pi[$, $]2\pi, 3\pi[, \ldots$ et convexes sur $]\pi, 2\pi[$, $]3\pi, 4\pi[, \ldots$ Plusieurs des fonctions de cette famille sont représentées graphiquement à la figure 12.

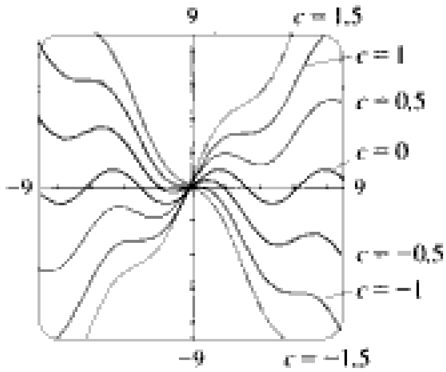
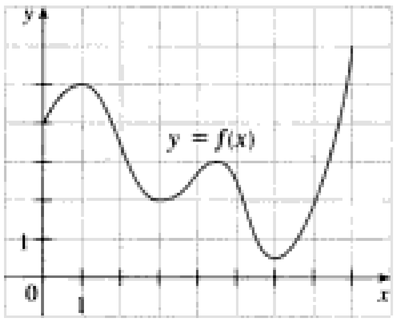


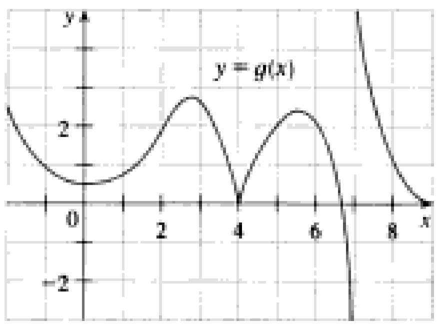
FIGURE 12

4.3 Exercices

1. Utilisez le graphique de f pour situer approximativement les valeurs de c qui satisfont au Théorème des accroisssements finis sur l'intervalle $[0, 8]$.



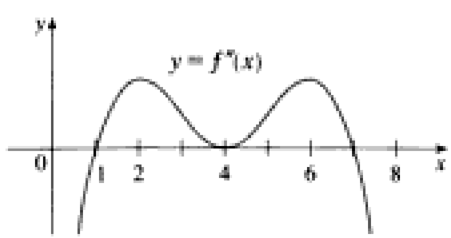
2. Au vu du graphique de g, déterminez
   a) les plus grands intervalles ouverts sur lesquels g est convexe,
   b) les plus grands intervalles ouverts sur lesquels g est concave,
   c) les coordonnées des points d'inflexion.



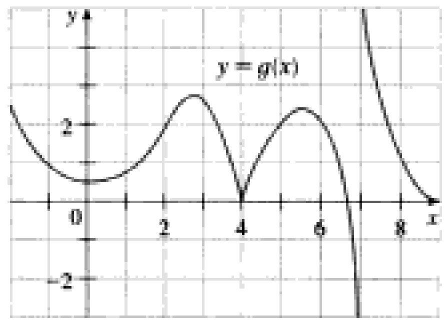
3. a) Comment déterminez-vous où une fonction est croissante ou décroissante?
   b) Comment déterminez-vous où une fonction est concave ou convexe?
   c) Comment localiser les points d'inflexion?

4. a) Énoncez le Test de la dérivée première.
   b) Énoncez le Test de la dérivée seconde. Dans quelles conditions s'avère-t-il non concluant? Que faites-vous dans ce cas?

5. Voici le graphique de la dérivée seconde f'' d'une fonction f. Quelles sont les abscisses des points d'inflexion de f? Justifiez votre réponse.



6. Voici le graphique de la dérivée première f' d'une fonction f.
   a) Sur quels intervalles f est-elle strictement croissante? Expliquez votre réponse.
   b) En quelles valeurs de x la fonction f admet-elle un maximum local ou un minimum local? Expliquez votre réponse.
   c) Sur quels intervalles f est-elle concave ou convexe? Expliquez votre réponse.
   d) Quelles sont les abscisses des points d'inflexion de f? Pourquoi?



7-12 ■
   a) Déterminez les intervalles sur lesquels f est strictement croissante ou décroissante.
   b) Déterminez les valeurs extrêmes de f.
   c) Déterminez les intervalles de concavité et de convexité ainsi que les points d'inflexion.

7. $f(x) = x^6 + 192x + 17$

8. $f(x) = 2\sin x + \sin^2 x$

9. $y = xe^x$

10. $y = x^2 e^x$

11. $y = (\ln x)/\sqrt{x}$

12. $y = x \ln x$

13-20 ■
   a) Déterminez les intervalles sur lesquels f est strictement croissante ou décroissante.
   b) Déterminez les valeurs extrêmes de f.
   c) Déterminez les intervalles de concavité et de convexité ainsi que les points d'inflexion.
   d) Tracez le graphique de f en accord avec les réponses des points a), b) et c). Vérifiez vos résultats en faisant appel à un outil graphique.

13. $f(x) = 1 - 3x + 5x^2 - x^3$

14. $f(x) = x^4 - 6x^2$

15. $f(x) = (x^2 - 1)^3$

16. $f(x) = x\sqrt{x + 1}$

17. $f(x) = x^{1/3}(x + 3)^{2/3}$

18. $f(x) = 2x + \operatorname{cotg} x, \quad 0 < x < \pi$

19. $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$

20. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

21-26 ■

a) Identifiez les asymptotes verticales et horizontales.
b) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance.
c) Déterminez les valeurs extrêmes de f.
d) Déterminez les intervalles de concavité et de convexité ainsi que les points d'inflexion.
e) Tracez le graphique de f en accord avec les réponses des points a) à d).

21. $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$ **22.** $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

23. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

24. $f(x) = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

25. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

26. $f(x) = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$

27-28 ■

a) Sur un graphique de f, localisez plus ou moins les intervalles de concavité et les coordonnées des points d'inflexion.
b) Faites dessiner le graphique de f'' pour améliorer la précision de vos réponses précédentes.

27. $f(x) = 3x^5 - 40x^3 + 30x^2$

28. $f(x) = 2\cos x + \sin 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

29-30 ■

a) Lisez d'abord sur un graphique de f les valeurs extrêmes de f. Puis, calculez-les exactement.
b) Localisez grossièrement le point en lequel f croît le plus rapidement. Déterminez ensuite exactement ce point.

29. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **30.** $f(x) = x^3 e^{-x}$

31. Aux États-Unis, entre 1980 et 1994, on a estimé le nombre de ménages qui disposaient d'au moins un magnétoscope par la fonction suivante

$$V(t) = \frac{75}{1 + 74e^{-0,6t}},$$

où le temps t est mesuré en années depuis le milieu de l'année 1980, de sorte que $0 \leqslant t \leqslant 14$. Par lecture du graphique de cette fonction, déterminez le moment où le nombre de magnétoscopes augmentait le plus. Donnez une meilleure approximation de ce moment grâce aux dérivées.

32. La famille des courbes en cloche

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

apparaît en probabilité et statistiques, où ces courbes représentent les *fonctions de densité normale*. La constante μ est la *moyenne* et la constante positive σ l'*écart-type*. Pour simplifier, changeons l'échelle de manière à éliminer le facteur $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ et considérons le cas particulier où $\mu = 0$. Ainsi, nous étudions la fonction

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}.$$

a) Déterminez l'asymptote, le maximum et les points d'inflexion de f.
b) Quel rôle joue σ dans la forme de la courbe ?
c) Illustrez cela en faisant afficher quatre courbes de cette famille dans la même fenêtre.

33-34 ■ Déterminez avec une décimale exacte les bornes des intervalles de concavité à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique qui calcule et trace le graphique de f''.

33. $f(x) = \dfrac{x^3 - 10x + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$

34. $f(x) = \dfrac{(x+1)^3(x^2+5)}{(x^3+1)(x^2+4)}$

35. Déterminez la fonction cubique $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui atteint un maximum local de 3 en -2 et un minimum local de 0 en 1.

36. Quelles valeurs faut-il attribuer à a et b pour que la fonction

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

passe par le maximum $f(2) = 1$?

37-40 ■ On suppose que toutes les fonctions sont deux fois dérivables.

37. Démontrez que si f et g sont convexes sur I, alors $f + g$ est convexe sur I.

38. Démontrez que si f est strictement positive et convexe sur I, alors $g(x) = [f(x)]^2$ est convexe sur I.

39. Démontrez que si f et g sont positives, croissantes et convexes sur I, alors leur produit fg est convexe sur I.

40. On suppose que f et g sont toutes deux convexes sur $]-\infty, +\infty[$. Sous quelle condition sur f la fonction composée $h(x) = f(g(x))$ est-elle convexe ?

41. Démontrez que $\operatorname{tg} x > x$ pour $0 < x < \pi/2$. (*Suggestion :* Démontrez que $f(x) = \operatorname{tg} x - x$ est strictement croissante sur $[0, \pi/2[$.)

42. a) Démontrez que $e^x \geqslant 1 + x$ pour $x \geqslant 0$.
b) Déduisez-en que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ pour $x \geqslant 0$.
c) Par récurrence, démontrez que, pour $x \geqslant 0$ et n entier positif quelconque,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

43. On suppose que $f(0) = -3$ et $f'(x) \leqslant 5$ quel que soit x. L'inégalité impose une restriction sur le taux de croissance de f, qui à son tour impose une restriction sur les valeurs possibles de f. Grâce au Théorème des accroisssements finis, déterminez le maximum possible de $f(4)$.

44. On suppose que $1 \leqslant f'(x) \leqslant 4$ pour tout x tel que $2 \leqslant x \leqslant 5$. Démontrez que $3 \leqslant f(5) - f(2) \leqslant 12$.

45. Deux coureurs démarrent une épreuve au même moment et terminent dans un mouchoir. Démontrez qu'à un certain instant de la course ils ont eu la même vitesse. [*Suggestion :* Considérez $f(t) = g(t) - h(t)$ où g et h sont les fonctions positions des deux coureurs.]

46. Le compteur d'une voiture indique à 14 H une vitesse de 30 km/h. Dix minutes plus tard, il indique 50 km/h. Démontrez qu'à un certain moment entre ces deux mesures, l'accélération est exactement de 120 km/h^2.

47. Démontrez qu'une fonction polynomiale du troisième degré a toujours exactement un point d'inflexion. Si son graphique coupe l'axe Ox en x_1, x_2 et x_3, montrez que l'abscisse de ce point d'inflexion est $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

48. Pour quelles valeurs de c le polynôme $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ a-t-il deux points d'inflexion ? Un seul point d'inflexion ? Aucun point d'inflexion ? Illustrez ces réponses en traçant P pour quelques valeurs de c. Comment le graphique se transforme-t-il lorsque c décroît ?

4.4 Étude de fonctions à l'aide du calcul différentiel et des calculatrices

Si vous n'avez pas encore lu la section 1.3, il est temps de le faire. Il y est expliqué en particulier comment éviter certains pièges que pose l'utilisation de logiciels de dessin quant au choix de la fenêtre.

Lorsqu'on fait appel à l'informatique pour dessiner des courbes, le maître-mot est *interaction* entre les méthodes du calcul différentiel et les outils de dessin. Le point de départ est le graphique fourni par défaut par la calculatrice graphique ou l'ordinateur, qu'il faut ensuite affiner. Ce n'est qu'en exploitant le calcul différentiel que l'on peut être sûr d'avoir fait ressortir tous les aspects importants de la courbe.

EXEMPLE 1 ■ Tracez la courbe polynomiale $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Servez-vous des graphiques de f' et de f'' pour situer tous les points de maximum et de minimum et les intervalles de concavité.

SOLUTION Si on ne spécifie que le domaine de définition, sans l'ensemble image, la plupart des logiciels sont capables de déduire un ensemble image convenable basé sur les valeurs calculées. La figure 1 montre la courbe qu'affiche un logiciel graphique pour le domaine $-5 \leqslant x \leqslant 5$. S'il est déjà manifeste, dans cette fenêtre, que le comportement asymptotique (ou comportement aux extrémités) est le même que celui de la fonction $y = 2x^6$, par contre, il est tout aussi manifeste que certains détails plus fins ne se voient pas. Voilà pourquoi on passe à la fenêtre $[-3, 2]$ sur $[-50, 100]$, c'est la figure 2.

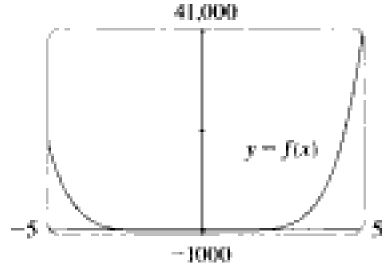


FIGURE 1

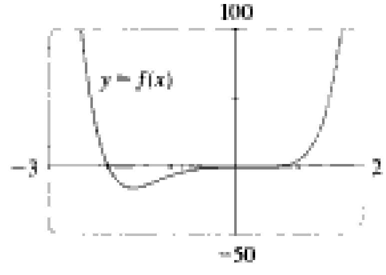


FIGURE 2

En faisant circuler le curseur à l'intérieur de cette fenêtre, on peut déduire que le minimum absolu vaut plus ou moins $-15{,}33$ et se produit en $x \approx -1{,}62$ et que f est décroissante sur $]-\infty; -1{,}62[$ et croissante sur $]-1{,}62; +\infty[$. Il semble aussi qu'il y ait une tangente horizontale à l'origine et deux points d'inflexion, l'un en $x = 0$ et l'autre quelque part entre -2 et -1.

On essaie maintenant de confirmer ces premières observations par les techniques du calcul différentiel. On calcule les dérivées

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x \qquad f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4.$$

Sur le graphique de f' à la figure 3 on voit que $f'(x)$ passe du négatif au positif en $x = -1{,}62$; ce qui confirme (cf Test de la dérivée première) le minimum suspecté précédemment. Mais, de façon surprenante peut-être, on découvre aussi que $f'(x)$ passe du positif au négatif en $x = 0$ et du négatif au positif quand $x \approx 0{,}35$. Ce qui veut dire que f atteint un maximum local en $x = 0$ et un minimum local en $x \approx 0{,}35$, et ces valeurs extrêmes ne se voyaient pas à la figure 2. En effet, si on regarde de près ce qui se passe près de l'origine, on constate à la figure 4 qu'on s'est laissé abuser : il y a un maximum local 0 atteint en $x = 0$ et un minimum local d'environ $-0{,}1$ en $x \approx 0{,}35$.

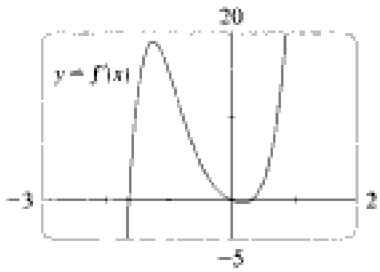


FIGURE 3

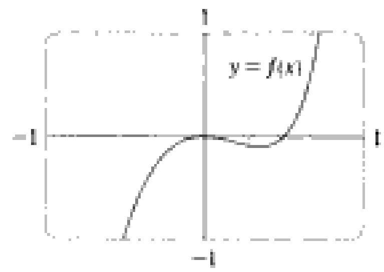


FIGURE 4

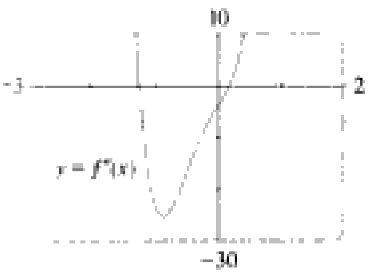


FIGURE 5

Qu'en est-il maintenant des points d'inflexion et des changements de concavité ? D'après les figures 2 et 4 il semble y avoir un point d'inflexion un peu à gauche de $x = -1$ et un peu après $x = 0$. Mais comme il est difficile de situer graphiquement les points d'inflexion, on dessine le graphique de f'' (figure 5). On y voit que f'' passe du positif au négatif en $x \approx -1{,}23$ et du négatif au positif en $x \approx 0{,}19$. Avec une précision de deux décimales, la courbe représentative de f tourne sa concavité vers le haut sur $]-\infty; -1{,}23[$ et $]0{,}19; +\infty[$ et vers le bas sur $]-1{,}23; 0{,}19[$. Les points d'inflexion sont $(-1,23; -10,18)$ et $(0{,}19; -0{,}05)$.

En conclusion, on peut dire qu'aucun graphique à lui tout seul ne révèle les faits saillants de ce polynôme. Seule la lecture conjointe des figures 2 et 4 apporte une image précise.

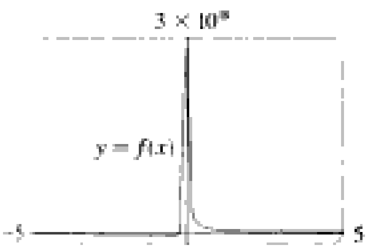


FIGURE 6

EXEMPLE 2 ■ Tracez le graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

dans une fenêtre qui en montre les caractéristiques principales. Estimez les valeurs extrêmes et les intervalles de concavités différentes. Utilisez ensuite les méthodes du calcul différentiel pour calculer exactement les coordonnées des points concernés.

SOLUTION Un premier logiciel en mode automatique quant au choix des échelles sur les axes donne le graphique catastrophique de la figure 6. Voyons ce que présentent les calculatrices graphiques qui, par défaut, prennent la fenêtre $[-10, 10]$ sur $[-10, 10]$. C'est le graphique de la figure 7 ; l'amélioration est très nette.

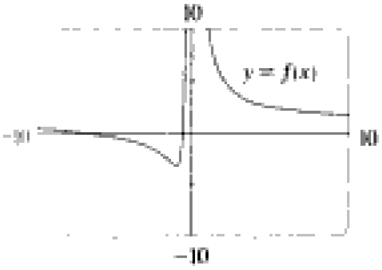


FIGURE 7

L'axe Oy semble être une asymptote verticale et c'en est une car

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty.$$

D'après la figure 7, les intersections avec l'axe Ox se produisent aux environs de $-0{,}5$ et de $-6{,}5$. Les valeurs exactes sont les solutions de l'équation du second degré $x^2 + 7x + 3 = 0$, à savoir $x = (-7 \pm \sqrt{37})/2$.

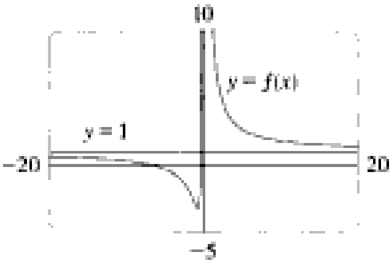


FIGURE 8

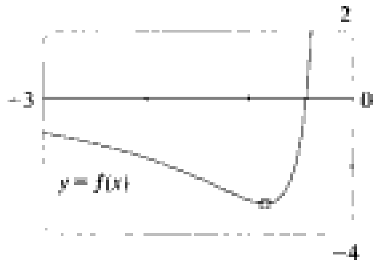


FIGURE 9

Afin de mieux distinguer l'asymptote horizontale, on passe à la fenêtre $[-20, 20]$ sur $[-5, 10]$ de la figure 8 qui suggère que $y = 1$ serait une asymptote horizontale. Il est facile d'en avoir la confirmation :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+7x+3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}\right) = 1.$$

Pour mettre en évidence le minimum, on choisit la fenêtre $[-3, 0]$ sur $[-4, 2]$ de la figure 9. Le pointeur situe le minimum aux environs de $-3{,}1$ quand $x \approx -0{,}9$. La fonction décroît sur $]-\infty; -0{,}9[$ et $]0, +\infty[$ et croît sur $]-0{,}9; 0[$. Pour obtenir les valeurs exactes, il faut calculer la dérivée première

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x+6}{x^3}.$$

Cette expression montre que $f'(x) > 0$ quand $-\frac{6}{7} < x < 0$ et $f'(x) < 0$ quand $x < -\frac{6}{7}$ et $x > 0$. La valeur exacte du minimum est $f(-\frac{6}{7}) = -\frac{37}{12} \approx -3{,}08$.

La figure 9 révèle aussi un point d'inflexion situé quelque part entre $x = -1$ et $x = -2$. On pourrait le situer mieux en faisant tracer le graphique de la dérivée seconde, mais il est tout aussi facile de le calculer exactement à partir de l'expression de cette dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = 2\,\frac{7x+9}{x^4}.$$

Ainsi, $f''(x) > 0$ pour $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. Dès lors, f tourne sa concavité vers le haut sur $]-\frac{9}{7}, 0[$ et $]0, +\infty[$ et vers le bas sur $]-\infty, -\frac{9}{7}[$. Les coordonnées du point d'inflexion sont $(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27})$.

Ce n'est qu'après l'étude des deux premières dérivées comme l'apprend le calcul différentiel que l'on peut dire que les figures 7 et 8 font apparaître le mieux les caractéristiques de cette courbe.

EXEMPLE 3 ■ Représentez le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$.

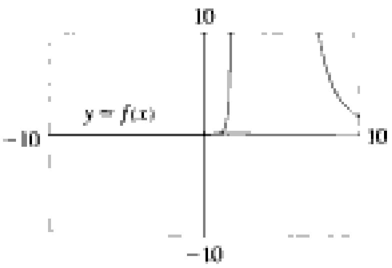


FIGURE 10

SOLUTION Dans le sillage de la fonction rationnelle étudiée dans l'exemple 2, on part de la courbe qui apparaît dans la fenêtre $[-10, 10]$ sur $[-10, 10]$. À la vue de la figure 10, on sent qu'il va falloir regarder de plus près pour voir certains détails, mais aussi prendre du recul pour voir davantage. Un coup d'oeil attentif à l'expression de $f(x)$ pourrait sans doute guider ces manœuvres.

À cause des facteurs $(x-2)^2$ et $(x-4)^4$ qui figurent au dénominateur on s'attend à trouver les asymptotes verticales $x = 2$ et $x = 4$. En effet,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 4} \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \infty.$$

Afin de découvrir les asymptotes horizontales, on divise numérateur et dénominateur par x^6 :

$$\frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^4} \to 0 \text{ quand } x \to \pm\infty.$$

Il en résulte que l'axe Ox est une asymptote horizontale.

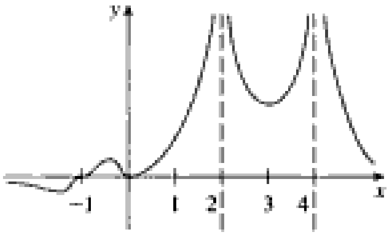


FIGURE 11

Cela vaut certainement la peine d'examiner le comportement de la fonction au voisinage de ses intersections avec l'axe Ox. D'une part, comme x^2 est un facteur positif, $f(x)$ ne change pas de signe en 0 et la courbe ne traverse pas l'axe Ox en 0. D'autre part, à cause du facteur $(x+1)^3$, la courbe traverse l'axe Ox en $x = -1$ et y admet une tangente horizontale. Compte tenu de toutes ces informations, et sans encore avoir fait appel aux dérivées, on peut déjà prévoir que l'allure de la courbe sera plus ou moins celle qui est dessinée à la figure 11.

Sachant mieux maintenant ce qui est à éclaircir, on opère plusieurs rapprochements successifs, ce sont les figures 12 et 13, et de même, plusieurs zooms en arrière conduisent à la figure 14.

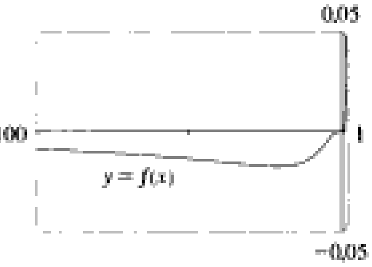


FIGURE 12

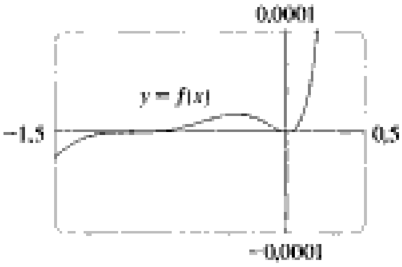


FIGURE 13

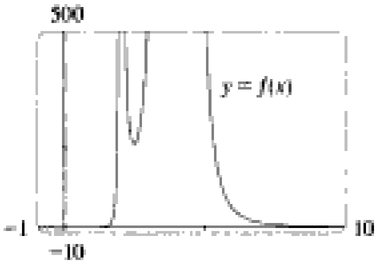


FIGURE 14

On peut maintenant lire sur ces graphiques que le minimum absolu est à environ $-0{,}02$ et se produit en $x \approx -20$. Il y a aussi un maximum local $\approx 0{,}00002$ en $x \approx -0{,}3$ et un minimum local ≈ 211 en $x \approx 2{,}5$. Ces images laissent deviner encore deux points d'inflexion près de -5 et -1 et deux autres entre -1 et 0. Pour les connaître avec précision il faudrait calculer f'', mais effectuer un tel calcul à la main est une entreprise un peu folle. Ce n'est à envisager que si l'on dispose d'un logiciel de calcul symbolique (voyez l'exercice 13).

Finalement, dans le cas de cette fonction, pas moins de *trois* graphiques (Figures 12, 13 et 14) sont nécessaires pour transmettre toute l'information utile. La seule manière de présenter toutes les particularités de cette fonction sur un seul graphique est de le dessiner à la main. En dépit des exagérations et des distorsions, la figure 11 est celle qui réussit à résumer le mieux les traits essentiels de la fonction.

La famille des fonctions

$$f(x) = \sin(x + \sin cx),$$

où c est une constante, intervient dans la théorie des fréquences modulées (FM). Une onde sinusoïdale est modulée par une onde de fréquence différente ($\sin cx$). L'exemple 4 envisage le cas $c = 2$. L'exercice 15 traite un autre cas particulier.

EXEMPLE 4 ■ Représentez le graphique de la fonction $f(x) = \sin(x + \sin 2x)$. Repérez sur l'intervalle $[0, \pi]$ tous les maxima et minima, les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les points d'inflexion, avec une précision d'un chiffre après la virgule.

SOLUTION On remarque en premier lieu que cette fonction est périodique de période 2π. Ensuite, que f est impaire et que $|f(x)| \leqslant 1$, quel que soit x. Le choix d'une fenêtre n'est donc pas un problème pour cette fonction : on prend au départ la fenêtre $[0, \pi]$ sur $[-1{,}1; 1{,}1]$ (voyez la figure 15). On y distingue immédiatement trois maxima locaux et deux minima locaux.

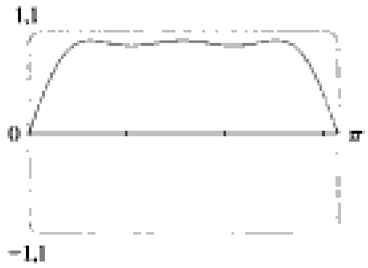


FIGURE 15

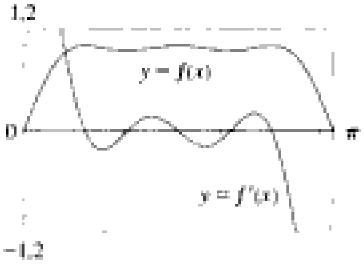


FIGURE 16

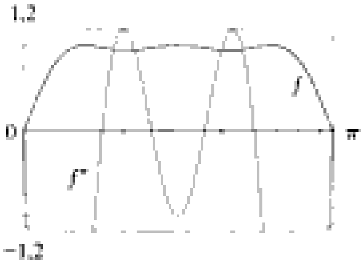


FIGURE 17

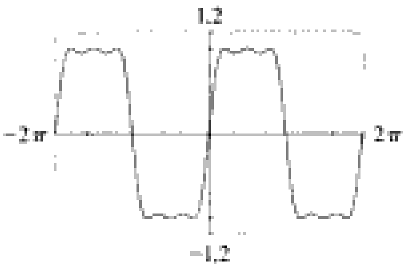


FIGURE 18

Pour confirmer cette observation et situer plus précisément ces valeurs extrêmes, on calcule la dérivée première

$$f'(x) = \cos x(x + \sin 2x) \cdot (1 + 2\cos 2x),$$

et on représente les graphiques de f et f' dans la même fenêtre. En regardant de plus près et en utilisant le Test de la dérivée première, on trouve les valeurs suivantes.

Intervalles de croissance :	$]0;0{,}6[$, $]1;1{,}6[$, $]2{,}1;2{,}5[$
Intervalles de décroissance :	$]0{,}6;1{,}0[$, $]1{,}6;2{,}1[$, $]2{,}5;\pi[$
Maxima locaux :	$f(0{,}6) \approx 1$, $f(1{,}6) \approx 1$, $f(2{,}5) \approx 1$
Minima locaux :	$f(1) \approx 0{,}94$, $f(2{,}1) \approx 0{,}94$.

La dérivée seconde a pour expression

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2 \sin(x + \sin 2x) - 4\sin 2x \cos(x + \sin 2x).$$

La figure 17 montre ensemble les graphiques de f et f''. La lecture de cette figure conduit aux valeurs approchées suivantes :

Concavité tournée vers le haut :	$]0{,}8;1{,}3[$, $]1{,}8;2{,}3[$
Concavité tournée vers le bas :	$]0;0{,}8[$, $]1{,}3;1{,}8[$, $]2{,}3;\pi[$
Points d'inflexion :	$(0,0)$, $(0{,}8;0{,}975)$, $(1{,}3;0{,}97)$, $(1{,}8;0{,}97)$, $(2{,}3;0{,}975)$.

Après avoir vérifié que la figure 15 donne une représentation précise de f pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$, on peut dire que la figure 18 donne, par extension, une représentation précise de f pour $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

EXEMPLE 5 ■ Comment la courbe représentative de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + c}$ change-t-elle suivant les valeurs de c ?

SOLUTION Les figures 19 et 20 présentent les courbes apparemment très différentes des deux cas particuliers $c = 2$ et $c = -2$.

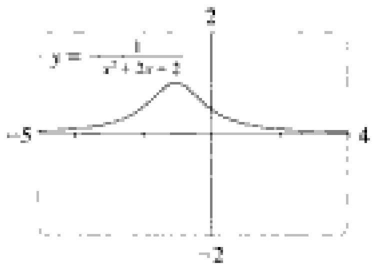


FIGURE 19
$c = 2$

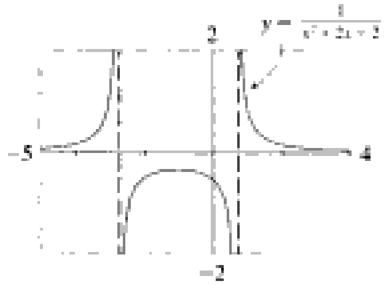


FIGURE 20
$c = -2$

Avant de représenter d'autres fonctions de cette famille, regardons ce que de toute manière elles ont en commun. Comme

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

quelle que soit la valeur de c, elles admettent toutes l'axe des abscisses comme asymptote horizontale. Une ou des asymptotes verticales se présenteront selon la ou les racines du dénominateur. Celui-ci s'annule en $x = -1 \pm \sqrt{1-c}$. Quand $c > 1$, il n'y a pas d'asymptote verticale, c'est le cas de la figure 19. Quand $c = 1$, il y a une seule asymptote verticale d'équation $x = -1$. En effet,

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = \infty.$$

Quand $x < 1$, il y a, comme dans la figure 20, deux asymptotes verticales : $x = -1 + \sqrt{1-c}$ et $x = -1 - \sqrt{1-c}$.

Nous calculons maintenant la dérivée première :

$$f'(x) = -\frac{2x+2}{(x^2+2x+c)^2}.$$

Il apparaît clairement que $f'(x) = 0$ quand $x = -1$ (si $c \neq 1$), que $f'(x) > 0$ quand $x < -1$ et enfin que $f'(x) < 0$ quand $x > -1$. Si $c \geqslant 1$, on peut dire que f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et décroissante sur $]-1, +\infty[$. Si $c > 1$, il y a un maximum absolu qui vaut $f(-1) = \frac{1}{c-1}$. Si $c < 1$, $f(-1) = \frac{1}{c-1}$ est un maximum local et les intervalles de croissance et de décroissance sont interrompus par les asymptotes verticales.

La figure 21 déroule une suite de diapositives présentant cinq membres de la famille, tous contenus dans une fenêtre de $[-5, 4]$ sur $[-2, 2]$.

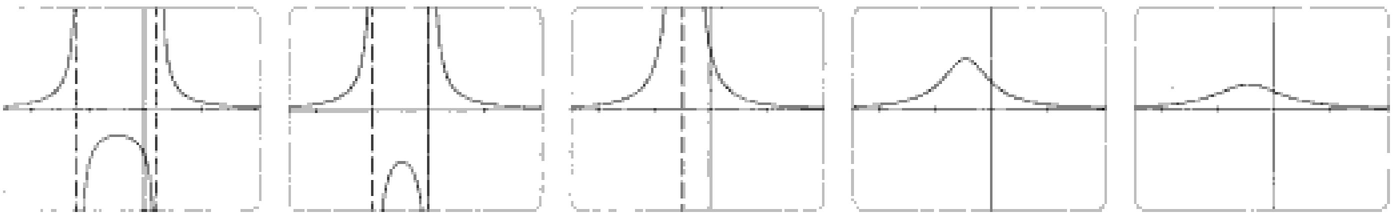


FIGURE 21

La famille des fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + c}$

Comme annoncé, $c = 1$ est la valeur pour laquelle il y a une asymptote verticale, séparant les courbes qui en ont deux de celles qui n'en ont aucune. Au fur et à mesure que c augmente à partir de 1, on voit que le maximum atteint est de moins en moins haut ; c'est la traduction graphique de ce que $\frac{1}{c-1} \to 0$ lorsque $c \to \infty$. Tandis qu'au fur et à mesure que c diminue à partir de 1, les asymptotes verticales s'écartent de plus en plus. En effet, leur distance est égale à $2\sqrt{1-c}$, qui devient de plus en plus grande lorsque $c \to -\infty$. Le point de maximum absolu s'approche de plus en plus de l'axe Ox parce que $\frac{1}{c-1} \to 0$ quand $c \to -\infty$.

Il n'y a manifestement pas de points d'inflexion quand $c \leqslant 1$. Par contre, quand $c > 1$, la dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

est nulle quand $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. Les points d'inflexion s'éloignent donc l'un de l'autre en même temps que c devient grand et cela semble plausible au vu des deux dernières images de la figure 21.

À la section 1.4, nous nous sommes servis d'outils graphiques pour tracer des courbes paramétrées et à la section 3.5, nous avons expliqué comment déterminer les tangentes à ces courbes paramétrées. Notre dernier exemple montre que désormais nous sommes en mesure de garantir quel intervalle de variation du paramètre ou quelle fenêtre suffiront à exhiber toutes les particularités importantes d'une courbe.

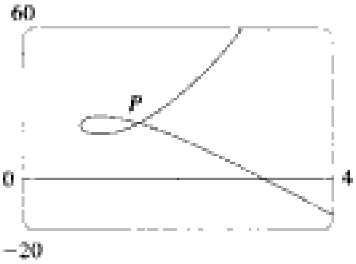


FIGURE 22

EXEMPLE 6 ■ Représenter la courbe paramétrée

$$x(t) = t^2 + t + 1 \qquad y(t) = 3t^4 - 8t^3 - 18t^2 + 25$$

dans une fenêtre qui fait apparaître tous les aspects importants de la courbe. Déterminez les coordonnées des points intéressants de la courbe.

SOLUTION La figure 22 propose une vue de la courbe dans la fenêtre $[0, 4]$ sur $[-20, 60]$. Le point P en lequel la courbe se coupe elle-même mérite une lecture rapprochée qui attribue à P les coordonnées (1,50; 22,25). Nous situons le point le plus haut de la boucle en $(1, 25)$, le point le plus bas en $(1, 18)$ et l'extrémité gauche de la boucle en (0,75; 21,7). Pour être certains d'avoir mis au jour tous les aspects intéressants de cette courbe, nous devons faire appel aux méthodes du calcul différentiel. Appliquons l'équation 7 de la section 3.5 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{12t^3 - 24t^2 - 36t}{2t + 1}.$$

La tangente est verticale au point correspondant à $dx/dt = 2t + 1 = 0$, ou $t = -\frac{1}{2}$. C'est l'extrémité gauche de la boucle dont les coordonnées exactes sont $x(-\frac{1}{2}) = 0{,}75$ et $y(-\frac{1}{2}) = 21{,}6875$.

D'autre part, le numérateur se factorise comme suit :

$$\frac{dy}{dt} = 12t(t^2 - 2t - 3) = 12t(t + 1)(t - 3).$$

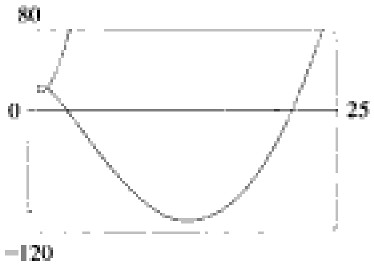


FIGURE 23

Dès lors, la tangente est horizontale lorsque $t = 0$, $t = -1$ et $t = 3$. Le point le plus haut de la boucle correspond à $t = -1$ et ses coordonnées sont effectivement $x(-1) = 1$ et $y(-1) = 18$. Les coordonnées du point le plus bas sont celles que nous avions estimées, $x(0) = 1$ et $y(0) = 25$. Mais quel est ce point correspondant à $t = 3$? Ses coordonnées sont $x(3) = 13$ et $y(3) = -110$. La figure 23 montre une vue de la courbe dans une fenêtre de $[0, 25]$ sur $[-120, 80]$ et révèle ainsi le point $(13, -100)$ de minimum absolu. Nous pouvons être sûrs maintenant que plus rien ne nous a échappé.

4.4 Exercices

6 ■ Faites afficher un graphique de f qui mette en évidence toutes les particularités de la courbe. À cette fin, utilisez les graphiques de f' et f'' pour situer les intervalles de croissance et de décroissance, les valeurs extrêmes, les intervalles de concavité et les points d'inflexion.

1. $f(x) = 4x^4 - 7x^2 + 4x + 6$

2. $f(x) = 8x^5 + 45x^4 + 80x^3 + 90x^2 + 200x$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x - 5}$

4. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 2x^2 + 2}{x^2 + x - 2}$

5. $f(x) = x^2 \sin x, \ -7 \leq x \leq 7$

6. $f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$

7-8 ■ Faites afficher un graphique de f qui mette en évidence toutes les particularités de la courbe. Situez les intervalles de croissance et de décroissance, les valeurs extrêmes, les intervalles de concavité et les points d'inflexion et utilisez les techniques du calcul différentiel pour déterminer exactement les points concernés.

7. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 - 10$ **8.** $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

9-10 ■ Faites afficher un graphique de f qui mette en évidence toutes les particularités de la courbe. Situez les valeurs extrêmes et utilisez les techniques du calcul différentiel pour calculer exactement les coordonnées de ces points. Utilisez le graphique de f'' pour situer à peu près les points d'inflexion.

9. $f(x) = e^{x^3 - x}$ **10.** $f(x) = e^{\cos x}$

11-12 ■ Esquissez à la main le graphique de f en traçant d'abord les asymptotes et intersections avec les axes, mais sans recourir aux dérivées. Guidez-vous de cette ébauche pour produire (par outil graphique) la courbe représentative de f avec toutes ses particularités. Estimez alors les valeurs extrêmes de f.

11. $f(x) = \dfrac{(x+4)(x-3)^2}{x^4(x-1)}$ **12.** $f(x) = \dfrac{10x(x-1)^4}{(x-2)^3(x+1)^2}$

13. Reprenez la fonction f de l'exemple 3, faites calculer f' par un logiciel de calcul symbolique et faites dessiner le graphique de f' pour confirmer que toutes les valeurs maximales et minimales sont celles découvertes dans l'étude menée à l'exemple 3. Calculez f'' et déduisez-en les intervalles de concavité et les points d'inflexion.

14. Soit f la fonction de l'exercice 12. Ordonnez le calcul des expressions de f' et de f'' et le tracé de leur graphique pour déterminer les intervalles de croissance, de décroissance et de concavité de f.

15. Nous avons envisagé, à l'exemple 4, un membre de la famille des fonctions $f(x) = \sin(x + \sin cx)$ qui joue un rôle dans la théorie des fréquences modulées (FM). Ici, nous traitons le cas où $c = 3$. Affichons d'abord le graphique dans la fenêtre $[0, \pi]$ sur $[-1{,}2; 1{,}2]$. Combien de maxima locaux distinguez-vous ? Il y en a davantage que ceux que vous voyez à l'oeil nu. Pour les découvrir il est nécessaire d'examiner très soigneusement le graphique de f'. Il est même avantageux d'y adjoindre celui de f''. Cherchez tous les maxima et minima, ainsi que les points d'inflexion. Ensuite, affichez le graphique de f dans la fenêtre $[-2\pi, 2\pi]$ sur $[-1{,}2; 1{,}2]$ et commentez la symétrie.

16. Déterminez grossièrement les coordonnées du point situé le plus à gauche de la courbe $x = t^4 - t^2$, $y = t + \ln t$. Calculez exactement ses coordonnées à l'aide du calcul différentiel.

17-18 ■ Faites tracer la courbe dans une fenêtre qui exhibe toutes ses particularités. En quels points cette courbe admet-elle une tangente horizontale ou verticale ?

17. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

18. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

19. Étudiez la famille des courbes décrite par les équations paramétriques $x = t^3 - ct, y = t^2$. Déterminez plus particulièrement les valeurs de c pour lesquelles la courbe présente une boucle et situez le point où la courbe se recoupe elle-même. Comment évolue la boucle lorsque c croît ? Calculez les coordonnées des points situés aux extrémités gauche et droite de la boucle.

20. La famille des fonctions $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, où a, b et C sont des nombres strictement positifs et $b > a$, est utilisée dans la modélisation de l'évolution, à partir d'un moment $t = 0$, de la concentration d'un produit injecté dans le sang. Dessinez quelques graphiques de cette famille. Qu'ont-ils en commun ? Pour des valeurs fixées de C et a, examinez l'évolution graphique due à des valeurs de plus en plus grandes de b. Confirmez ce que vous avez observé par une démonstration basée sur les outils offerts par le calcul différentiel.

21-25 ■ Décrivez comment varie le graphique de f lorsque c varie. Tracez plusieurs graphiques pour illustrer l'évolution observée. Soyez attentifs en particulier au déplacement des points extrêmes ainsi qu'à celui des points d'inflexion. Décelez également les valeurs charnières de c en lesquelles l'allure générale de la courbe change.

21. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

22. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

23. $f(x) = e^{-c/x^2}$

24. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)^2 + cx^2}$

25. $f(x) = x^4 + cx^2$

26. Étudiez la famille des courbes d'équation $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Commencez par identifier la valeur charnière de c en laquelle le nombre de points d'inflexion change. Tracez ensuite quelques-unes des courbes pour vous faire une idée des formes possibles. Il y a une autre valeur charnière de c en laquelle le nombre de points critiques change. Essayez de la localiser graphiquement d'abord. Justifiez ensuite cette localisation.

4.5 Les formes indéterminées et la Règle de l'Hospital

Supposons que nous ayons à étudier le comportement de la fonction

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Bien que F ne soit pas définie en $x = 1$, son comportement à proximité de 1 nous intéresse. En particulier, nous aimerions connaître la limite

1 $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

La loi 5 du calcul des limites (la limite d'un quotient est le quotient des limites) n'est pas applicable puisque la limite du dénominateur est nulle. Le problème réside dans le fait que, bien que la limite demandée existe, sa valeur n'est pas évidente parce qu'à la fois le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 et que $\frac{0}{0}$ n'est pas défini.

De façon générale, face à une limite de la forme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où $f(x) \to 0$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to a$, il se peut que cette limite existe ou au contraire n'existe pas ; une telle limite est appelée **forme indéterminée de type** $\frac{0}{0}$. Nous avons déjà rencontré quelques limites de ce type au chapitre 2. Lorsqu'il s'agissait de fonctions rationnelles, nous avons pu simplifier les facteurs communs :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Nous avons tenu un raisonnement de nature géométrique pour arriver au résultat

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Mais, pour une limite telle que (1), ces méthodes ne fonctionnent pas. Aussi, nous allons introduire une méthode systématique, connue sous le nom de Règle de l'Hospital, pour calculer les formes indéterminées.

Une autre limite non évidente intervient lors de la recherche d'une asymptote horizontale de F qui nous amène à calculer

2 $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Comme à la fois le numérateur et le dénominateur deviennent très grands lorsque $x \to \infty$, cette limite n'est pas simple à calculer. Un duel s'établit entre le numérateur et le dénominateur. Si le numérateur l'emporte, la limite du quotient sera l'infini ; si c'est le dénominateur, la réponse sera 0. Mais il peut aussi y avoir un certain compromis, auquel cas la réponse pourrait être un nombre positif fini.

De façon générale, face à une limite de la forme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

où $f(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) et $g(x) \to \infty$ (ou $-\infty$) quand $x \to a$, il se peut que cette limite existe ou au contraire qu'elle n'existe pas ; une telle limite est appelée **forme indéterminée de type** ∞/∞. Nous avons vu dans la section 2.5 qu'une limite de ce type peut être calculée pour certaines fonctions, y compris les fonctions rationnelles, en divisant numérateur et dénominateur par la plus haute puissance de x qui y intervient. Par exemple,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Cette méthode ne fonctionne cependant pas pour une limite telle que (2) et la Règle de l'Hospital s'applique aussi à cette forme d'indétermination.

La Règle de l'Hospital tire son nom de celui d'un noble français, le marquis de l'Hospital (1661-1704) alors qu'elle a été découverte par un mathématicien suisse, John Bernoulli (1667-1748). Voyez à l'exercice 49 l'exemple dont le marquis s'est servi pour illustrer cette règle.

Règle de l'Hospital Supposons que f et g soient dérivables et que $g'(x) \neq 0$ près de a (sauf peut-être en a). Supposons aussi que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

ou que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

(En d'autres mots, nous avons affaire à une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.) Alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si la limite du membre de droite existe (ou est égale à ∞ ou $-\infty$).

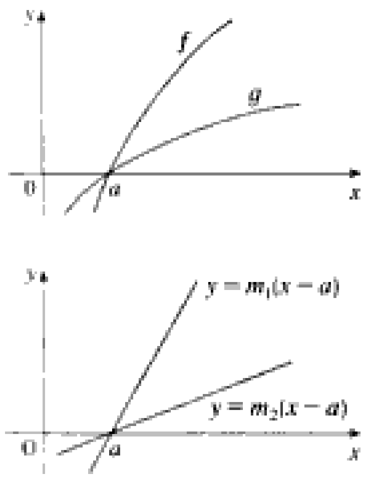


FIGURE 1

La figure 1 tente de montrer graphiquement pourquoi la Règle de l'Hospital est correcte. Le premier graphique est celui de deux fonctions dérivables f et g qui toutes deux tendent vers 0 lorsque x tend vers a. Si on regarde de très près les courbes au voisinage du point $(a, 0)$, elles semblent presque rectilignes. Si les fonctions étaient réellement du premier degré, comme c'est le cas dans le second graphique, leur rapport serait égal à

$$\frac{m_1(x-a)}{m_2(x-a)} = \frac{m_1}{m_2},$$

ce qui est bien le rapport de leurs dérivées. Voilà qui laisse penser que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

REMARQUE 1 ● La Règle de l'Hospital stipule que la limite d'un quotient de fonctions est égale à la limite du quotient des fonctions dérivées pourvu que les conditions données soient remplies. Il est particulièrement important de vérifier les conditions relatives aux limites de f et g avant d'appliquer la Règle de l'Hospital.

REMARQUE 2 ● La Règle de l'Hospital est aussi valable pour des limites unilatères ou pour des limites vers plus l'infini ou moins l'infini ; autrement dit, « $x \to a$ » peut être remplacé par l'un ou l'autre des symboles $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$.

REMARQUE 3 ● Dans le cas particulier où $f(a) = g(a) = 0$, où f' et g' sont continues et où $g'(a) \neq 0$, il est facile de voir que la Règle de l'Hospital est correcte. Il suffit en effet de se servir de la forme alternative de la définition d'une dérivée :

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

La démonstration générale de la Règle de l'Hospital est plus difficile et ne se trouve que dans des livres plus avancés.

EXEMPLE 1 ■ Calculez $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$.

SOLUTION Comme

$$\lim_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1}(x-1) = 0,$$

on peut appliquer la Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$$

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$.

SOLUTION Comme $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ et $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, la Règle de l'Hospital donne :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}.$$

Mais comme $e^x \to \infty$ et $2x \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, le membre de droite constitue à nouveau une forme indéterminée à laquelle on applique une nouvelle fois la Règle de l'Hospital. Cela donne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

La figure 2 exhibe le graphique de la fonction de l'exemple 2. Comme il a été observé précédemment que la fonction exponentielle croît plus rapidement que n'importe quelle fonction puissance, le résultat de l'exemple 2 n'a rien de surprenant. Voyez aussi l'exercice 45.

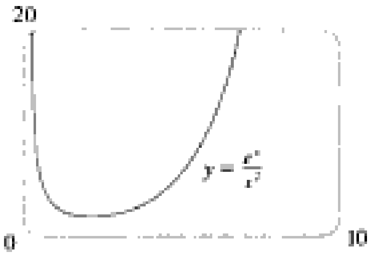


FIGURE 2

EXEMPLE 3 ■ Calculez $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUTION Comme $\ln x \to \infty$ et $\sqrt[3]{x} \to \infty$ lorsque $x \to \infty$, la Règle de l'Hospital est d'application :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}.$$

La limite du membre de droite est maintenant de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais au lieu d'appliquer une seconde fois la Règle de l'Hospital, comme on l'a fait dans l'exemple 2, on préfère ici simplifier l'expression et constater ainsi qu'une deuxième application n'est pas nécessaire :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0.$$

Le graphique de la figure 3 est celui de la fonction de l'exemple 3. La très faible croissance du logarithme que nous avons constatée précédemment fait qu'il n'est pas surprenant que ce quotient tende vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Voyez aussi l'exercice 46.

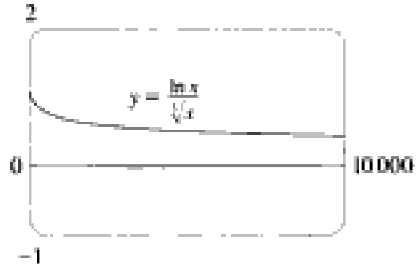


FIGURE 3

EXEMPLE 4 ■ Calculez $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. (Voyez l'exercice 18 de la section 2.2.)

Le graphique de la figure 4 confirme visuellement le résultat de l'exemple 4. Il ne faut cependant pas regarder de trop près sous peine de voir apparaître un graphique erroné parce que $\operatorname{tg} x$ est proche de x lorsque x est petit. Voyez l'exercice 18(d) dans la section 2.2.

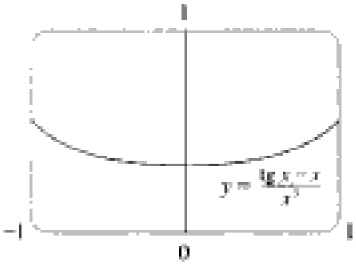


FIGURE 4

SOLUTION Vu que $\operatorname{tg} x - x \to 0$ et $x^3 \to 0$ quand $x \to 0$, nous recourons à la Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}.$$

Cette fois, la limite du membre de droite est de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Aussi, nous appliquons une deuxième fois la Règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}.$$

Comme numérateur et dénominateur tendent vers 0 lorsque x tend vers 0, une nouvelle application de la Règle de l'Hospital s'impose. Les étapes s'enchaînent ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2\sec^4 x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

SOLUTION Si, aveuglément, nous employons la Règle de l'Hospital, nous obtenons

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{\sin x} = -\infty.$$

C'est *faux*. S'il est vrai que le numérateur $\sin x$ tend vers 0 lorsque x tend vers π^-, ce n'est pas le cas du dénominateur. Aussi la Règle de l'Hospital ne peut pas être appliquée ici.

La limite demandée est en fait très simple à trouver puisque la fonction est continue et le dénominateur non nul en π :

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\sin\pi}{1-\cos\pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0.$$

L'exemple 5 montre comment on peut se tromper si on applique la Règle de l'Hospital sans réfléchir. D'autres méthodes que la Règle de l'Hospital permettent de calculer certaines limites plus simplement (voyez les exemples 3 et 5 de la section 2.3, l'exemple 5 de la section 2.5 et la discussion du début de cette section). Aussi, lorsque vous avez à calculer une limite, prenez la peine d'envisager d'autres méthodes avant de penser à la Règle de l'Hospital.

Produits indéterminés

Au cas où $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$) la limite du produit $f(x)g(x)$, si elle existe, n'est pas évidente. Un duel s'établit entre les deux facteurs. Si f l'emporte, la limite du produit sera 0 ; si c'est g, la réponse sera ∞ (ou $-\infty$). Mais il peut aussi y avoir un certain compromis, auquel cas la réponse est un nombre non nul fini. Une telle limite est appelée une **forme indéterminée du type** $0 \cdot \infty$. On peut la traiter en écrivant le produit sous la forme d'un quotient

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{ou} \qquad fg = \frac{g}{1/f},$$

de sorte que la limite donnée se présente maintenant sous la forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞ à laquelle s'applique la Règle de l'Hospital.

EXEMPLE 6 ■ Calculez $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$. Grâce à cette limite et aux indications fournies par la dérivée, tracez le graphique de la courbe $y = x \ln x$.

SOLUTION Lorsque $x \to 0^+$, le premier facteur tend vers 0 tandis que le second tend vers $-\infty$. La limite de ce produit constitue donc bien une indétermination du type $0 \cdot \infty$. On écrit $x = 1/(1/x)$ de sorte que $1/x \to \infty$ lorsque $x \to 0^+$. Les conditions d'application de la Règle de l'Hospital sont remplies :

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

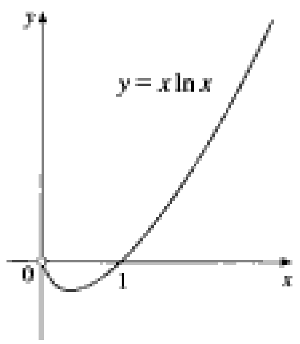


FIGURE 5

L'expression de la dérivée de $f(x) = x \ln x$ est

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Elle est nulle lorsque $\ln x = -1$ ou $x = e^{-1}$. Comme $f'(x) > 0$ pour $x > e^{-1}$ et $f'(x) < 0$ pour $x < e^{-1}$, f est croissante sur $]1/e, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1/e[$. Par conséquent, d'après le Test de la dérivée première, le point $f(1/e) = -1/e$ est un minimum local (et absolu). De plus, $f''(x) = 1/x > 0$ et donc la courbe tourne sa concavité vers le haut sur $]0, +\infty[$. La traduction géométrique de ces éléments jointe au résultat particulier $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ conduit au graphique de la figure 5. □

■ Différences indéterminées

Au cas où $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, alors la limite

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$$

constitue une **forme indéterminée du type** $\infty - \infty$. À nouveau, f et g s'affrontent. La réponse est-elle $+\infty$ (f gagne), $-\infty$ (g gagne) ou y a-t-il un accord sur un nombre fini ? Pour en sortir, nous essayons de transformer la différence en un quotient (par exemple, en utilisant un dénominateur commun, ou en rendant rationnel, ou par mise en évidence d'un facteur commun) de manière à ramener cette différence à une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ ou ∞/∞.

EXEMPLE 7 ■ Calculez $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x)$.

SOLUTION Cette limite est bien une forme indéterminée du type $\infty - \infty$ puisque $\sec x \to \infty$ et $\operatorname{tg} x \to \infty$ lorsque $x \to (\pi/2)^-$. La transformation utilisée ici s'appuie sur le dénominateur commun :

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \operatorname{tg} x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

Remarquez que la Règle de l'Hospital est appliquée au quotient dont le numérateur $1 - \sin x$ et le dénominateur $\cos x$ tendent vers 0 lorsque $x \to (\pi/2)^-$. ■

■ Puissances indéterminées

Diverses formes indéterminées surgissent à l'occasion de la limite

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}.$$

1.	$\lim_{x\to a} f(x) = 0$	et	$\lim_{x\to a} g(x) = 0$	type 0^0
2.	$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$	et	$\lim_{x\to a} g(x) = 0$	type ∞^0
3.	$\lim_{x\to a} f(x) = 1$	et	$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$	type 1^∞

Ces trois cas peuvent être traités, soit en prenant le logarithme:

$$\text{si } y = [f(x)]^{g(x)}, \text{ alors } \ln y = g(x)\ln f(x),$$

soit en écrivant la fonction sous forme d'une exponentielle:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

(Ces deux façons de faire ne sont pas nouvelles, elles sont déjà apparues lors du calcul de la dérivée des fonctions de ce type). Dans l'un et l'autre cas, on est amené au produit indéterminé $g(x)\ln f(x)$ de la forme $0 \cdot \infty$.

EXEMPLE 8 ■ Calculez $\lim_{x\to 0^+}(1 + \sin 4x)^{\operatorname{cotg} x}$.

SOLUTION Remarquons pour commencer que nous avons affaire à une forme indéterminée parce que $1 + \sin 4x \to 1$ et $\operatorname{cotg} x \to \infty$ lorsque $x \to 0^+$. Posons

$$y = (1 + \sin 4x)^{\operatorname{cotg} x}.$$

De là, $\ln y = \ln[(1 + \sin 4x)^{\operatorname{cotg} x}] = \operatorname{cotg} x \ln(1 + \sin 4x)$, et, par la Règle de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1 + \sin 4x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{4\cos 4x}{1 + \sin 4x}}{\sec^2 x} = 4.$$

La limite que nous venons de calculer est celle de $\ln y$. Celle de y se calcule aisément si on pense à utiliser la relation $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4.$$

La figure 6 présente le graphique de la fonction $y = x^x, x > 0$. Remarquez que, bien que 0^0 ne soit pas défini, les valeurs de la fonction sont proches de 1 quand $x \to 0^+$. Voilà qui confirme le résultat de l'exemple 9.

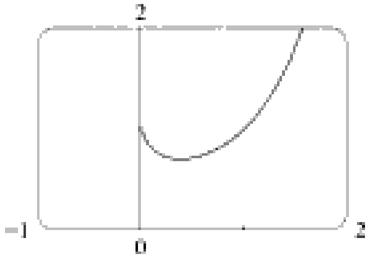


FIGURE 6

EXEMPLE 9 ■ Calculez $\lim_{x\to 0^+} x^x$.

SOLUTION On note d'abord que cette limite est une forme indéterminée puisque $0^x = 0$ quel que soit $x > 0$, mais que $x^0 = 1$ pour tout $x \neq 0$. On peut procéder comme à l'exemple 8 ou écrire la fonction sous forme d'une exponentielle :

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}.$$

À l'exemple 6, on a obtenu, par la Règle de l'Hospital, que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

4.5 Exercices

1-30 ■ Calculez la limite. Servez-vous de la Règle de l'Hospital quand elle convient. Mais s'il y a une méthode plus élémentaire, donnez-lui la priorité. Au cas où la Règle de l'Hospital ne s'applique pas, expliquez pourquoi.

1. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^a-1}{x^b-1}$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$

5. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x+\sin x}$

6. $\lim_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

7. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^3}$

8. $\lim_{x\to 0}\dfrac{6^x-2^x}{x}$

9. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

10. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

11. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\ln\ln x}{\sqrt{x}}$

12. $\lim_{x\to \infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{5x}$

13. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Arctg}(2x)}{3x}$

14. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x}$

15. $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\ln x$

16. $\lim_{x\to -\infty} xe^x$

17. $\lim_{x\to \infty} e^{-x}\ln x$

18. $\lim_{x\to (\pi/2)^-}\sec 7x\cos 3x$

19. $\lim_{x\to \infty} x^3e^{-x^2}$

20. $\lim_{x\to \pi}(x-\pi)\operatorname{cotg} x$

21. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{cosec} x\right)$

22. $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x-\operatorname{cotg} x)$

23. $\lim_{x\to \infty}(xe^{1/x}-x)$

24. $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

25. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

26. $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

27. $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

28. $\lim_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

29. $\lim_{x\to 0^+}(-\ln x)^x$

30. $\lim_{x\to \infty}(e^x+x)^{1/x}$

31-32 ■ Lisez sur le graphique une valeur approximative de la limite. Ensuite, calculez-en la valeur exacte par la Règle de l'Hospital.

31. $\lim_{x\to \infty} x[\ln(x+5)-\ln x]$ **32.** $\lim_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

33-34 ■ Afin d'illustrer graphiquement la Règle de l'Hospital, tracez $f(x)/g(x)$ et $f'(x)/g'(x)$ au voisinage de 0 et observez que ces quotients ont la même limite lorsque $x \to 0$. Calculez également la valeur exacte de cette limite commune.

33. $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x^3 + 4x$

34. $f(x) = 2x\sin x$, $g(x) = \sec x - 1$

35-38 ■ Déterminez les asymptotes de f à l'aide de la Règle de l'Hospital. Servez-vous en ainsi que des informations fournies par f' et f'' pour dessiner le graphique de f. Vérifiez votre travail en faisant tracer le graphique par le logiciel adéquat.

35. $f(x) = xe^{-x}$

36. $f(x) = e^x/x$

37. $f(x) = (\ln x)/x$

38. $f(x) = xe^{-x^2}$

39-40 ■
a) Faites tracer la courbe représentative de la fonction.
b) Employez la Règle de l'Hospital pour expliquer le comportement lorsque $x \to 0$.
c) Estimez la valeur minimale et déterminez approximativement les intervalles de concavité. Ensuite, grâce au calcul différentiel, calculez les valeurs exactes.

39. $f(x) = x^2 \ln x$ **40.** $f(x) = xe^{1/x}$

41-42 ■
a) Faites tracer la courbe représentative de la fonction.
b) Éclaircissez l'allure du graphique en calculant la limite lorsque $x \to 0^+$ ou lorsque $x \to \infty$.
c) Localisez grossièrement les valeurs extrêmes et calculez ensuite leurs coordonnées exactes à l'aide du calcul différentiel.
d) Lisez sur le graphique de f'' l'abscisse des points d'inflexion de f.

41. $f(x) = x^{1/x}$ **42.** $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$

43. Étudiez la famille des courbes données par $f(x) = xe^{-cx}$, où c est un nombre réel. Commencez par calculer les limites pour x tendant vers $\pm\infty$. Repérez les valeurs charnières de c en lesquelles la courbe change globalement de forme. Que se passe-t-il pour les points de maximum, de minimum et d'inflexion en fonction des valeurs de c ? Illustrez en présentant quelques-unes des courbes de cette famille.

44. Étudiez la famille des courbes données par $f(x) = x^n e^{-x}$, où n est un entier positif. Quelles sont les caractéristiques communes de ces courbes ? Qu'est-ce qui les distingue ? Plus particulièrement, comment évoluent les points de maximum, de minimum et d'inflexion lorsque n croît ? Illustrez en présentant quelques-unes des courbes de cette famille.

45. Démontrez que
$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$
quel que soit l'entier n. Ce résultat souligne que la fonction exponentielle gagne l'infini plus vite que n'importe quelle puissance de x.

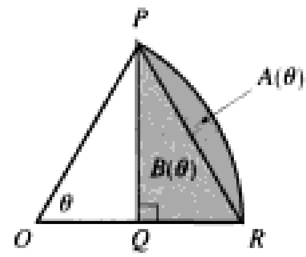
46. Démontrez que
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$
quel que soit le nombre $p > 0$. Ce résultat souligne que la fonction logarithme gagne l'infini plus lentement que n'importe quelle puissance de x.

47. Lorsqu'une somme d'argent A_0 est placée au taux i composé n fois par an, elle devient, après t années
$$A = A_0\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}.$$
On parle d'intérêt *composé en continu* si l'on fait tendre n vers l'infini. Démontrez, en recourant à la Règle de l'Hospital, que si l'intérêt est composé en continu le capital après t années s'élève à
$$A = A_0 e^{it}.$$

48. Voici la formule qui permet de calculer la vitesse v après t secondes d'un objet de masse m lorsqu'il est lâché d'une position de repos, compte tenu de la résistance de l'air,
$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m}),$$
où g est l'accélération due à la pesanteur et c une constante positive. (Au chapitre 7, nous verrons comment cette formule est déduite de l'hypothèse que la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse de l'objet).
a) Calculez $\lim_{t \to \infty} v$. Interprétez cette limite.
b) En supposant t fixé, calculez $\lim_{m \to \infty} v$ à l'aide de la Règle de l'Hospital. Quelle conclusion sur la vitesse de la chute d'un objet très lourd en tirez-vous ?

49. La Règle de l'Hospital est attestée par écrit pour la première fois dans le traité *Analyse des infiniment petits* que le marquis de l'Hospital publia en 1696. Il s'agit du premier livre d'analyse jamais publié et l'exemple que le marquis y présente pour illustrer cette règle est le calcul de la limite de la fonction
$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$
lorsque x tend vers a ($a > 0$). (À cette époque, il était courant d'écrire aa plutôt qur a^2.) Résolvez ce problème.

50. La figure montre un secteur d'angle au centre θ. L'aire du segment compris entre l'arc PR et la corde PR est désignée par $A(\theta)$. L'aire du triangle PQR est notée $B(\theta)$. Calculez $\lim_{\theta \to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



51. Démontrez par la Règle de l'Hospital que, si f' est continue,
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$
Illustrez graphiquement la signification de cette limite.

52. Soit
$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
a) Montrez que f est continue en 0.
b) Essayez, par des zooms successifs sur le point $(0, 1)$ du graphique de f, de savoir si f est dérivable en 0.
c) Démontrez que f n'est pas dérivable en 0. Comment accorder ce résultat avec l'allure des graphiques de la partie b) ?

Sujet de rédaction

Les origines de la Règle de l'Hospital

La Règle de l'Hospital fut publiée pour la première fois en 1696 dans le livre d'analyse du Marquis de l'Hospital intitulé *Analyse des Infiniment Petits*, alors qu'elle avait été découverte par le mathématicien suisse John Bernoulli en 1694. Cela s'explique lorsqu'on sait que les deux mathématiciens avaient conclu un curieux accord selon lequel le Marquis de l'Hospital rachetait à Bernoulli les droits de ses découvertes mathématiques. Le livre de Eves [1] rapporte les détails de cet arrangement, y compris une traduction de la lettre que l'Hospital adressa à Bernoulli à ce propos.

Écrivez un texte sur les origines mathématiques et historiques de la Règle de l'Hospital, en commençant par une brève biographie des deux hommes (le dictionnaire de Gillipsie [2] est une bonne source à cet égard) et par les grandes lignes du marché qu'ils conclurent. Exposez ensuite comment il a établi sa règle, tel que le rapporte le livre de Struik [4] et plus brièvement le livre de Katz [3]. Remarquez que l'Hospital et Bernoulli formulèrent la règle géométriquement et donnèrent la réponse en termes de différentielles. Comparez leur énoncé avec la version de la Règle de l'Hospital donnée à la section 4.5 et montrez que pour l'essentiel ces deux énoncés sont équivalents.

1. Howard Eves, *In Mathematical Circles (Volume 2 ; Quadrants III et IV)*. Boston, Prindle, Weber et Schmidt, 1969, p. 20-22.
2. C. C. Gillipsie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, New York : Scribner's, 1974. Voyez aussi l'article sur John Bernoulli de E. A. Fellmann et J. O. Fleckenstein dans le volume II et l'article sur le Marquis de l'Hospital de Abraham Robinson dans le volume VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics : An Introduction*, New York : Harper-Collins, 1993, p 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, NJ : Princeton University Press, 1969, p.315-316.

4.6 Problèmes d'optimisation

Les méthodes étudiées dans ce chapitre pour déterminer des valeurs extrêmes trouvent des applications dans beaucoup de domaines de la vie courante. Un chef d'entreprise souhaite minimiser ses coûts ou maximiser ses profits. Le principe de Fermat en optique établit que la lumière suit toujours le chemin qui prend le moins de temps. Dans cette section et dans la suivante, nous allons résoudre des problèmes où il faut maximiser des aires, des volumes et des profits et minimiser des distances, des temps et des coûts.

Dans la résolution de ces problèmes appliqués, la plus grande difficulté réside souvent dans la conversion de l'énoncé verbal du problème en un problème d'optimisation mathématique exprimé par une fonction à maximiser ou minimiser. Il est bon de rappeler ici les principes de la résolution de problèmes tels qu'ils ont été cités à la page 87 et de les adapter à cette situation :

ÉTAPES DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES D'OPTIMISATION

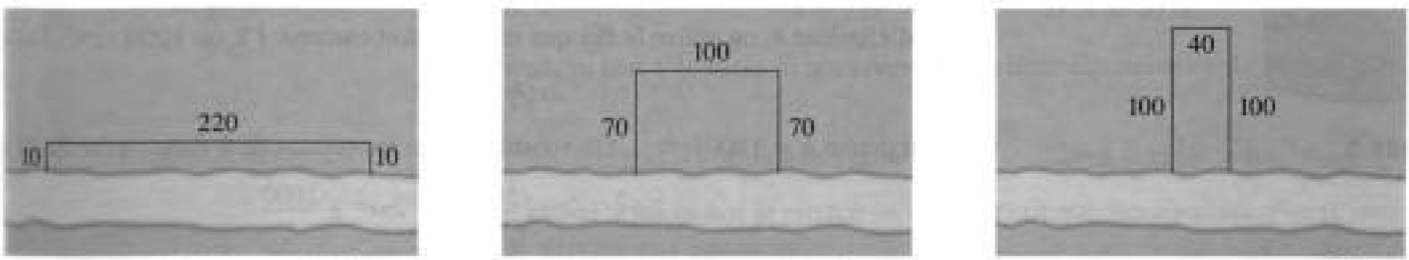
1. **Comprendre le problème** La première tâche est de lire soigneusement l'énoncé jusqu'à ce qu'il soit clairement compris. Demandez-vous : Quelle est l'inconnue ? Quelles sont les données ? Quelles sont les conditions imposées ?

2. **Faire un croquis** Dans la plupart des problèmes il est utile de faire un croquis et d'y distinguer les données et les grandeurs cherchées.
3. **Introduire des notations** Attribuer une lettre à la grandeur à maximiser ou minimiser (appelons-la Q pour le moment). Choisir également des symboles $(a, b, c, \ldots, x, y)$ pour les autres quantités inconnues et attacher ces symboles aux éléments correspondants du croquis. Il est souhaitable de retenir les initiales qui rappellent les grandeurs— par exemple, A pour une aire, h pour une hauteur, t pour le temps.
4. Chercher l'expression de Q en fonction de certaines des autres variables identifiées à l'étape 3.
5. Si l'expression de Q établie à l'étape 4 fait intervenir plus d'une variable, chercher dans l'information reçue la relation (sous forme d'équations) qui lie ces variables. Introduire ces équations de manière à éliminer toutes les variables, sauf une, dans l'expression de Q. C'est ainsi que Q n'est plus exprimée qu'en fonction d'une seule variable, mettons x. Déterminer le domaine de définition de cette variable.
6. Mettre en oeuvre les méthodes des sections 4.2 et 4.3 pour trouver le maximum ou le minimum *absolu* de f. En particulier, si le domaine de définition est un intervalle fermé, c'est la Méthode de l'intervalle fermé de la section 4.2 qui s'impose.

EXEMPLE 1 ■ Un fermier dispose de 240 m de treillis et souhaite clôturer une portion rectangulaire d'un champ qui jouxte un ruisseau, dont le cours est rectiligne sur le tronçon concerné. Il n'a donc pas besoin de treillis de ce côté-là. Quelles sont les dimensions de la portion de plus grande aire qu'il puisse ainsi fermer ?

■ Comprendre le problème
■ Analogie : Essayer des cas particuliers
■ Faire un croquis

SOLUTION Pour mieux sentir le problème posé, essayons quelques cas particuliers. La figure 1 (pas à l'échelle) propose trois façons de disposer le treillis de 240 m. Nous observons qu'un rectangle large et peu profond ou un rectangle étroit et profond offre une aire assez faible et nous pressentons qu'entre ces deux formes il doit en exister une qui présente l'aire la plus grande.



Aire = 10 · 220 = 2 200 m^2 Aire = 70 · 100 = 7 000 m^2 Aire = 100 · 40 = 4 000 m^2

FIGURE 1

■ Introduire des notations

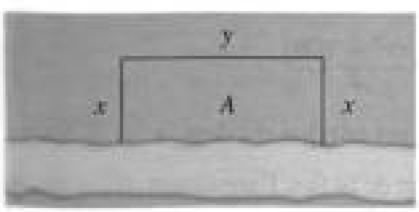


FIGURE 2

La figure 2 présente une configuration générale. Nous avons à maximiser l'aire A du rectangle dont la longueur x et la largeur y sont mesurées en mètres. L'expression de A en fonction de x et y est

$$A = xy.$$

Désireux d'avoir une expression de A qui ne contienne qu'une seule variable, nous éliminons y grâce à l'information donnée sur la longueur totale du treillis, à savoir

$$2x + y = 240.$$

De cette équation, nous tirons $y = 240 - 2x$ et nous substituons dans l'expression de A :

$$A = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2.$$

Remarquons que $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 120$ (sinon $A < 0$). Finalement, la fonction à maximiser est

$$A(x) = 240x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 120.$$

Comme la dérivée est $A'(x) = 240 - 4x$, les points critiques sont les solutions de l'équation

$$240 - 4x = 0,$$

soit $x = 60$. La valeur maximale de A se produit soit en ce point critique, soit aux extrémités de l'intervalle. Or, $A(0) = 0$, $A(60) = 7200$ et $A(120) = 0$. La Méthode de l'intervalle fermé conduit à conclure que $A(60) = 7200$ est la valeur maximale.

[Ou bien, vu que $A''(x) = -4 < 0$ quel que soit x, A est toujours concave et son maximum local $x = 60$ est forcément un maximum absolu.]

La portion de champ clôturée va mesurer 60 m de profondeur et 120 m de largeur.

EXEMPLE 2 ■ Dans un projet de fabrication d'un bidon destiné à contenir un litre d'huile, on se demande quelles sont les dimensions qui réduiront au maximum la dépense en métal ?

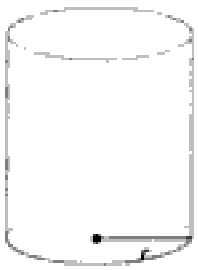


FIGURE 3

SOLUTION On fait le croquis d'un bidon, comme à la figure 3, où le rayon de la base est désigné par r et la hauteur par h, tous deux mesurés en centimètres. Le coût du métal sera minimum si la surface totale du bidon cylindrique est minimale (base, couvercle et surface latérale) :

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Afin d'éliminer h, on utilise le fait que le bidon doit contenir 1 L ou 1000 cm^3. Donc

$$\pi r^2 h = 1000,$$

ce qui donne $h = 1000/(\pi r^2)$. On substitue cette expression de h dans celle de A :

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

La fonction à rendre minimale est donc

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0.$$

En vue de déterminer les points critiques, on calcule la dérivée

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}.$$

Dès lors, $A'(r) = 0$ quand $\pi r^3 = 500$. Le seul point critique est donc $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Le domaine de définition de A est $]0, +\infty[$ et de ce fait, l'argument de l'exemple 1 à propos des extrémités ne convient plus ici. Mais on constate que $A'(r) < 0$ pour $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ et $A'(r) > 0$ pour $r > \sqrt[3]{500/\pi}$. Par conséquent, A décroît pour *tout* r à

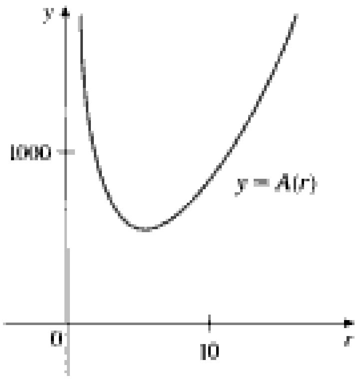


FIGURE 4

gauche du point critique et croît à droite de celui-ci. La valeur $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ donne donc lieu à un *minimum* absolu.

[Ou bien, on remarque que $A(r) \to \infty$ lorsque $r \to 0^+$ et $A(r) \to \infty$ lorsque $r \to \infty$ et donc que $A(r)$ passe forcément par un minimum qui doit se produire au point critique. Voyez la figure 4.]

La valeur de h correspondante à $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ est

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r.$$

En conclusion, le bidon le moins cher a une base de rayon $\sqrt[3]{500/\pi}$ et une hauteur double de ce rayon, c'est-à-dire égale au diamètre.

REMARQUE • 1 L'argument utilisé dans l'exemple 2 pour justifier le minimum absolu est une variante du Test de la dérivée première (qui ne concernait qu'un maximum ou un minimum local) et elle est énoncée ici dans un encadré pour en faciliter la référence ultérieurement.

Test de la dérivée première pour des valeurs extrêmes absolues On suppose que c est un point critique d'une fonction continue f définie sur un intervalle.

a) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x < c$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x > c$, alors $f(c)$ est le maximum absolu de f.

b) Si $f'(x) < 0$ pour tout $x < c$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x > c$, alors $f(c)$ est le minimum absolu de f.

REMARQUE 2 • Les problèmes d'optimisation peuvent aussi être résolus par la dérivation implicite. Pour illustrer cette méthode, reprenons l'exemple 2 et les équations qui y intervenaient

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 1000,$$

mais au lieu d'éliminer h, nous dérivons les deux équations implicitement par rapport à r :

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0.$$

Comme le minimum se produit en un point critique, nous posons $A' = 0$, simplifions et arrivons aux équations

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0.$$

Une soustraction membre à membre conduit à $2r - h = 0$ ou $h = 2r$.

EXEMPLE 3 ■ Déterminez le point de la parabole $y^2 = 2x$ le plus proche du point $(1, 4)$.

SOLUTION La distance entre le point $(1, 4)$ et un point (x, y) quelconque est donnée par la formule

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}.$$

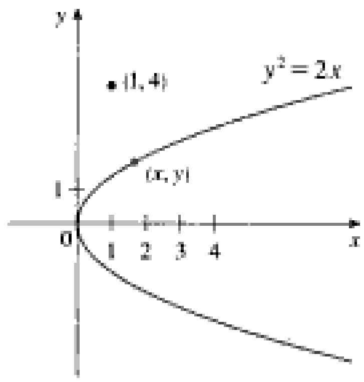


FIGURE 5

Mais si (x, y) appartient à la parabole (voyez la figure 5), alors $x = y^2/2$ et l'expression de d devient alors

$$d = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}.$$

(On aurait aussi pu remplacer y par $\sqrt{2x}$ pour avoir une expression de d qui ne dépende que de x.) Au lieu de chercher le minimum de d, on cherche le minimum de d^2 :

$$d^2 = f(y) = \left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2.$$

(À vous de vous assurer que le minimum de d a lieu au même point que le minimum de d^2, et qu'il est plus facile de travailler avec l'expression de d^2.) On calcule la dérivée

$$f'(y) = 2\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)y + 2(y-4) = y^3 - 8.$$

Par conséquent, $f'(y) = 0$ quand $y = 2$. On constate que $f'(y) < 0$ quand $y < 2$ et $f'(y) > 0$ quand $y > 2$. D'où, par le Test de la dérivée première pour des valeurs extrêmes absolues, le minimum absolu se produit quand $y = 2$. (On pourrait aussi plus naïvement admettre que vu la nature du problème il est clair qu'il y a un point le plus proche mais pas de point le plus éloigné.) L'abscisse correspondante est $x = y^2/2 = 2$. Ainsi, le point le plus proche de $(1, 4)$ sur la parabole $y^2 = 2x$ est $(2, 2)$.

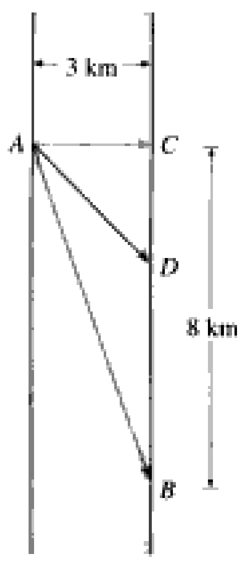


FIGURE 6

EXEMPLE 4 ■ Un homme se trouve au point A sur une rive d'un fleuve de 3 km de large et voudrait atteindre le point B sur l'autre rive, 8 km en aval, le plus rapidement possible (voyez la figure 6). Il pourrait gagner l'autre rive en C, puis aller à pied jusqu'en B, aller directement en barque jusqu'en B ou encore choisir de traverser le fleuve en direction d'un point D entre C et B et de poursuivre à pied jusqu'en B. En barque, il avance à une vitesse de 6 km/h tandis que sur la terre ferme il court à la vitesse de 8 km/h. Quelle direction va-t-il prendre pour gagner B le plus vite possible ?

SOLUTION Si on désigne par x la distance de C à D, la distance parcourue en courant est $|DB| = 8 - x$. Grâce au théorème de Pythagore, la distance parcourue à la rame mesure $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. On fait aussi l'hypothèse que la vitesse du courant est 0 km/h et que la durée du parcours est simplement le quotient entre la distance parcourue et la vitesse. Le temps passé en barque est alors $\sqrt{x^2+9}/6$ et le temps passé à courir, $(8-x)/8$. La durée totale T du trajet, en fonction de x, s'exprime comme suit :

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}.$$

Il est clair que la variable x ne peut varier qu'entre 0 et 8. Si $x = 0$, l'homme traverse directement vers C et si $x = 8$, il traverse directement vers B. La dérivée de T est donnée par

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}.$$

Comme $x \geqslant 0$, on a

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9}$$
$$\iff 16x^2 = 9(x^2+9) \iff 7x^2 = 81$$
$$\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

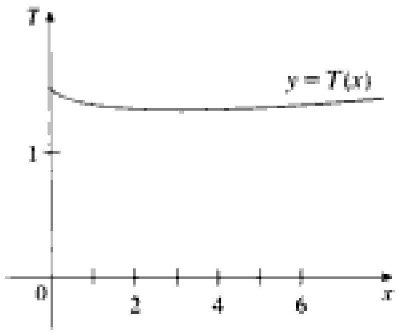


FIGURE 7

Le seul point critique est $x = 9/\sqrt{7}$. Afin de savoir si le minimum a lieu en ce point critique ou en une des extrémités du domaine de définition $[0, 8]$, on calcule T aux trois points :

$$T(0) = 1{,}5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}42.$$

C'est bien en $x = 9/\sqrt{7}$ que T prend la plus petite valeur. C'est un minimum absolu de T. Le graphique de T que montre la figure 7 confirme ces résultats numériques.

L'homme doit viser de débarquer au point situé $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$ 3,4 km) en aval de son point de départ.

EXEMPLE 5 ■ Calculez l'aire du plus grand rectangle qui puisse être inscrit dans un demi-cercle de rayon r.

SOLUTION 1 Le demi-cercle est la moitié supérieure du cercle centré à l'origine d'équation $x^2 + y^2 = r^2$. Être inscrit signifie que le rectangle doit avoir deux de ses sommets sur le demi-cercle et les deux autres sur l'axe Ox, comme sur la figure 8. Si (x, y) désigne les coordonnées du sommet situé dans le premier quadrant, les côtés du rectangle mesurent respectivement $2x$ et y et son aire

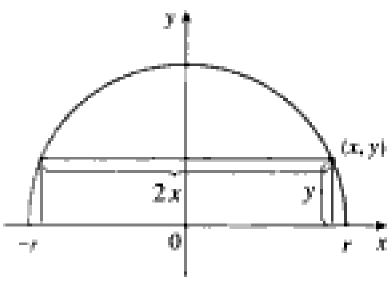


FIGURE 8

$$A = 2xy.$$

Pour éliminer y, on utilise le fait que (x, y) vérifie l'équation du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ ou $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De là,

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Le domaine de définition de cette fonction est $0 \leqslant x \leqslant r$. Sa dérivée est

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Elle s'annule quand $2x^2 = r^2$, soit $x = r/\sqrt{2}$ (puisque $x \geqslant 0$). Cette valeur de x donne lieu à un maximum pour A puisque $A(0) = 0$ et $A(r) = 0$. Finalement, l'aire du plus grand rectangle inscrit est

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2.$$

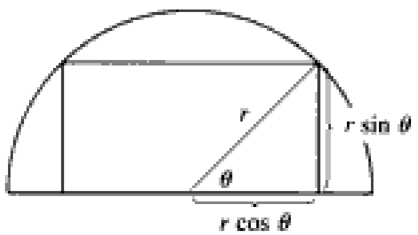


FIGURE 9

SOLUTION 2 La solution est plus simple si l'on choisit comme variable l'angle θ de la figure 9. Car alors, l'aire du rectangle est égale à

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\sin\theta) = r^2(2\sin\theta\cos\theta) = r^2\sin 2\theta.$$

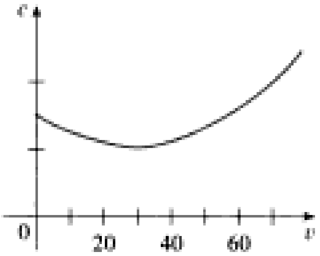
On sait que la fonction $\sin 2\theta$ atteint sa valeur maximale 1 lorsque $2\theta = \pi/2$. De là, $A(\theta)$ atteint sa valeur maximale r^2 lorsque $\theta = \pi/4$.

On peut remarquer que cette solution de nature trigonométrique n'a demandé aucun calcul de dérivée. De fait, le calcul différentiel n'a nullement été nécessaire.

4.6 Exercices

1. Un fermier, qui dispose de 750 m de grillage, a l'intention de clôturer une prairie rectangulaire qu'il va diviser en quatre enclos par des séparations parallèles à un des côtés du rectangle. Quelle est l'aire la plus grande possible des quatre enclos ?
   a) Faites quelques plans de la situation, les uns avec des enclos larges et courts, d'autres avec des enclos longs et étroits. Déterminez les aires de chacune de ces configurations. Une aire maximale se profile-t-elle ? Si oui, évaluez-la.
   b) Faites le croquis d'une situation générale. Introduisez des notations et indiquez les symboles sur le croquis.
   c) Écrivez une expression de l'aire totale.
   d) Grâce à l'information donnée, écrivez une relation qui lie les variables.
   e) Introduisez la relation de la partie d) afin d'obtenir une expression de l'aire qui ne dépende plus que d'une seule variable.
   f) Achevez la résolution du problème et comparez votre réponse avec l'estimation de la partie a).
2. On veut construire une boîte sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'un grand carton carré, de 1 m de côté, et en repliant les bords. Déterminez la boîte de plus grand volume qu'il est possible d'obtenir.
   a) Dessinez quelques boîtes possibles, certaines basses avec une grande base, d'autres très hautes avec une base petite. Une boîte de volume maximal se profile-t-elle ? Si oui, évaluez ce volume.
   b) Faites le croquis d'une situation générale. Introduisez des notations et indiquez les symboles sur le croquis.
   c) Écrivez une expression du volume.
   d) Grâce à l'information donnée, écrivez une relation qui lie les variables.
   e) Introduisez la relation de la partie d) afin d'obtenir une expression du volume qui ne dépende plus que d'une seule variable.
   f) Achevez la résolution du problème et comparez votre réponse avec l'estimation de la partie a).
3. Avec 1200 cm^2 d'un matériau, quelle est la boîte de base carrée et sans couvercle de volume maximum qu'on puisse fabriquer ?
4. Il faut fabriquer une boîte de base carrée et sans couvercle de 32 000 cm^3. Déterminez les dimensions de la boîte qui utilisera le moins possible de matériau.
5. a) Démontrez que, parmi tous les rectangles d'aire fixée, c'est le carré qui a le périmètre le plus court.
   b) Démontrez que, parmi tous les rectangles de périmètre fixé, c'est le carré qui a la plus grande aire.
6. Un conteneur rectangulaire sans couvercle peut contenir 10 m^3. La largeur de la base vaut le double de la longueur. Le matériau de la base coûte 10 euros le mètre carré et celui des parois, 6 euros le mètre carré. Quel est le coût minimum d'un tel conteneur ?
7. Quel est le point de la droite $y = 2x - 3$ le plus proche de l'origine ?
8. Déterminez les points de l'hyperbole $y^2 - x^2 = 4$ les plus proches du point $(2, 0)$.
9. Déterminez les dimensions du plus grand rectangle qui puisse être inscrit dans un cercle de rayon r.
10. Déterminez les dimensions du plus grand triangle isocèle qui puisse être inscrit dans un cercle de rayon r.
11. Déterminez l'aire du plus grand rectangle qui puisse être inscrit dans un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 3 cm et 4 cm, si deux côtés du rectangle reposent sur les côtés de l'angle droit du triangle.
12. Un cylindre circulaire droit est inscrit dans une sphère de rayon r. Déterminez le volume du plus grand de ces cylindres.
13. Une fenêtre romane a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Donc, le diamètre du cercle est égal à la largeur du rectangle. Déterminez les dimensions de la fenêtre qui laisse passer le plus de lumière, si le pourtour de la fenêtre mesure 30 m.

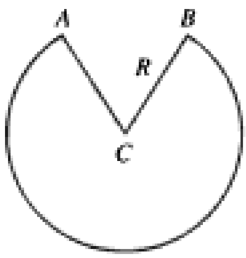
14. La courbe ci-après est celle de la consommation c de carburant d'une voiture (mesurée en litres par heure) en fonction de la vitesse v de la voiture. À des vitesses faibles, le moteur tourne un peu à vide, ce qui explique qu'au début, la consommation diminue alors que la vitesse croît. En revanche, à des vitesses élevées, la consommation augmente. On peut lire que la consommation est la plus faible pour une vitesse d'environ 30 km/h. Mais l'efficacité d'un carburant se mesure, non pas en litres par heure, mais en litres par kilomètre. Appelons G cette consommation-là. Au vu du graphique, situez la vitesse à laquelle G est minimale.



15. Un fil de fer de 10 m de long est coupé en deux. On forme un carré avec le premier morceau et un triangle équilatéral avec le deuxième. Où faut-il couper pour que l'aire totale des deux figures soit a) maximale ? b) minimale ?

16. Une clôture de 2 m de haut longe un immeuble à un 1 m de celui-ci sur toute sa longueur. Si l'on veut appuyer une échelle contre le mur de cet immeuble par dessus la clôture, de quelle longueur l'échelle doit-elle être au minimum ?

17. On forme un gobelet conique en coupant un secteur d'un carton circulaire de rayon R et en joignant les bords CA et CB. Quelle est la capacité maximale d'un tel gobelet ?



18. L'énergie que dépense, par unité de temps, un poisson qui nage à une vitesse v par rapport à l'eau est proportionnelle à v^3. Il est connu que les poissons migrateurs essaient de réduire au maximum l'énergie requise pour parcourir une distance fixée. Si le poisson nage contre un courant u ($u < v$), le temps qu'il met pour franchir une distance d est $d/(v-u)$ et, de ce fait, l'énergie E nécessaire a une expression de la forme

$$E(v) = av^3 \frac{d}{v-u},$$

où a est la constante de proportionnalité.

a) Déterminez la valeur de v qui rend E minimale.

b) Faites le graphique de E.

Remarque : Ce résultat a été vérifié expérimentalement ; les poissons migrateurs nagent contre un courant à une vitesse 50 % supérieure à la vitesse du courant.

19. Chaque alvéole d'un gâteau de cire dans une ruche a la forme d'un prisme hexagonal régulier, ouvert en façade et fermé au fond par un trièdre. Il est connu que les abeilles construisent de façon à minimiser la surface pour un volume donné, c'est-à-dire en utilisant le moins de cire possible dans la construction. L'examen de ces alvéoles montre que la mesure de l'angle apical θ est étonnamment constante. La géométrie de l'espace fournit la formule suivante pour la surface S d'une alvéole de cette forme

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \operatorname{cotg} \theta + (3s^2\sqrt{3}/2) \operatorname{cosec} \theta$$

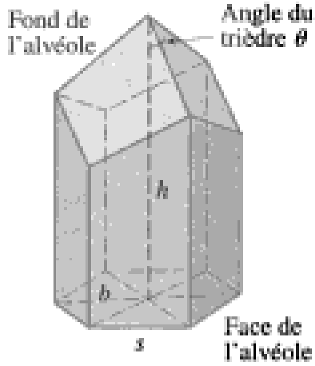
où s, le côté de l'hexagone, et h, la hauteur, sont des constantes.

a) Calculez $dS/d\theta$.

b) Quel est l'angle choisi par les abeilles ?

c) Calculez la surface minimale d'une alvéole (en fonction de s et h).

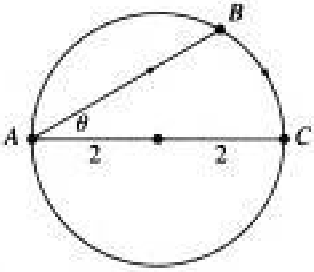
Remarque : Les angles θ ont été réellement mesurés et ils diffèrent rarement de plus de 2° de la valeur optimale calculée.



20. Un bateau quitte un quai à 14 h et se dirige vers le sud à la vitesse de 20 km/h. Un autre bateau qui voyage d'ouest en est à la vitesse de 15 km/h, atteint le quai à 15 h. À quel moment les deux bateaux étaient-ils les plus proches l'un de l'autre ?

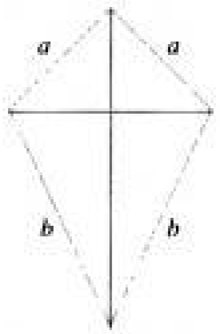
21. Lorsqu'un objet est éclairé par un projecteur, son illumination est directement proportionnelle à l'intensité de la source lumineuse, mais inversement proportionnelle au carré de la distance à laquelle il se trouve du projecteur. Imaginons que deux projecteurs, l'un trois fois plus puissant que l'autre, se trouvent à 3 m l'un de l'autre. Où se trouve le point le moins éclairé sur le segment qui joint les positions des deux projecteurs ?

22. Une dame part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé le plus rapidement possible. Elle peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h. Selon quel angle θ par rapport au diamètre doit-elle orienter sa barque ?



23. Déterminez l'équation de la droite qui, passant par le point $(3, 5)$, détache du premier quadrant une aire minimale.

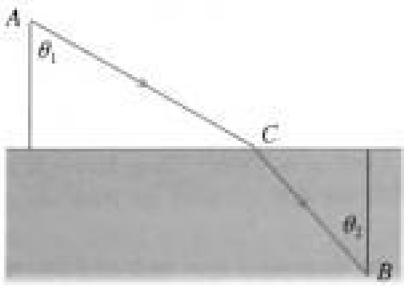
24. La structure d'un cerf-volant est faite de 6 pièces de bois. Les quatre baguettes extérieures ont les longueurs indiquées sur la figure. Comment faut-il choisir les diagonales de manière à rendre la surface du cerf-volant la plus grande possible ?



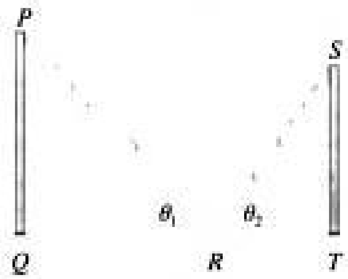
25. Désignons par v_1 la vitesse de la lumière dans l'air et par v_2, la vitesse de la lumière dans l'eau. Selon le principe de Fermat, lorqu'un rayon de lumière joint un point A dans l'air à un point B dans l'eau il suit le chemin ACB qui minimise le temps employé. Montrez que

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

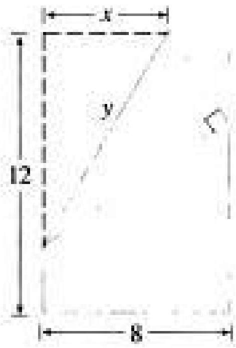
où θ_1 (l'angle d'incidence) et θ_2 (l'angle de réfraction) sont ceux indiqués sur la figure. Cette équation est connue sous le nom de **loi de Snell-Descartes**.



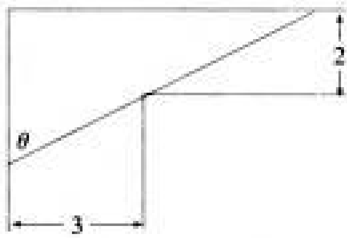
26. Deux mâts verticaux PQ et ST sont arrimés par une corde PRS qui va du sommet P du premier mât à un point R au sol et ensuite de R jusqu'au sommet du second mât (voyez la figure). Montrez que la corde est la plus courte lorsque $\theta_1 = \theta_2$.



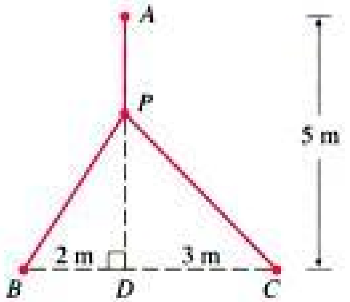
27. On plie une feuille de papier de 8 cm sur 12 en amenant le coin supérieur gauche sur le côté droit, comme le montre la figure. Quel est le pliage qui rend le pli le plus court possible ? Autrement dit, comment choisir x pour minimiser y ?



28. Un tuyau en acier est transporté dans un corridor de 3 m de large. Au bout, le corridor tourne à angle droit dans un autre, plus étroit, de 2 m de large. Quelle est la longueur du plus long tuyau qui puisse passer horizontalement par ce couloir ?

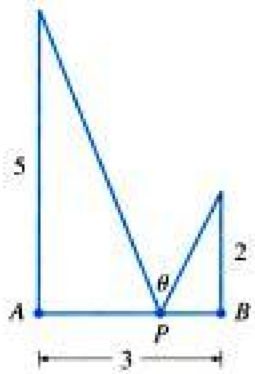


29. Un point P doit être situé quelque part sur la droite AD de façon à ce que la longueur totale L des câbles qui relient P aux points A, B et C soit la plus courte possible (voyez la figure). Exprimez L comme une fonction de $x = |AP|$ et déduisez des graphiques de L et de dL/dx la position du minimum demandé.

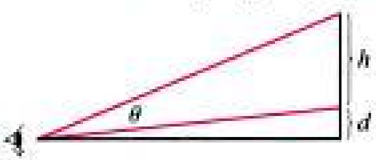


30. Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large. Comment faut-il choisir θ pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?

31. Où faut-il situer le point P pour que l'angle θ soit maximum ?



32. Un tableau de hauteur h est exposé dans une galerie d'art et le bord inférieur du cadre est à une distance d au-dessus du niveau de l'oeil du visiteur (voyez la figure). À quelle distance le visiteur doit-il se tenir pour avoir la meilleure vue ? (Autrement dit, où doit-il se mettre pour que l'angle θ d'ouverture depuis l'oeil jusqu'au tableau soit le plus grand possible ?)



33. Les ornithologues ont observé que certaines espèces d'oiseaux ont tendance à éviter de survoler de grandes étendues d'eau pendant les heures de clarté. Il est connu que survoler de l'eau requiert plus d'énergie que survoler des terres parce que généralement l'air monté des terres retombe au-dessus de l'eau pendant la journée. Un oiseau est laché d'une île située à 5 km du point le plus proche du littoral et vole jusqu'à un point C de ce littoral, supposé rectiligne, après quoi il longe le littoral jusqu'à son nid, situé en D. On suppose que l'oiseau instinctivement économise son énergie. Les points B et D sont distants de 13 km.

a) Si survoler de l'eau prend 1,4 fois plus d'énergie que survoler les terres, jusqu'à quel point C l'oiseau va-t-il voler pour minimiser l'énergie totale dépensée pour gagner son nid ?

b) Soit E_e et E_t respectivement la quantité d'énergie (en joules) par kilomètre employée pour survoler l'eau ou les terres. Que voudrait dire une grande valeur du rapport E_e/E_t en termes de trajet choisi par l'oiseau ? Une petite valeur ? Calculez la valeur de ce rapport lorsque le comportement de l'oiseau est optimal en termes d'énergie dépensée.

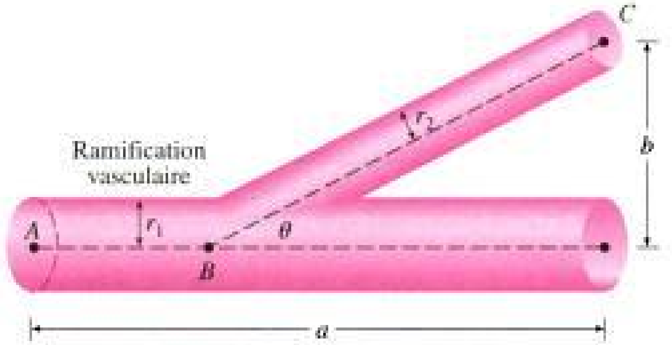
c) Quelle serait la valeur de E_e/E_t si l'oiseau volait directement vers son nid D ? Et si l'oiseau volait directement vers B et longeait ensuite le littoral jusqu'en D ?

d) Si des ornithologues observaient que certains oiseaux gagnent le littoral à 4 km de B, quelle est la proportion d'énergie supplémentaire que ces oiseaux-là emploieraient parce qu'ils survolent l'eau au lieu des terres ?

34. Le système sanguin se compose de vaisseaux sanguins (artères, artérioles, capillaires et veines) qui conduisent le sang du cœur vers les organes et puis de retour vers le cœur. Il est à souhaiter que ce système fonctionne de manière à minimiser l'énergie dépensée par le cœur qui pompe le sang. En particulier, cette énergie diminue lorsque la résistance du sang est affaiblie. Une des lois de Poiseuille donne l'expression de cette résistance R

$$R = C\frac{L}{r^4},$$

où L est la longueur du vaisseau sanguin, r son rayon et C une constante positive liée à la viscosité du sang. (Poiseuille a établi cette loi expérimentalement, mais elle découle aussi de l'équation 2 dans la section 6.6). La figure montre un vaisseau sanguin principal de rayon r_1 ramifié à un plus petit de rayon r_2 sous un angle θ.



a) Utilisez la loi de Poiseuille pour montrer que la résistance totale du sang le long du trajet ABC est donnée par

$$R = C\left(\frac{a - b \operatorname{cotg} \theta}{r_1^4} + \frac{b \operatorname{cosec} \theta}{r_2^4}\right)$$

où a et b sont les mesures indiquées sur la figure.

b) Démontrez que cette résistance est à son minimum lorsque

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}.$$

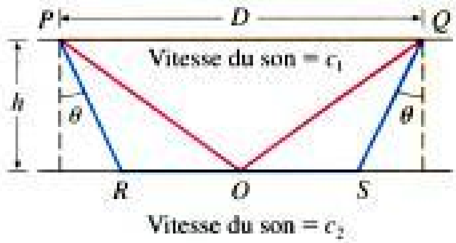
c) Déterminez l'angle optimal de branchement (au degré le plus proche) dans le cas où le rayon du vaisseau secondaire vaut les deux tiers de celui du vaisseau principal.

35. Il est possible de déterminer, par exploration sismique, les vitesses du son c_1 dans une couche supérieure et c_2 dans une couche inférieure d'une roche et l'épaisseur h de la couche supérieure, si la vitesse du son dans la couche inférieure est plus grande que dans la couche supérieure. On fait sauter une charge de dynamite en P et les signaux transmis sont recueillis en Q, situé à une distance D de P. Le premier signal qui arrive en Q s'est propagé sur la surface et a pris T_1 secondes. Le signal suivant va de P jusqu'à R, puis de R jusqu'à S dans la couche inférieure et enfin atteint Q, au bout de T_2 secondes. Le troisième signal est réfléchi sur la couche en O de RS et atteint Q en T_3 secondes.

a) Exprimez T_1, T_2 et T_3 en fonction de D, h, c_1, c_2 et θ.

b) Montrez que T_2 est un minimum quand $\sin\theta = c_1/c_2$.

c) On suppose que $D = 1$ km, $T_1 = 0{,}26$ s, $T_2 = 0{,}32$ s, $T_3 = 0{,}34$ s. Calculez c_1, c_2 et h.



Remarque : Les géophysiciens utilisent cette technique pour étudier la structure de la croûte terrestre, à la recherche de pétrole ou de failles.

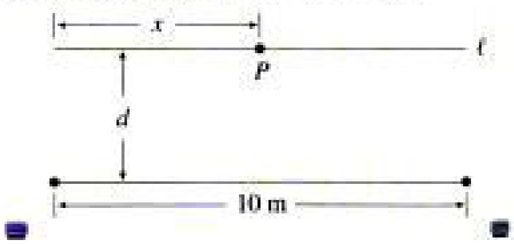
36. Deux sources lumineuses de même puissance sont à 10 m l'une de l'autre. On place un objet en P sur une droite l parallèle à la ligne qui joint les deux sources lumineuses, distante de d m (voyez la figure). On cherche l'endroit P le moins éclairé de l. On sait que l'intensité lumineuse en provenance d'une seule source est directement proportionnelle à la puissance de la source et inversement proportionnelle au carré de la distance de cette source.

a) Exprimez l'intensité $I(x)$ au point P.

b) Si $d = 5$ m, utilisez les graphiques de $I(x)$ et de $I'(x)$ pour montrer que l'intensité est moindre en $x = 5$, c'est-à-dire quand P est au milieu de l.

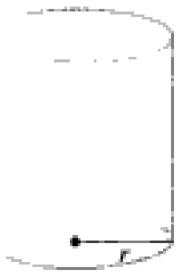
c) Si $d = 10$ cm, montrez que, de façon inattendue peut-être, ce n'est plus en ce point milieu que l'intensité lumineuse est la plus faible.

d) Quelque part entre $d = 5$ m et $d = 10$ m il y a une valeur charnière de d en laquelle le point le moins illuminé change brusquement. Estimez cette valeur de d.

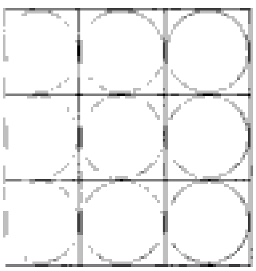


Projet appliqué

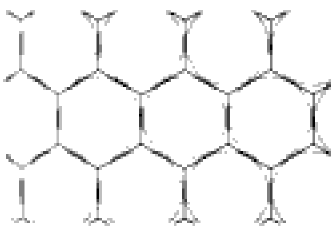
Le gabarit d'une boîte de conserve



Ce projet consiste à examiner la forme la plus économique d'une boîte à conserve. Dans un premier sens, cela pourrait vouloir dire que, le volume étant fixé, il y a moyen de déterminer le rayon r et la hauteur h qui rendent minimal le coût en quantité de matière nécessaire à la fabriquer (voyez la figure ci-contre). Si l'on néglige la partie de métal gaspillée au cours du procédé de fabrication, le problème se réduit à rendre minimale la surface du cylindre. C'est le problème posé à l'exemple 2 de la section 4.6 et la solution en était $h = 2r$, c'est-à-dire la hauteur de la boîte est égale au diamètre du disque de base. Cependant, si vous ouvrez votre armoire à provision ou si vous vous rendez dans votre supermarché avec un mètre, vous aurez tôt fait de constater que la hauteur est généralement plus grande que le diamètre et que le rapport h/r varie de 2 à environ 3,8. Essayons d'expliquer cela.



Disques inscrits dans des carrés



Disques inscrits dans des hexagones

1. Les boîtes sont fabriquées à partir de feuilles de métal. La face latérale est obtenue en enroulant un rectangle et les rectangles sont découpés avec peu ou pas de déchet dans les feuilles de métal. Par contre, les disques inférieurs et supérieurs sortent de carrés de côté $2r$ (comme dans la figure), laissant pas mal de chutes, qui peuvent être recyclées mais qui n'ont guère de valeur aux yeux des fabricants de boîtes. Montrez que la quantité de métal utilisée est moindre lorsque

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2{,}55.$$

2. Diviser les feuilles de métal en hexagones pour en extraire les couvercles et les fonds circulaires s'avère plus efficace (voyez la figure). Montrez qu'alors

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2{,}21.$$

3. Même si les valeurs de h/r obtenues aux questions 1 et 2 sont déjà plus proches de celles que l'on peut mesurer en réalité dans les rayons des épiceries, elles ne tiennent pas encore compte de tout. En regardant de près certaines boîtes, on peut remarquer que le couvercle et le fond proviennent de disques de rayon plus grands que r, qui sont repliés autour des bords de la boîte. Si on tient compte de cela, on accroît h/r. Plus significativement, en plus du coût du métal, il faut incorporer dans le prix le mode de fabrication de la boîte. On suppose que c'est l'assemblable entre la face latérale et les disques de fond qui absorbe la plus grande part du coût. En découpant les disques dans des hexagones comme expliqué dans la question 2, le coût total est proportionnel à

$$4\sqrt{3}r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h),$$

où k est un facteur de proportionnalité entre le coût de l'unité d'aire de métal et le coût de l'unité de longueur à assembler. Montrez que cette expression est minimale lorsque

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}.$$

4. Faites dessiner $\sqrt[3]{V}/k$ comme une fonction de $x = h/r$ et utilisez le graphique pour justifier que quand une boîte est grande ou que le coût des joints n'est pas cher, on a h/r approximativement égal à 2,21 (comme à la question 2). Mais quand la boîte est petite ou que le coût des joints est élevé, h/r sera beaucoup plus grand.

5. Il résulte de notre analyse que les grandes boîtes devraient être presque carrées alors que les petites boîtes devraient être hautes et étroites. Allez regarder les diverses formes des boîtes dans un supermarché. Notre conclusion correspond-elle à la réalité ? Y a-t-il des exceptions ? Pouvez-vous expliquer pourquoi les petites boîtes ne sont pas toujours hautes et étroites ?

4.7 Applications à l'économie

La notion de coût marginal a été introduite dans la section 3.3. Rappelons que si $C(x)$ désigne la **fonction de coût**, c'est-à-dire le coût de production de x unités d'un certain produit, le **coût marginal** est le taux de variation de C par rapport à x. En d'autres mots, la fonction de coût marginal est la dérivée, $C'(x)$, de la fonction de coût total.

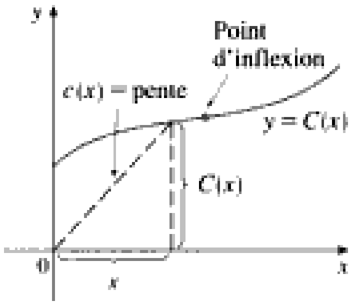


FIGURE 1
Fonction de coût total

La courbe de la figure 1 est caractéristique d'une fonction de coût total et le coût marginal $C'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe de coût total en $(x, C(x))$. Au début, la courbe de coût total est concave (le coût marginal est décroissant) à cause des économies d'échelle (dues à une meilleure répartition des coûts fixes de production). Mais ensuite, la courbe présente un point d'inflexion et tourne sa concavité vers le haut (le coût marginal est devenu croissant) à cause de coûts supplémentaires ou de l'inefficacité d'une exploitation à grande échelle.

La **fonction de coût moyen**

1
$$c(x) = \frac{C(x)}{x}$$

représente le coût total par unité produite. La figure 2 exhibe une courbe caractéristique d'un coût moyen, qui n'est autre que la pente de la droite qui relie l'origine au point $(x, C(x))$ dans la figure 1. Il semble qu'il y ait nécessairement un minimum absolu. Pour obtenir les points critiques, on dérive l'équation 1 par la Règle de dérivation du quotient :

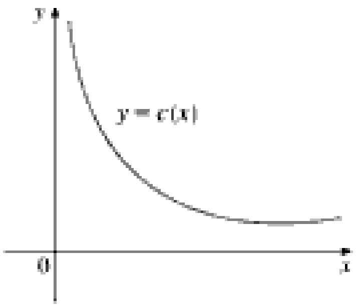


FIGURE 2
Fonction de coût moyen

$$c'(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}.$$

Cette dérivée s'annule quand $xC'(x) - C(x) = 0$, ce qui donne

$$C'(x) = \frac{C(x)}{x} = c(x).$$

Il s'ensuit que

> Là où le coût moyen atteint son minimum,
> le coût marginal = le coût moyen

Ce principe est tout à fait compréhensible : quand le coût marginal est inférieur au coût moyen, produire plus abaisse le coût moyen. De même, quand le coût marginal est supérieur au coût moyen, produire moins abaisse le coût moyen.

À l'exemple 8 de la section 3.3, on explique pourquoi il est raisonnable qu'une fonction de coût moyen soit un polynôme.

EXEMPLE 1 ■ Une firme a calculé que le coût de production (en euros) de x unités d'un produit est égal à $C(x) = 2600 + 2x + 0{,}001x^2$.

a) Calculez le coût, le coût moyen et le coût marginal de la production de 1000, 2000, 3000 unités.

b) Quel est le niveau de production qui rend le coût moyen le plus bas, et quel est ce coût moyen?

4.8 La méthode de Newton

Il vous est offert d'acheter une voiture au comptant pour 18 000 euros ou à tempérament, pour 375 euros par mois pendant 5 ans. Avant de faire votre choix, vous aimeriez connaître à quel taux mensuel correspond une telle vente à tempérament. La réponse est la solution de l'équation

1 $$48x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0.$$

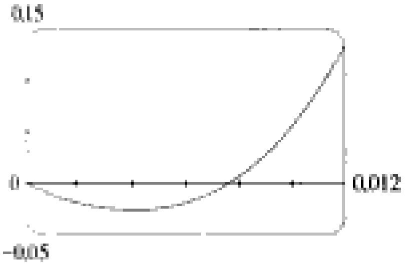


FIGURE 1

(Le chemin qui conduit à cette équation est expliqué à l'exercice 29.) Comment résoudre cette équation ?

Pour résoudre une équation du deuxième degré, il existe une formule bien connue. Pour résoudre une équation du troisième ou du quatrième degré, il existe également des formules, mais très compliquées. Et pour les équations de degré 5 ou plus, il n'y a même plus de formules (voyez la note de la page 242). Pas plus d'ailleurs que pour trouver les racines exactes des équations transcendantes telle que $\cos x = x$.

Une *solution approchée* de l'équation 1 peut être trouvée en faisant dessiner la courbe représentative du membre de gauche de l'équation. Un logiciel graphique, utilisé avec la bonne fenêtre, fournit l'image reproduite à la figure 1.

Outre la solution inintéressante $x = 0$, il y a une solution entre 0,007 et 0,008. En y regardant de plus près, la racine vaut approximativement 0,0076. Pour davantage de précision, il faut zoomer encore et encore, mais cela devient ennuyeux. Une bonne alternative est d'utiliser l'outil de calcul de racine d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul algébrique. Il est ainsi possible d'obtenir la racine, avec 9 décimales correctes, à savoir 0,007628603.

Essayez de résoudre l'équation 1 grâce à l'option racine de votre calculatrice ou au programme de calcul des racines de votre ordinateur. Certaines machines n'y réussissent pas. D'autres bien mais exigent de recevoir une valeur initiale.

Comment donc procèdent ces outils ? Diverses méthodes existent, mais la plupart d'entre eux utilisent la **méthode de Newton**, également appelée **méthode de Newton-Raphson.** Nous allons exposer comment fonctionne cette méthode, en partie pour faire voir ce qui se passe à l'intérieur d'une calculatrice ou d'un ordinateur, en partie comme application de l'idée d'approximation linéaire.

La figure 2 décrit la méthode de Newton d'un point de vue géométrique ; la racine cherchée y est notée r. La première approximation x_1 est obtenue par tâtonnement ou par estimation sur la base d'un rapide graphique de f ou encore par lecture d'un graphique de f tracé par ordinateur. La courbe $y = f(x)$ est remplacée par sa tangente L au point $(x_1, f(x_1))$ qui coupe l'axe Ox en un point noté x_2. L'idée sous-jacente à la méthode de Newton est que la tangente est proche de la courbe et donc que son intersection avec l'axe Ox, à savoir x_2, n'est pas loin de celle de la courbe avec l'axe Ox (c'est-à-dire la racine r cherchée). Et comme la tangente est une droite, il n'est pas difficile de trouver son intersection avec l'axe Ox.

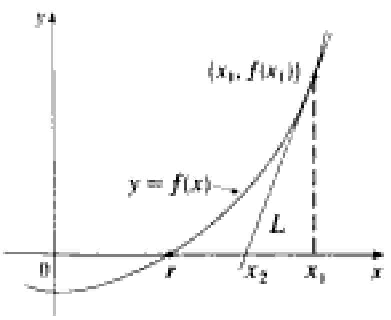


FIGURE 2

La formule qui donne x_2 à partir de x_1 découle de l'équation de la tangente L dont la pente est égale à $f'(x_1)$:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Comme cette tangente coupe l'axe Ox lorsque $y = 0$, l'abscisse x_2 du point d'intersection satisfait à l'équation :

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, il est possible de tirer une expression de x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Cette valeur sert de nouvelle approximation de r.

Le procédé se répète avec x_2 au lieu de x_1 et la tangente à la courbe en $(x_2, f(x_2))$, donnant une troisième approximation :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

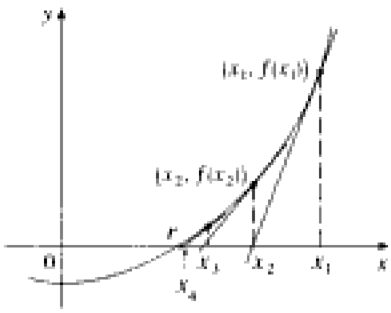


FIGURE 3

En poursuivant ce procédé, nous obtenons une suite d'approximations $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ que montre la figure 3. De façon générale, si x_n est la $n^{\text{ème}}$ approximation et si $f'(x_n) \neq 0$, alors l'approximation suivante se calcule par la formule

2
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Les suites ont été brièvement introduites dans *Un aperçu du calcul différentiel et intégral* à la page 6. Une étude plus systématique commence à la section 8.1.

Lorsque les nombres x_n deviennent arbitrairement proches de r lorsque n grandit, on dit que la suite converge vers r et on écrit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r.$$

Bien que les approximations successives tendent visiblement vers la racine dans le cas d'une fonction comme celle de la figure 3, il n'en est pas toujours ainsi. La situation présentée à la figure 4 le démontre. On peut y voir que x_2 est une moins bonne approximation que x_1. Cela risque d'être le cas quand $f'(x_1)$ est proche de 0. Il peut même arriver qu'une approximation (x_3 dans la figure 4) tombe en dehors du domaine de définition de f. La méthode de Newton échoue et l'approximation initiale doit être mieux choisie. Les exercices 21-23 fournissent des exemples de situations dans lesquelles la méthode de Newton converge très lentement ou ne converge pas du tout.

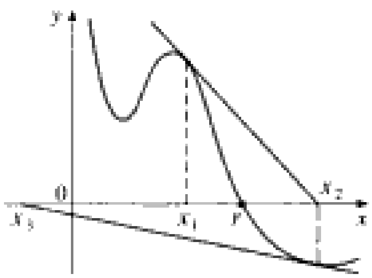


FIGURE 4

EXEMPLE 1 ■ Au départ de $x_1 = 2$, calculez la troisième approximation x_3 de la racine de l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUTION On applique la méthode de Newton à

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{et} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2.$$

C'est sur cette équation que Newton lui-même mit sa méthode à l'épreuve et il choisit $x_1 = 2$ après quelques tâtonnements parce que $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ et $f(3) = 16$. La formule 2 s'écrit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Dans le cas $n = 1$, on obtient

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

Dans le cas $n = 2$, on obtient

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2,1 - \frac{(2,1)^3 - 2(2,1) - 5}{3(2,1)^2 - 2} \approx 2,0946.$$

Il se trouve que cette troisième approximation $x_3 \approx 2,0946$ est correcte jusqu'à la quatrième décimale. □

Supposons que nous souhaitions atteindre, par la méthode de Newton, une précision fixée à 8 décimales correctes. Comment saurons-nous à quel moment il convient d'arrêter le processus ? La règle généralement utilisée est de s'arrêter dès que deux approximations successives x_n et x_{n+1} présentent les mêmes huit premières décimales. (Un exercice de la section 8.9 propose un résultat précis au sujet de l'exactitude des éléments de la suite produite par la méthode de Newton.)

Remarquez que le calcul qui fait passer de n à $n + 1$ est le même, quel que soit n. Un tel procédé est qualifié d'*itératif*. C'est pourquoi il est particulièrment facile de le faire exécuter par une calculatrice programmable ou un ordinateur.

EXEMPLE 2 ■ Calculez par la méthode de Newton la valeur exacte à 8 décimales de $\sqrt[6]{2}$.

SOLUTION Il faut avant tout se rendre compte que calculer cette valeur revient à chercher la racine de l'équation

$$x^6 - 2 = 0.$$

La méthode de Newton (formule 2) est alors mise en œuvre avec $f(x) = x^6 - 2$ et $f'(x) = 6x^5$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}.$$

En prenant $x_1 = 1$ comme première approximation, on obtient successivement

$$x_2 \approx 1,16666667$$

$$x_3 \approx 1,12644368$$

$$x_4 \approx 1,12249707$$

$$x_5 \approx 1,12246205$$

$$x_6 \approx 1,12246205$$

Comme x_5 et x_6 ont les mêmes huit décimales, on conclut que les huit premières décimales demandées sont

$$\sqrt[6]{2} \approx 1,12246205.$$ □

EXEMPLE 3 ■ Calculez la racine de l'équation $\cos x = x$ avec une précision de 6 chiffres après la virgule.

SOLUTION On commence par récrire l'équation sous la forme classique

$$\cos x - x = 0.$$

Alors, la formule 2 s'applique à $f(x) = \cos x - x$ et $f'(x) = -\sin x - 1$, ce qui donne

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1}.$$

Afin de situer grossièrement la racine, on dessine les courbes $y = \cos x$ et $y = x$ (Figure 5). Elles se coupent en un point dont l'abscisse est légèrement inférieure à 1. Au départ donc de $x_1 = 1$, on obtient successivement

$$x_2 \approx 0{,}75036387$$

$$x_3 \approx 0{,}73911289$$

$$x_4 \approx 0{,}73908513$$

$$x_5 \approx 0{,}73908513$$

Comme x_4 et x_5 ont les mêmes six décimales (même huit), on conclut que la racine de l'équation vaut, avec 6 décimales, 0,739085.

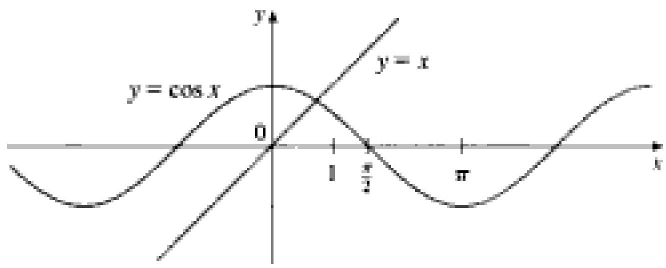


FIGURE 5

Au lieu de se baser sur l'esquisse des courbes de la figure 5 pour démarrer le processus itératif, on aurait pu les faire tracer avec plus de précision par l'outil graphique d'une calculatrice ou d'un ordinateur et choisir, comme le suggère la figure 6, $x_1 = 0{,}75$ comme première approximation. La méthode de Newton fournit alors

$$x_2 \approx 0{,}73911114$$

$$x_3 \approx 0{,}73908513$$

$$x_4 \approx 0{,}73908513$$

Le même résultat est maintenant acquis avec une itération de moins que précédemment. Il est souvent rentable de coupler ordinateur et méthode de Newton—l'outil graphique pour démarrer et la méthode de Newton pour achever.

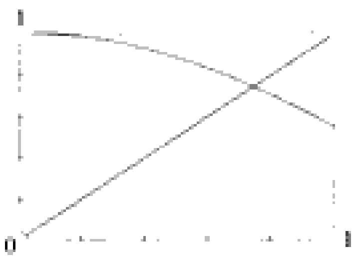
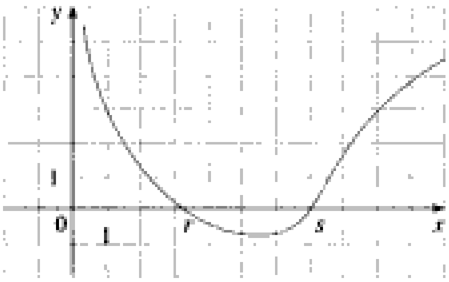


FIGURE 6

4.8 Exercices

1. Voici le graphique d'une fonction f. On décide d'appliquer la méthode de Newton pour calculer la racine r de l'équation $f(x) = 0$ en partant de $x_1 = 1$. Dessinez les tangentes qui permettent de situer x_2 et x_3 et estimez les valeurs de ces nombres.

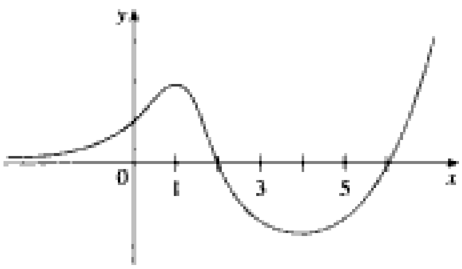


2. Suivez les instructions de l'exercice 1, mais en partant de $x_1 = 9$, pour calculer la racine s.

3. On suppose que la droite $y = 5x - 4$ est tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = 3$. Quelle est la deuxième approximation que fournit la méthode de Newton pour localiser une racine de $f(x) = 0$ au départ de $x_1 = 3$?

4. Pour chaque approximation initiale, illustrez graphiquement ce que donne l'application de la méthode de Newton au graphique de la fonction présentée ci-dessous.

a) $x_1 = 0$ b) $x_1 = 1$ c) $x_1 = 3$
d) $x_1 = 4$ e) $x_1 = 5$



5-6 ■ Pour chacune des équations et chaque valeur initiale correspondante, calculez x_3, la troisième approximation de la racine fournie par la méthode de Newton (donnez la réponse avec quatre décimales).

5. $x^3 + x + 1 = 0, \quad x_1 = -1$

6. $x^7 - 100 = 0, \quad x_1 = 2$

7-8 ■ Calculez avec 8 décimales correctes les nombres suivants par la méthode de Newton.

7. $\sqrt[4]{22}$

8. $\sqrt[10]{100}$

9-10 ■ Utilisez la méthode de Newton pour calculer une valeur approximative à 6 décimales de la racine indiquée.

9. La racine positive de $2\sin x = x$

10. La racine de $\operatorname{tg} x = x$ située dans l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$.

11-18 ■ Utilisez la méthode de Newton pour calculer toutes les racines de l'équation, avec une précision de 8 décimales. Commencez par tracer les courbes pour déterminer une première approximation.

11. $x^3 = 4x - 1$

12. $e^{-x^2} = x^2 - x$

13. $2\cos x = 2 - x$

14. $\ln(4 - x^2) = x$

15. $x^4 + 3x^3 - x - 10 = 0$

16. $x^8 - x^6 + 2x^4 + 5x - 14 = 0$

17. $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2\sin \pi x$

18. $\cos(x^2 + 1) = x^3$

19. a) Appliquez la méthode de Newton à l'équation $x^2 - a = 0$ pour retrouver l'algorithme qu'employaient déjà les Babyloniens pour calculer $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

b) Calculez par cet algorithme $\sqrt{1000}$ avec 6 décimales correctes.

20. a) Appliquez la méthode de Newton à l'équation $1/x - a = 0$ pour établir l'algorithme de calcul de l'inverse

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2.$$

(Par cet algorithme, un ordinateur calcule l'inverse d'un nombre sans réellement diviser.)

b) Calculez de cette manière le nombre 1/1,6984 avec 6 décimales correctes.

21. Expliquez pourquoi la méthode de Newton ne marche pas pour calculer la racine de l'équation $x^3 - 3x + 6 = 0$ au départ de $x_1 = 1$.

22. a) Utilisez la méthode de Newton avec $x_1 = 1$ pour trouver la racine de l'équation $x^3 - x = 1$ avec 6 chiffres exacts après la virgule.

b) Résolvez l'équation de la partie a) en prenant $x_1 = 0{,}6$ comme approximation initiale.

c) Résolvez l'équation de la partie a) en prenant $x_1 = 0{,}57$ comme approximation initiale. (Vous ne pouvez plus vous passer d'une calculatrice programmable, cette fois)

d) Tracez le graphique de $f(x) = x^3 - x - 1$ et ses tangentes en $x_1 = 1$, 0,6 et 0,57 afin de découvrir les raisons pour lesquelles la méthode de Newton est aussi sensible à la valeur initiale x_1.

23. Expliquez pourquoi la méthode de Newton échoue lorsqu'elle est appliquée à l'équation $\sqrt[3]{x} = 0$, quel que soit le x_1 initial non nul. Accompagnez votre explication d'un croquis.

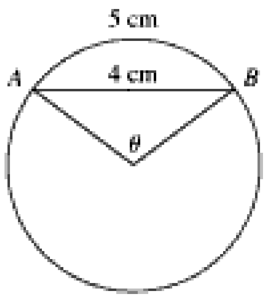
24. Utilisez la méthode de Newton pour trouver la valeur minimale absolue de la fonction $f(x) = x^2 + \sin x$ avec une précision de 4 décimales.

25. Utilisez la méthode de Newton pour déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe $y = e^{\cos x}$ avec une précision de 6 décimales.

26. Parmi l'infinité de droites qui passent par l'origine et sont tangentes à la courbe $y = -\sin x$, il y en a une dont la pente est plus raide que celle de toutes les autres. Utilisez la méthode de Newton pour déterminer la pente de cette tangente avec 6 décimales.

27. Un silo à grains est constitué principalement d'un cylindre de 9 m de haut, surmonté d'une demi-sphère. Quel doit être le rayon du cylindre pour que la capacité totale de stockage, y compris l'intérieur de la demi-sphère, atteigne 425 m^3 ?

28. La figure montre un arc AB de 5 cm sous-tendu par une corde de 4 cm. Calculez la mesure de l'angle au centre θ en radians avec 4 décimales correctes. Transformez cette mesure en degrés, au degré le plus proche.



29. Un concessionnaire automobile vend un modèle de voiture pour 18 000 euros. Il propose également une formule de paiement étalée sur cinq ans, à raison de 375 euros par mois. À quel taux d'intérêt mensuel ce crédit correspond-il ?

La résolution de ce problème passe par la formule de la valeur d'une annuité de n versements de R euros à l'échéance du dernier versement, le taux d'intérêt composé étant de i pour 1 euro par période envisagée :

$$A = \frac{R}{i}[1 - (1+i)^{-n}].$$

En désignant le taux d'intérêt inconnu par x, montrez que x satisfait à l'équation

$$48x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0.$$

Résolvez cette équation par la méthode de Newton.

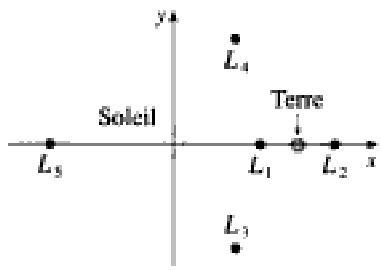
30. Le système d'axes de la figure suppose que le Soleil occupe l'origine et la Terre, le point de coordonnées $(1, 0)$. (L'unité est ici la distance entre les centres de la Terre et du Soleil, à savoir l'*unité astronomique*, désignée par UA : 1 UA $\approx 1{,}496 \times 10^8$ km). Dans le plan de rotation de la Terre autour du Soleil, il y a cinq endroits L_1, L_2, L_3, L_4 et L_5 en lesquels un satellite reste immobile par rapport à la Terre, parce que les attractions exercées par la Terre et le Soleil s'y annulent. De tels endroits sont appelés des points de *libration*. (Un satellite dédié à la recherche solaire a été placé en l'un de ces points). Si m_1 désigne la masse du Soleil et m_2, celle de la Terre, et $r = m_2/(m_1 + m_2)$, il se fait que l'abscisse de L_1 est l'unique racine de l'équation du cinquième degré

$$p(x) = x^5 - (2+r)x^4 + (1+2r)x^3 - (1-r)x^2 + 2(1-r)x + r - 1 = 0,$$

et l'abscisse de L_2 la racine de l'équation

$$p(x) - 2rx^2 = 0.$$

Sachant que $r \approx 3{,}04042 \times 10^{-6}$, calculez les positions de L_1 et L_2.



4.9 Les primitives

Un physicien qui connaît la vitesse d'un mobile souhaiterait connaître sa position à un moment donné. Un ingénieur qui a pu mesurer la vitesse à laquelle de l'eau s'échappe d'une citerne souhaite connaître la quantité totale qui a fui pendant un laps de temps donné. Un biologiste au courant de la vitesse avec laquelle une population de bactéries prolifère pourrait être intéressé par l'effectif de cette population à un moment futur donné. Dans tous ces cas, il s'agit de déterminer une fonction dont la dérivée est connue.

Une fonction F est appelée une **primitive** de f sur un intervalle I si $F'(x) = f(x)$ pour tout x dans I

À la section 2.10, nous avons introduit l'idée de primitive et nous avons appris comment dessiner le graphique d'une primitive de f à partir de celui de f. Maintenant que nous connaissons les formules de dérivation, nous sommes à même de donner l'expression explicite d'une primitive. Prenons l'exemple de $f(x) = x^2$. Si nous avons en tête la règle de dérivation d'une puissance, il n'est pas difficile de découvrir une primitive. En effet, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, alors $F'(x) = x^2 = f(x)$. Mais la dérivée de la fonction $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ est aussi $G'(x) = x^2$. D'où, F et G sont toutes les deux des primitives de f. De même, toute fonction de la forme $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, où C est une constante, est une primitive de f. Le théorème suivant précise qu'il n'y a pas d'autres primitives de f. Sa démonstration, basée sur le Théorème des accroissements finis, est donnée dans ses grandes lignes à l'exercice 43.

1 Théorème Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors la forme générale d'une primitive de f sur I est

$$F(x) + C$$

où C est une constante arbitraire.

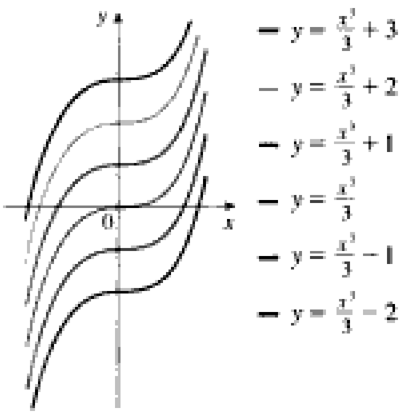


FIGURE 1
Quelques membres de la famille des primitives de $f(x) = x^2$

Retournant à la fonction $f(x) = x^2$, nous voyons que la forme générale d'une primitive de f est $x^3/3 + C$. En attribuant des valeurs particulières à la constante C, nous obtenons une famille de fonctions dont les courbes représentatives sont des translatées les unes des autres (voyez la figure 1).

EXEMPLE 1 ■ Déterminez l'expression générale des primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = 1/x$ c) $f(x) = x^n, n \neq -1$

SOLUTION

a) Si $F(x) = -\cos x$, alors $F'(x) = \sin x$ de sorte que $-$ cosinus est une primitive de sinus. D'après le théorème 1, la forme générale est $G(x) = -\cos x + C$.

b) Dans la section 3.7, on a vu que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Sur l'intervalle $]0, \infty[$, la forme générale des primitives de $1/x$ est $\ln x + C$. Mais on a aussi appris que

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

quel que soit $x \neq 0$. D'après le théorème 1, la forme générale des primitives de $f(x) = 1/x$ est $\ln|x| + C$ sur tout intervalle qui ne contient pas 0. En particulier, cela vaut sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

c) C'est par le biais de la Règle de dérivation des puissances qu'on trouve une primitive de x^n. En effet, si $n \neq -1$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n.$$

La forme générale des primitives de $f(x) = x^n$ est donc

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Elle convient pour $n \geqslant 0$ puisque $f(x) = x^n$ est définie sur un intervalle. Si n est négatif (mais $n \neq -1$), elle convient sur tout intervalle qui ne contient pas 0. ■

Tout comme à l'exemple 1, chaque formule de dérivation, lue de droite à gauche, devient une formule du calcul intégral. La Table 2 cite quelques primitives particulières. Chaque formule peut être vérifiée par dérivation de la fonction de la colonne de droite. La première ligne rappelle que la primitive d'une fonction multipliée par une constante est égale à la constante multipliée par la primitive de la fonction. La deuxième ligne énonce que la primitive d'une somme est la somme des primitives. (Les notations sont $F' = f$, $G' = g$).

Pour obtenir la forme générale des primitives (sur un intervalle) à partir de la primitive particulière qui figure dans la table, il suffit d'ajouter une constante, comme à l'exemple 1.

2 Table de primitives

Fonction	Une primitive particulière
$cf(x)$	$cF(x)$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$
$x^n \ (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x$
$\sec x \operatorname{tg} x$	$\sec x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctg} x$

EXEMPLE 2 ■ Trouvez toutes les fonctions g telles que

$$g'(x) = 4\sin x - 3x^5 + 6\sqrt[4]{x^3}.$$

SOLUTION Il s'agit de trouver une primitive de

$$f(x) = g'(x) = 4\sin x - 3x^5 + 6\sqrt[4]{x^3}.$$

Le théorème 1 et la table 2 conduisent ensemble à

$$g(x) = 4(-\cos x) - 3\frac{x^6}{6} + 6\frac{x^{7/4}}{\frac{7}{4}} + C$$

$$= -4\cos x - \frac{x^6}{2} + \frac{24}{7}x^{7/4} + C$$

De nombreuses applications du calcul différentiel et intégral présentent une situation analogue à celle de l'exemple 2, à savoir chercher une fonction dont on connaît quelque chose sur ses dérivées. Une équation qui lie les dérivées d'une fonction s'appelle une **équation différentielle**. De telles équations seront étudiées dans le chapitre 7, mais d'ores et déjà on est en mesure de traiter des équations différentielles simples. La solution générale d'une équation différentielle comprendra une ou parfois plusieurs constantes arbitraires, comme à l'exemple 2. Néanmoins il se peut que des conditions supplémentaires viennent déterminer ces constantes et conduisent ainsi à une solution unique.

La figure 2 expose les graphiques de la fonction f' de l'exemple 3 et de sa primitive f. On remarque que $f'(x) > 0$ de sorte que f est toujours strictement croissante. On remarque également que quand f' passe par un maximum ou un minimum, f présente un point d'inflexion. Le graphique permet donc de contrôler les calculs.

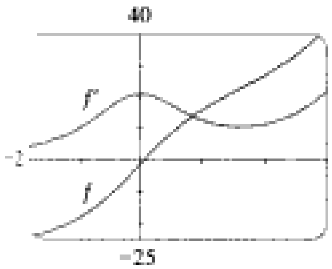


FIGURE 2

EXEMPLE 3 ■ Déterminez f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ et $f(0) = -2$.

SOLUTION La forme générale des primitives de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2},$$

est

$$f(x) = e^x + 20\text{Arctg } x + C.$$

Le fait que $f(0) = -2$ détermine C ; en effet :

$$f(0) = e^0 + 20\text{Arctg } 0 + C = -2.$$

Par conséquent, $C = -2 - 1 = -3$ et la solution particulière est

$$f(x) = e^x + 20\text{Arctg } x - 3.$$

EXEMPLE 4 ■ Déterminez f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ et $f(1) = 1$.

SOLUTION La forme générale des primitives de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ est

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Une nouvelle recherche de primitive mène à

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Les constantes C et D sont déterminées par les conditions données $f(0) = 4$ et $f(1) = 1$. Comme $f(0) = 0 + D = 4$, on a $D = 4$ et comme

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1,$$

on a $C = -3$. La fonction cherchée est finalement

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4.$$

EXEMPLE 5 ■ Étant donné $f(x) = \sqrt{1 + x^3} - x$, tracez le graphique de la primitive F qui satisfait à la condition initiale $F(-1) = 0$.

SOLUTION On peut passer une journée entière à chercher une primitive de f et ne pas en trouver. Il est aussi possible de tracer d'abord le graphique de f et de s'en servir pour obtenir celui de F comme dans l'exemple 4 de la section 2.10. Cela pourrait marcher, mais créons plutôt un graphique plus précis, basé sur ce qu'on appelle un **champ de directions**.

Vu que $f(0) = 1$, le graphique de F doit avoir une pente 1 en $x = 0$. On indique cela par une série de courts segments tangents de pente 1, tous centrés en $x = 0$. On fait de même pour quelques autres valeurs de x et cela donne la figure 3. On parle de champ de directions parce que chaque segment indique la direction que la courbe $y = F(x)$ doit prendre en ce point.

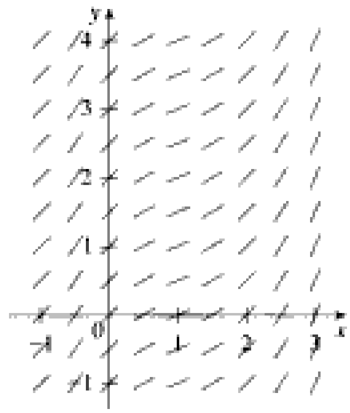


FIGURE 3
Un champ de directions pour $f(x) = \sqrt{1 + x^3} - x$. La pente des segments au-dessus de $x = a$ est $f(a)$.

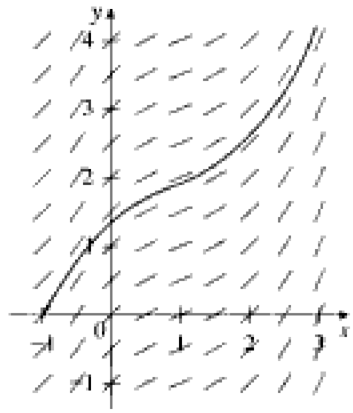


FIGURE 4
La courbe représentative d'une primitive suit le champ des directions.

Le champ des directions guide le tracé du graphique de F qui démarre en $(-1, 0)$ à cause de la condition initiale $F(-1) = 0$. Pour le reste, la courbe suit les directions imprimées par les bouts de tangente (voyez la figure 4). Il suffirait de translater vers le haut ou vers le bas le graphique de F pour obtenir le graphique de toute autre primitive.

Mouvement rectiligne

La notion de primitive est particulièrement utile pour analyser le mouvement d'un objet qui se déplace en ligne droite. Nous savons déjà que si la position de l'objet est donnée par la fonction $s = f(t)$, sa vitesse est la fonction dérivée $v(t) = s'(t)$. D'où, la fonction position est une primitive de la fonction vitesse. De même, comme la fonction accélération est $a(t) = v'(t)$, la fonction vitesse est une primitive de l'accélération. À condition de connaître les valeurs initiales $s(0)$ et $v(0)$, la fonction position se déduit de l'accélération en prenant deux fois de suite une primitive.

EXEMPLE 6 ■ Un mobile se déplace en ligne droite et son accélération obéit à la formule $a(t) = 6t + 4$. Sa vitesse initiale est $v(0) = -6$ cm/s et son déplacement initial est $s(0) = 9$ cm. Quelle est l'expression de sa fonction position ?

SOLUTION Comme $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, en prenant la primitive, on obtient

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C.$$

On note que $v(0) = C$. Or, l'énoncé dit que $v(0) = -6$, d'où $C = -6$ et

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6.$$

Comme $v(t) = s'(t)$, la fonction s est une primitive de v :

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D.$$

En particulier, $s(0) = D$. Or, on sait que $s(0) = 9$. Donc $D = 9$ et la fonction position est entièrement déterminée par la formule

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9.$$

Un objet à proximité de la surface de la Terre est soumis à une force de gravitation qui lui imprime une accélération vers le bas, notée g. Celle-ci peut être considérée comme constante lorsqu'il s'agit d'un mouvement proche de la Terre ; elle est estimée à 9,8 m/s^2.

EXEMPLE 7 ■ Une balle est lancée en l'air du haut d'une falaise de 132,3 m avec une vitesse de 14,7 m/s. À quelle hauteur se trouve-t-elle t secondes plus tard ? À quel moment atteint-elle sa hauteur maximale ? Quand touche-t-elle le sol ?

SOLUTION Le mouvement est vertical et on décide que la direction vers le haut est positive. Au moment t, la distance par rapport au sol est désignée par $s(t)$ et la vitesse $v(t)$ est décroissante. Par conséquent, l'accélération doit être négative

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9{,}8.$$

On prend une primitive

$$v(t) = -9{,}8t + C.$$

La constante C est déterminée grâce à l'information donnée sur la vitesse initiale $v(0) = 14{,}7$. En effet, $v(0) = 14{,}7 = 0 + C$. D'où

$$v(t) = -9{,}8t + 14{,}7.$$

Sa hauteur maximale est atteinte lorsque $v(t) = 0$, c'est-à-dire après 1,5 s. Comme $s'(t) = v(t)$, on prend une nouvelle fois la primitive

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 14{,}7t + D.$$

Grâce au fait que $s(0) = 132{,}3$, on a $132{,}3 = 0 + D$ et donc

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 14{,}7t + 132{,}3.$$

La figure 5 montre le graphique de la fonction position de la balle de l'exemple 7. Ce graphique corrobore les conclusions : la balle atteint sa hauteur maximale après 1,5 s et touche le sol après 6,9 s.

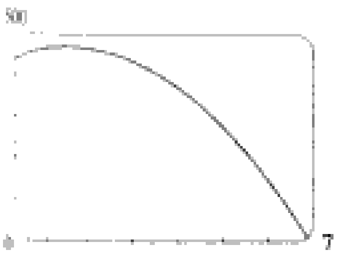


FIGURE 5

L'expression de $s(t)$ est valable jusqu'à ce que la balle touche le sol. Cela se produit quand $s(t) = 0$, c'est-à-dire quand

$$-4{,}9t^2 + 14{,}7t + 132{,}3 = 0,$$

ou quand

$$t^2 - 3t - 27 = 0.$$

Les solutions de cette équation du second degré sont

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}.$$

On ne retient que la solution positive comme valeur admissible pour t. Ainsi, la balle touche le sol après $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6{,}9$ s.

4.9 Exercices

1-10 ■ Déterminez la forme générale d'une primitive de la fonction. Vérifiez votre réponse en dérivant.

1. $f(x) = 12x^2 + 6x - 5$

2. $f(x) = 6x^9 - 4x^7 + 3x^2 + 1$

3. $f(x) = 6/x^5$

4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$

5. $g(t) = (t^3 + 2t^2)/\sqrt{t}$

6. $h(x) = \sin x - 2\cos x$

7. $f(t) = \sec^2 t + t^2$

8. $f(\theta) = e^\theta + \sec\theta \operatorname{tg}\theta$

9. $f(x) = 2x + 5(1 - x^2)^{-1/2}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$

11-12 ■ Parmi les primitives F de f, déterminez celle qui satisfait à la condition donnée. Vérifiez votre réponse en comparant les graphiques de f et F.

11. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$

12. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

13-20 ■ Déterminez l'expression de $f(x)$.

13. $f''(x) = x^2 + x^3$

14. $f'''(x) = \sqrt{x}$

15. $f'(x) = 2/x, \quad x < 0, \quad f(-1) = 7$

16. $f'(x) = 1 + 1/x^2, \; x > 0, \quad f(1) = 1$

17. $f''(x) = 6x + 6, \quad f(0) = 4, \quad f(1) = 3$

18. $f''(x) = 12x^2 - 6x + 2, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 11$

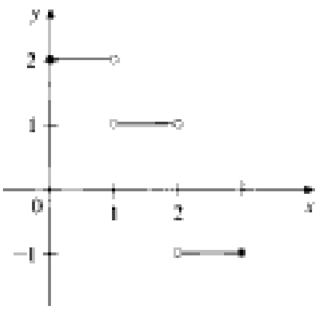
19. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

20. $f''(x) = 3e^x + 5\sin x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2$

21. Sachant que le graphique de f passe par le point $(1, 6)$ et que la pente de sa tangente en $(x, f(x))$ est donnée par la formule $2x + 1$, calculez $f(2)$.

22. Déterminez une fonction f telle que $f'(x) = x^3$ et telle que la tangente à la courbe représentative de f ait pour équation $x + y = 0$.

23. Voici le graphique de f'. Dessinez celui de f à supposer que f soit continue et que $f(0) = -1$.



24. a) Faites dessiner le graphique de $f(x) = e^x - 2x$.

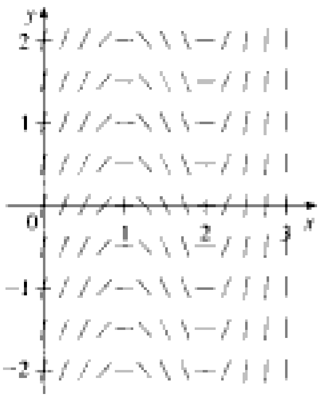
b) En vous basant sur le graphique de la partie a), esquissez une courbe représentative de la primitive F qui satisfait à $F(0) = 1$.

c) Utilisez les formules de cette section pour écrire une expression de $F(x)$.

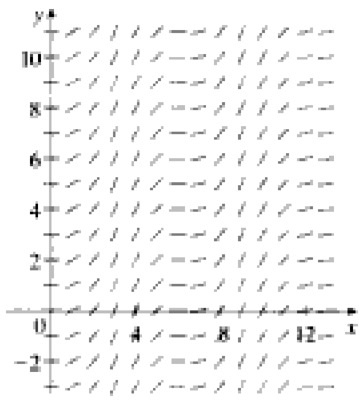
d) Dessinez F d'après son expression obtenue en c). Comparez avec votre esquisse obtenue en b).

25-26 ■ Tracez la primitive F qui satisfait à $F(0) = -2$ en suivant le champ des directions.

25.



26.



27-28 ■ Utilisez un champ de directions pour tracer le graphique de la primitive de f qui satisfait à $F(0) = 0$.

27. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad 0 < x < 2\pi$

28. $f(x) = x \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

29. Les données expérimentales suivantes définissent une fonction f. Utilisez un champ de directions pour tracer le graphique de sa primitive si la condition initiale est $F(0) = 0$.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	[illegible]
$f(x)$	0	0,2	0,5	0,8	1,0	0,6	0,2	0	[illegible]

30. a) Dessinez un champ de directions pour la fonction $f(x) = 1/x^2$ et utilisez-le comme guide pour tracer quelques primitives.

b) Calculez explicitement l'expression générale des primitives et dessinez-en quelques-unes. Comparez avec votre croquis de la partie a).

31. Un point matériel se déplace le long d'une droite avec une vitesse décrite par la fonction $v(t) = 3\sqrt{t}$. Son déplacement initial est $s(1) = 5$ m. Déterminez sa fonction position $s(t)$.

32. Un point matériel se meut avec une accélération décrite par la fonction $a(t) = \cos t + \sin t$. Sa vitesse initiale est $v(0) = 5$ cm/s et son déplacement initial, $s(0) = 0$ cm. Par quelle fonction est exprimée sa position après t secondes ?

33. On lâche une pierre du haut de la terrasse supérieure d'un gratte-ciel située à 450 m du niveau du sol.

a) Comment s'exprime la distance de la pierre par rapport au sol au moment t ?

b) Combien de temps la pierre met-elle pour atteindre le sol ?

c) Quelle est sa vitesse au moment où elle s'écrase au sol ?

d) Si la pierre est lancée vers le sol avec une vitesse de 5 m/s, combien de temps met-elle pour atteindre le sol ?

34. Démontrer que l'expression du déplacement en fonction du temps d'un mouvement rectiligne soumis à une accélération constante a, une vitesse initiale v_0 et un déplacement initial s_0 est

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0.$$

35. Un objet est projeté vers le haut avec une vitesse initiale de v_0 m/s d'un point situé à s_0 m au-dessus du sol. Démontrez que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19{,}6[s(t) - s_0].$$

36. Deux balles sont lancées en l'air du haut de la falaise dans l'exemple 7, la première avec une vitesse de 14,7 m/s et la deuxième, une seconde plus tard avec une vitesse de 7,35 m/s. Les deux balles se croiseront-elles à un moment donné ?

37. Une pierre lâchée du haut d'une falaise touche le sol avec une vitesse de 36 m/s. Quelle est l'altitude de la falaise ?

38. Une voiture roule à 80 km/h et se met à freiner, ce qui la soumet à une décélération constante de 12 m/s^2. Quelle distance parcourt-elle encore avant de s'arrêter ?

39. Quelle accélération constante faut-il appliquer pour accroître la vitesse d'une voiture de 30 km/h à 50 km/h en 5 s ?

40. Une voiture ralentit sous l'effet d'une décélération constante de 12 m/s^2 laissant des traces de freinage sur 48 m avant de s'arrêter. À quelle vitesse roulait la voiture juste avant de freiner ?

41. Une firme estime que le coût marginal (en euros par unité) de production de x unités vaut $1{,}92 - 0{,}002x$. Si le coût unitaire de production est 562 euros, calculez le coût total de production de 100 unités.

42. La densité de masse linéaire d'une tige de 1 m de long est donnée par $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$ en grammes par centimètre, où x est mesuré en centimètres à partir de l'une des extrémités de la tige. Calculez la masse de la tige.

43. Afin de démontrer le théorème 1, désignons par F et G deux primitives de f sur I et posons $H = G - F$.

a) Si x_1 et x_2 sont deux nombres quelconques de I tels que $x_1 < x_2$, appliquez le Théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ afin de montrer que $H(x_1) = H(x_2)$. Pourquoi cela suffit-il à assurer que H est une fonction constante ?

b) Montrez comment le théorème 1 est maintenant une conséquence de la partie a).

44. On sait que les gouttes de pluie grossissent lorsqu'elles tombent, ce qui a pour effet d'augmenter leur surface et d'accroître ainsi leur résistance à la chute. Une goutte de pluie tombe avec une vitesse initiale de 10 m/s et son accélération vers le bas est donnée par

$$a = \begin{cases} 9 - 0{,}9t & \text{quand } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{quand } t > 10 \end{cases}$$

Combien de temps va mettre une goutte de pluie avant de toucher le sol si elle est initialement à 500 m?

45. Un train à grande vitesse accélère et décélère à raison de 1,2 m/s^2. Sa vitesse de croisière maximale est de 144 km/h.

a) Quel est le trajet le plus long qu'il puisse parcourir entre le moment où il se met en route et le moment où il roule déjà à sa vitesse de croisière maximale depuis 15 minutes?

b) On suppose qu'il se passe 15 minutes entre le moment où le train démarre et celui où il se retrouve à l'arrêt. Dans ces conditions, quelle est la distance maximale qu'il puisse parcourir?

c) En combien de temps peut-il joindre deux gares éloignées de 72 km?

d) Le voyage d'une gare à la suivante prend 37,5 minutes. Quelle distance sépare ces deux gares?

46. Une fusée expérimentale est tirée verticalement. Durant les trois premières secondes, son accélération est donnée par $a(t) = 18t$, après quoi son carburant est épuisé et elle devient un objet qui tombe librement. Au bout de 17 secondes, le parachute de la fusée s'ouvre et sa vitesse (dirigée ves le bas) ralentit linéairement jusqu'à –5 m/s en 5 s. La fusée « glisse » ensuite à cette vitesse jusqu'au sol.

a) Établissez la fonction de position s et la fonction vitesse v (à tout moment t). Dessinez les graphiques de s et v.

b) À quel moment la fusée est-elle à son apogée et quelle est son altitude à ce moment?

c) À quel moment atterrit-elle?

Chapitre 4 Révision

• CONTRÔLE DES CONCEPTS •

1. Expliquez la différence entre un maximum absolu et un maximum local.

2. a) Que dit le Théorème des valeurs extrêmes ?
b) Expliquez comment rechercher les valeurs extrêmes d'une fonction supposée continue sur un intervalle fermé ?

3. a) Énoncez le théorème de Fermat.
b) Donnez la définition d'un point critique de f.

4. Énoncez le Théorème des accroissements finis et donnez-en une interprétation géométrique.

5. a) Énoncez le test de croissance/décroissance.
b) Énoncez le test sur la concavité.

6. a) Énoncez le Test de la dérivée première.
b) Énoncez le Test de la dérivée seconde.
c) Quels sont les avantages et désavantages de ces deux tests ?

7. a) Que dit la Règle de l'Hospital ?
b) Comment employer la Règle de l'Hospital si vous avez un produit $f(x)g(x)$ où $f(x) \to 0$ et $g(x) \to \infty$ quand $x \to a$?
c) Comment employer la Règle de l'Hospital si vous avez une différence $f(x) - g(x)$ où $f(x) \to \infty$ et $g(x) \to \infty$ quand $x \to a$?
d) Comment employer la Règle de l'Hospital si vous avez une puissance $[f(x)]^{g(x)}$ où $f(x) \to 0$ et $g(x) \to 0$ quand $x \to a$?

8. a) Expliquez géométriquement sur un croquis comment, étant donné une approximation initiale x_1 d'une racine de $f(x) = 0$, en obtenir une deuxième x_2 par la méthode de Newton ?
b) Écrivez une expression de x_2 en fonction de x_1, $f(x_1)$ et $f'(x_1)$.
c) Écrivez une expression de x_{n+1} en fonction de x_n, $f(x_n)$ et $f'(x_n)$.
d) Dans quelles circonstances la méthode de Newton risque-t-elle d'échouer ou de marcher très lentement ?

▲ VRAI-FAUX ▲

Dites si la proposition est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquez pourquoi. Si elle est fausse, expliquez pourquoi et donnez un exemple qui contredit la proposition.

1. Si $f'(c) = 0$, alors f présente un maximum local ou un minimum local en c.

2. Si f passe par un minimum absolu en c, alors $f'(c) = 0$.

3. Si f est continue sur $]a, b[$, alors f atteint un maximum absolu $f(c)$ et un minimum absolu $f(d)$ en deux nombres c et d de $]a, b[$.

4. Si f est dérivable et si $f(-1) = f(1)$, alors il y a un nombre c tel que $|c| < 1$ et $f'(c) = 0$.

5. Si $f'(x) < 0$ pour $1 < x < 6$, alors f est strictement décroissante sur $]1, 6[$.

6. Si $f''(2) = 0$, alors $(2, f(2))$ est un point d'inflexion de la courbe $y = f(x)$.

7. Si $f'(x) = g'(x)$ pour $0 < x < 1$, alors $f(x) = g(x)$ pour $0 < x < 1$.

8. Il existe une fonction f telle que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ et $f'(x) > 1$ pour tout x.

9. Il existe une fonction f telle que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x.

10. Il existe une fonction f telle que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x.

◆ EXERCICES ◆

1-4 ■ Déterminez les maxima et minima absolus de la fonction sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = x^3 - 12x + 5, \quad [-5, 3]$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 8}, \quad [-3, 0]$

3. $f(x) = x - \sqrt{2} \sin x, \quad [0, \pi]$

4. $f(x) = x^2 e^{-x}, \quad [0, 3]$

5-12 ■
a) Déterminez les asymptotes verticales et horizontales s'il y en a.
b) Déterminez les intervalles de croissance et de décroissance.
c) Déterminez les maxima et minima locaux.
d) Déterminez les intervalles de concavité et les points d'inflexion.
e) À l'aide des informations recueillies aux points a) à d), tracez le graphique de f. Vérifiez grâce à un outil graphique.

5. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-3)^2}$

7. $f(x) = x + \sqrt{1-x}$

8. $y = 4x - \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

9. $y = \operatorname{Arcsin}(1/x)$ **10.** $y = e^{2x-x^2}$

11. $y = e^x + e^{-3x}$ **12.** $y = \ln(x^2-1)$

13-16 ■ Présentez un graphique de f qui fasse apparaître tous les aspects importants de la courbe. Utilisez les graphiques de f' et f'' pour déterminez les intervalles de croissance et de décroissance, les valeurs extrêmes, les intervalles de concavité et les points d'inflexion. Pour l'exercice 13, déterminez ces valeurs exactement en faisant usage du calcul différentiel.

13. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3}$

14. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-x}$

15. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

16. $f(x) = \sin x \cos^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

17. Faites apparaître le graphique de $f(x) = e^{-1/x^2}$ dans une fenêtre qui montre les caractéristiques principales de cette fonction. Situez grosso modo les points d'inflexion. Puis, calculez-les avec précision grâce aux techniques du calcul différentiel.

18. a) Tracez le graphique de la fonction $f(x) = 1/(1+e^{1/x})$.
b) Expliquez l'allure de la courbe en calculant les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers ∞, $-\infty$, 0^+ et 0^-.
c) Lisez sur le graphique de f les coordonnées des points d'inflexion.
d) Demandez à votre logiciel de calcul symbolique de calculer et de dessiner f''.
e) Sur ce dernier graphique lisez avec plus de précision les coordonnées des points d'inflexion.

19. Soit $f(x) = \operatorname{Arctg}(\cos(3 \operatorname{Arcsin} x))$. À l'aide des graphiques de f, f' et f'' estimez les abscisses des points de maximum et de minimum et des points d'inflexion de f.

20. Soit $f(x) = \ln(2x + x\sin x)$. À l'aide des graphiques de f, f' et f'', estimez les intervalles de croissance et les points d'inflexion de f sur l'intervalle $[0, 15]$.

21. Étudiez la famille des fonctions $f(x) = \ln(\sin x + C)$. Quelles sont les caractéristiques communes aux fonctions de cette famille ? En quoi différent-elles ? Pour quelles valeurs de C la fonction f est-elle continue sur $]-\infty, \infty[$? Pour quelles valeurs de C la fonction f n'a-t-elle pas de graphique du tout ? Que se passe-t-il lorsque $C \to \infty$?

22. Étudiez la famille des fonctions $f(x) = cxe^{-cx^2}$. Comment se modifient les valeurs extrêmes et le point d'inflexion lorsque c varie ? Illustrez vos conclusions en dessinant quelques courbes de cette famille.

23. Quelles valeurs faut-il attribuer aux constantes a et b pour que $1, 6$ soit un point d'inflexion de la courbe $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$?

24. Soit $g(x) = f(x^2)$, où f est deux fois dérivable pour tout x, $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$ et f concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, \infty[$.
a) En quelles valeurs g présente-t-elle un maximum ou un minimum ?
b) Étudiez la concavité de g.

25-32 ■ Calculez la limite.

25. $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$ **26.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ **28.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}$ **30.** $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$

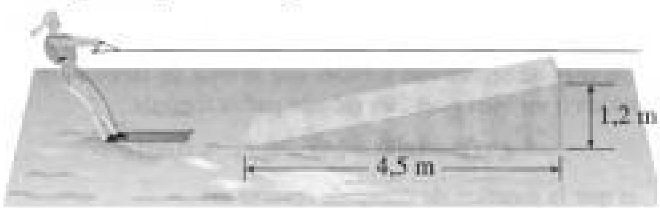
31. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{cosec}^2 x - x^{-2})$ **32.** $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$

33. L'angle d'élévation du soleil décroît à raison de 0,25 rad/h. De ce fait, l'ombre que jette un bâtiment de 120 m de haut s'allonge. À quelle vitesse cette ombre croît-elle au moment où l'angle d'élévation du soleil mesure $\pi/6$?

34. Une tasse en carton a la forme d'un cône de 10 cm de hauteur et de 3 cm de rayon (bord supérieur). Si la tasse est remplie d'eau à raison de 2 cm³/s, à quelle vitesse monte le niveau d'eau au moment où le niveau de l'eau atteint déjà 5 cm ?

35. Un ballon s'élève vers le ciel à la vitesse constante de 1 m/s. Un gamin roule à vélo sur une route rectiligne à la vitesse de 4 m/s. Au moment où il passe sous le ballon, celui-ci est à 9 m au-dessus de sa tête. À quelle vitesse s'accroît la distance entre le gamin et la ballon 3 s plus tard ?

36. Une skieuse nautique franchit le tremplin que vous voyez sur la figure à la vitesse de 9 m/s. À quelle vitesse monte-t-elle lorsqu'elle quitte le tremplin ?



37. Démontrez que la distance du point (x_1, y_1) à la droite d'équation $Ax + By + C = 0$ est donnée par la formule

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

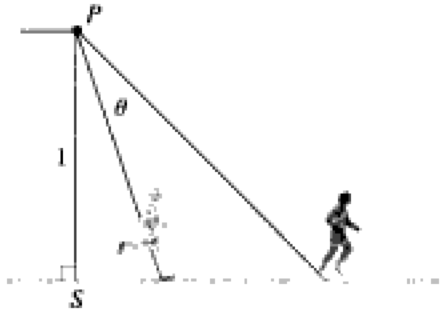
38. Quel est le point de l'hyperbole $xy = 8$ le plus proche du point $(3, 0)$?

39. Déterminez l'aire du plus petit triangle isocèle circonscrit à un cercle de rayon r.

40. Calculez le volume du plus grand cône circulaire qui puisse être inscrit dans une sphère de rayon r.

41. Dans un triangle ABC, D se trouve sur AB, $|CD| = 5$ cm, $|AD| = 4$ cm, $|BD| = 4$ cm et $CD \perp AB$. Où se trouve sur CD le point P qui rend minimale la somme $|PA| + |PB| + |PC|$? Et si $|CD| = 2$ cm ?

42. Un observateur posté en P regarde une piste sur laquelle deux coureurs prennent le départ en S. L'un court trois fois plus vite que l'autre. Quel est l'angle maximal θ sous lequel l'observateur voit les deux coureurs ? (*Suggestion* : maximiser tg θ).



43. La vitesse d'une onde de longueur L en eau profonde est donnée par

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}},$$

où K et C sont des constantes positives connues. Quelle est la longueur de l'onde qui rend cette vitesse minimale ?

44. Il faut construire un réservoir métallique dont la forme est un cylindre circulaire droit surmonté d'une demi-sphère. Il doit permettre de stocker un volume V. Quelles dimensions doit-il avoir pour employer le moins de métal possible ?

45. Une équipe de hockey joue dans un stade dont la capacité est de 15 000 places. Lorsque le prix d'entrée est de 12 euros, la fréquentation tourne autour de 11 000 personnes en moyenne. Un sondage permet de prédire qu'à chaque diminution du prix d'entrée de 1 euro, la fréquentation moyenne s'accroît de 1000 personnes. À quel prix les organisateurs du club doivent-ils fixer le prix d'entrée pour maximiser les ressources financières du club ?

46. Un chef de production a établi que le coût de fabrication de x unités d'un bien peut être calculé par la formule

$$C(x) = 1800 + 25x - 0{,}2x^2 + 0{,}001x^3$$

et que la fonction de demande inverse est

$$p(x) = 48{,}2 - 0{,}03x.$$

a) Tracez les fonctions de coût total et de recette et sur la base de ces courbes, estimez le niveau de production qui maximise le profit.

b) Faites appel aux techniques du calcul différentiel pour déterminer le niveau de production qui maximise le profit.

c) Estimez le niveau de production qui minimise le coût moyen.

47. Calculez par la méthode de Newton le minimum absolu de la fonction $f(x) = x^6 + 2x^2 - 8x + 3$, avec 6 décimales correctes.

48. Calculez par la méthode de Newton toutes les racines de l'équation $6\cos x = x$ avec 6 décimales correctes.

49-50 ■ Cherchez une expression générale de toutes les primitives de la fonction.

49. $f(x) = e^x - (1/x)$ **50.** $g(t) = (1 + t)/\sqrt{t}$

51-54 ■ Déterminez l'expression de $f(x)$.

51. $f'(x) = 2/(1 + x^2)$, $f(0) = -1$

52. $f'(x) = 1 + 2\sin x - \cos x$, $f(0) = 3$

53. $f''(x) = x^3 + x$, $f(0) = -1$, $f'(0) = 1$

54. $f''(x) = x^4 - 4x^2 + 3x - 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

55. a) Soit $f(x) = 0{,}1e^x + \sin x$ envisagée sur l'intervalle $[-4, 4]$. À partir de la courbe représentative de f, esquissez celle d'une primitive F de f qui satisfasse à $F(0) = 0$.

b) Cherchez une expression de $F(x)$.

c) Faites dessiner le graphique de $F(x)$ et comparez-le avec votre esquisse de la partie a).

56. Tracez le graphique d'une fonction f continue, paire et telle que $f(0) = 0$, $f'(x) = 2x$ pour $0 < x < 1$, $f'(x) = -1$ pour $1 < x < 3$ et $f'(x) = 1$ pour $x > 3$.

57. Un hélicoptère largue un colis à 500 m d'altitude. Le parachute ne s'ouvre pas, mais le colis a été conçu pour résister à un choc sous une vitesse de 100 m/s. Va-t-il éclater ou non ?

58. Étudiez la famille des courbes décrites par

$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2.$$

Déterminez en particulier la valeur de c qui fait changer le nombre de points critiques et celle à partir de laquelle le nombre de points d'inflexion change. Illustrez les différentes allures des courbes.

59. Démontrez que l'équation $x^{101} + x^{51} + x - 1 = 0$ a exactement une racine réelle.

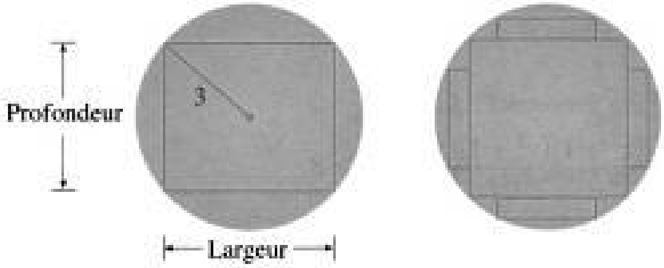
60. On suppose que $f(0) = 1$ et que $2 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ pour tout x dans l'intervalle $[0, 4]$. Démontrez que $9 \leqslant f(4) \leqslant 21$.

61. Une poutre de section rectangulaire est extraite d'un tronc cylindrique de 25 cm de rayon.

a) Démontrez que la section d'aire maximale est une section carrée.

b) Des restes du tronc après que la poutre de section carrée ait été découpée, il y a encore moyen de retirer 4 planches. Déterminez les dimensions de ces planches de manière à ce que l'aire de leur section soit maximale.

c) Si la solidité d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de sa longueur par le carré de sa largeur, quelles sont les dimensions de la poutre la plus solide qui puisse être taillée dans un tronc cylindrique ?



62. La trajectoire que suit un projectile tiré avec une vitesse initiale v sous un angle d'élévation par rapport au sol θ est une parabole d'équation

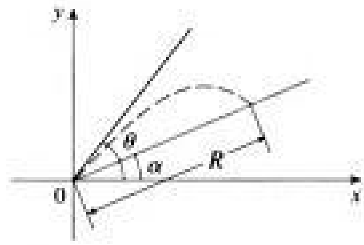
$$y = (\operatorname{tg}\theta)x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

a) On suppose que le projectile est tiré de la base d'un plan incliné d'un angle α, $\alpha > 0$, comme on peut le voir dans la figure. Montrez que la portée du projectile, mesurée à la hauteur du plan incliné, est donnée par

$$R(\theta) = \frac{2v^2\cos\theta\sin(\theta-\alpha)}{g\cos^2\alpha}.$$

b) Quelle est la valeur de θ qui rend cette portée R maximale ?

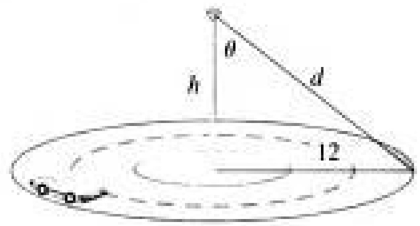
c) Au cas où le plan incliné fait un angle α *sous* l'horizontale, quelle est la portée et quel est l'angle qui rend cette portée maximale ?



63. Un poteau d'éclairage de h mètres de haut illumine un important rond-point, de 12 m de rayon. L'intensité lumineuse I en n'importe quel point P est directement proportionnelle au cosinus de l'angle θ (voyez la figure) et inversement proportionnel au carré de la distance d de la source lumineuse.

a) De quelle hauteur h doit être le poteau pour maximiser I ?

b) On suppose que le poteau mesure h m et qu'une personne s'éloigne du pied du poteau en marchant à la vitesse de 1,2 m/s. À quelle vitesse diminue l'intensité lumineuse en un point situé derrière cette personne à 1 m du sol au moment où elle atteint le bord extérieur du rond-point ?



Pleins feux sur la résolution de problèmes

Cachez la solution et essayez de résoudre vous-même le problème.

Un des principes les plus importants de la résolution de problèmes est l'*analogie* (voyez page 87). Si vous ne voyez pas par quel bout prendre un problème, il est souvent bon de commencer par un problème semblable, mais plus simple. L'exemple que voici illustre ce principe.

EXEMPLE Démontrez que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geqslant 8,$$

quels que soient les trois nombres positifs x, y et z.

SOLUTION Comment démarrer la résolution d'un tel problème ? Certains étudiants se mettent à effectuer le produit du numérateur, mais cela ne fait que brouiller les choses. Réfléchissons à un problème analogue, mais plus simple. Dans un problème qui comporte plusieurs variables, le simplifier consiste souvent à imaginer le même problème, mais avec moins de variables. En l'occurence, on peut ici passer de trois à une variable et chercher à démontrer l'inégalité de même genre

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \text{ pour } x > 0. \tag{1}$$

Et, lorsqu'on aura démontré (1), on aura du même coup démontré l'inégalité demandée puisqu'alors

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \geqslant 2\cdot 2\cdot 2 = 8$$

L'essentiel pour démontrer (1) est de reconnaître qu'il s'agit d'un problème de minimum déguisé. Si on pose

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0,$$

alors $f'(x) = 1 - (1/x^2)$ et $f'(x) = 0$ lorsque $x = 1$. De plus, $f'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$. Par conséquent, $f(1) = 2$ est le minimum absolu de f et de là

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \text{ pour toute valeur positive de } x.$$

L'inégalité demandée en découle par multiplication ainsi que dit précédemment.

L'inégalité (1) pourrait aussi être démontrée sans faire appel au calcul différentiel. En effet, si $x > 0$, on a

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \iff x^2+1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geqslant 0$$

Vu que la dernière inégalité est triviale, la première, qui lui est équivalente, l'est aussi.

Regarder en arrière

Qu'avons-nous appris en résolvant ce problème ?

- Pour résoudre un problème qui implique plusieurs variables, il peut être utile d'envisager un problème analogue avec seulement une variable.
- Devant une inégalité à démontrer, il peut être utile de la voir comme un problème de minimum ou de maximum.

Problèmes

1. On construit un rectangle dont la base coïncide avec un segment de l'axe Ox et dont deux sommets appartiennent à la courbe $y = e^{-x^2}$. Montrez que, de tous les rectangles ainsi construits, celui d'aire la plus grande est celui qui a deux de ses sommets aux points d'inflexion de la courbe.

2. Démontrez que $|\sin x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ quel que soit x.

3. Démontrez que, quelles que soient les valeurs strictement positives de x et y,

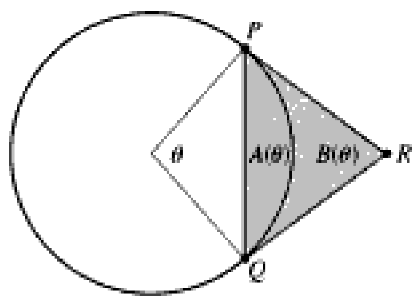
$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2.$$

4. Soit a et b deux nombres strictement positifs. Démontrez qu'il est impossible que les nombres $a(1-b)$ et $b(1-a)$ soient tous les deux supérieurs à 1/4.

5. Déterminez le point le plus haut et le point le plus bas de la courbe $x^2 + xy + y^2 = 12$.

6. Soit un arc de cercle PQ d'angle au centre θ (voyez la figure). L'aire de la région délimitée par la corde PQ et l'arc PQ est désignée par $A(\theta)$ et l'aire de la région comprise entre l'arc et les tangentes au cercle issue de R, par $B(\theta)$. Calculez

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}.$$



7. Calculez la valeur du maximum absolu de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}.$$

8. Trouvez l'expression d'une fonction f telle que $f'(-1) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = 0$ et $f''(x) > 0$ quel que soit x ou démontrez qu'il est impossible qu'une telle fonction existe.

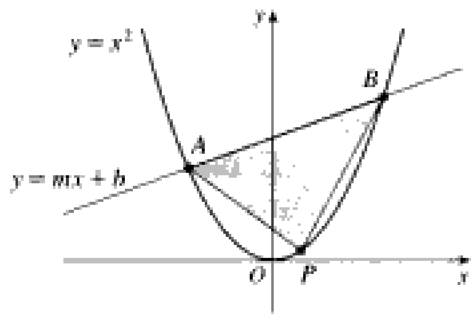
9. Montrez que, pour $x > 0$,

$$\frac{x}{1+x^2} < \text{Arctg}\, x < x.$$

10. Représentez la région du plan qui comprend tous les points (x, y) tels que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2.$$

11. La droite $y = mx + b$ coupe la parabole $y = x^2$ aux points A et B (voyez la figure). Déterminez le point P de l'arc AOB de la parabole qui rend l'aire du triangle PAB la plus grande possible.



12. Pour quelle valeur de a l'équation que voici est-elle vraie ?

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e.$$

13. Un triangle de côtés a, b et c varie en fonction du temps t, mais sans changer d'aire. Soit θ l'angle opposé au côté de longueur a et on suppose qu'il reste toujours aigu.

a) Écrivez l'expression de $d\theta/dt$ en fonction de b, c, θ, db/dt et dc/dt.

b) Écrivez l'expression de da/dt en fonction des mêmes quantités qu'en a).

14. Dessinez l'ensemble de tous les points (x, y) tels que $|x + y| \leqslant e^x$.

15. Soit ABC un triangle dont l'angle BAC mesure $120°$ et tel que $|AB| \cdot |AC| = 1$.

a) Exprimez la longueur de la bissectrice AD en fonction de $x = |AB|$.

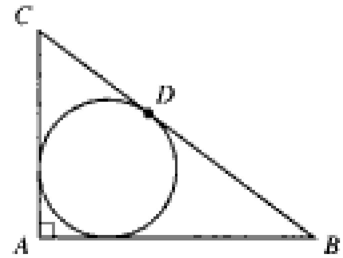
b) Déterminez la longueur maximale de $|AD|$.

16. a) Le triangle rectangle ABC a son angle droit en A et la longueur $|BC|$ de son hypoténuse désignée par a (voyez la figure). Si le cercle inscrit touche l'hypoténuse en D, montrez que

$$|CD| = \frac{1}{2}(|BC| + |AC| - |AB|).$$

b) Exprimez le rayon r du cercle inscrit en fonction de a et de θ, où θ est la moitié de l'angle en C.

c) Si a est fixé et θ varie, trouvez la valeur maximale de r.



17. Lors d'une course automobile sur une route en ligne droite, la voiture A dépasse la voiture B à deux reprises. Démontrez qu'à un moment donné de la course, les deux voitures avaient la même accélération.

18. On découpe une feuille de papier de manière à former un carré $ABCD$ de 1 m de côté. Ensuite, on trace le quart de cercle de centre A qui relie B à D. On plie maintenant la feuille suivant une ligne qui va de E sur AB jusqu'à F sur AD et qui fait tomber le coin A sur le quart de cercle. Déterminez la plus petite et la plus grande aire que peut avoir le triangle AEF.

19. Un réservoir a la forme d'un cône sur sa pointe de 16 cm de haut et 5 cm de rayon dans sa partie supérieure. Il est rempli partiellement d'un liquide qui suinte par la paroi à une vitesse proportionnelle à la surface du réservoir qui est en contact avec le liquide. La surface latérale d'un cône est donnée par la formule πrl, où r est le rayon et l la longueur de la génératrice. Si on verse le liquide à raison de 2 cm^3/min, la hauteur du liquide diminue de 0,3 cm/min quand la hauteur du liquide est de 10 cm. Si l'objectif est de maintenir la hauteur du liquide à 10 cm, avec quel débit faut verser le liquide dans le réservoir ?

20. Un cône de rayon r (en cm) et de hauteur h (en cm) est enfoncé, pointe vers le bas, à raison de 1 cm/s dans un haut cylindre de rayon R (en cm) partiellement rempli d'eau. À quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il au moment où le cône est complètement immergé ?

Au chapitre 2, ce sont les problèmes de tangente et de vitesse qui ont servi à introduire la dérivée, notion maîtresse du calcul différentiel. D'une manière fort semblable, ce chapitre débute avec des problèmes d'aire et de distance parcourue qui contribuent à formuler la notion d'intégrale définie, base du calcul intégral. Dans les chapitres 6 et 7, on verra comment employer l'intégrale pour résoudre des problèmes de volumes, de longueurs de courbe, de prédictions de population, de débit cardiaque, de pression exercée sur un barrage, de travail, de surplus du consommateur et de baseball, parmi beaucoup d'autres. Calcul différentiel et intégral sont liés entre eux. C'est le Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral qui décrit ce lien et on verra dans ce chapitre combien il simplifie la résolution de beaucoup de problèmes.

5

Les intégrales

5.1 Des aires et des distances

Dans cette section, on va découvrir qu'en essayant de déterminer une aire ou la distance parcourue par une voiture, on finit par devoir calculer le même genre particulier de limite.

C'est le moment de lire (ou de relire) *Un aperçu du calcul différentiel et intégral* (voyez page 2). Les idées unificatrices du calcul différentiel et intégral y sont mises en évidence et aident à mettre en perspective d'où l'on vient et vers où on va.

■ Le problème de l'aire

On commence par le problème de *la mesure d'une aire* : déterminer l'aire de la région S située sous la courbe $y = f(x)$ depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. Plus précisément, la région S, illustrée dans la figure 1, est délimitée par le graphe d'une fonction continue f (où $f(x) \geqslant 0$), les droites verticales $x = a$ et $x = b$ et l'axe Ox.

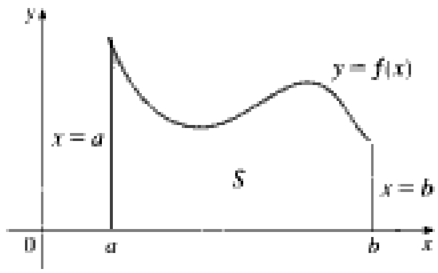


FIGURE 1 $S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Confronté à un problème d'aire, on se pose la question : que veut dire le mot *aire* ? La réponse à cette question est facile lorsque la région a des bords droits. L'aire d'un rectangle s'obtient par définition en faisant le produit de sa longueur par sa largeur. L'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur. L'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en triangles (comme dans la figure 2) et en additionnant les aires de ceux-ci.

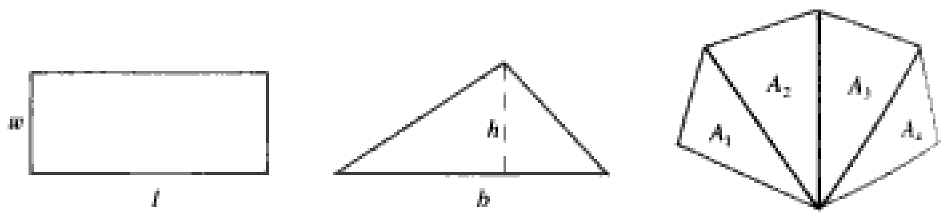


FIGURE 2 $A = lw$ $A = \frac{1}{2}bh$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

En revanche, déterminer l'aire d'une région dont les bords sont courbes n'est pas aussi facile. On a tous une idée intuitive de ce qu'est l'aire d'une région. Mais résoudre un problème d'aire consiste en partie à préciser cette idée intuitive jusqu'à arriver à une définition exacte de l'aire.

On se souviendra que pour définir une tangente on a commencé par approcher la pente de la tangente par celles de sécantes et puis par prendre la limite de ces approximations. On suit la même démarche ici aussi, à savoir, on commence par une évaluation approximative de la région S au moyen de rectangles, puis on passe à la limite des aires de ces rectangles. Cette procédure est illustrée dans l'exemple que voici.

EXEMPLE 1 ■ Utilisez des rectangles pour estimer l'aire sous la parabole $y = x^2$ depuis 0 jusqu'à 1 (la région parabolique S illustrée dans la figure 3).

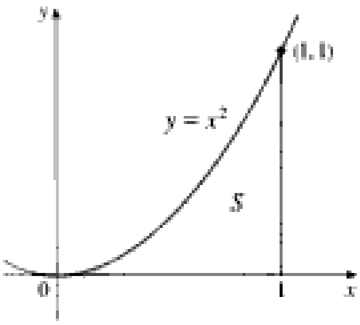


FIGURE 3

SOLUTION Il saute aux yeux que la mesure de S est située entre 0 et 1 puisque S est contenue dans un carré de côté 1, mais il y a certainement moyen de mieux la cerner. Divisons S en quatre tranches S_1, S_2, S_3 et S_4 par les verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{3}{4}$ comme dans la figure 4(a). Chaque tranche peut être approchée par un rectangle de même base que la tranche et de hauteur égale au bord droit de la tranche [voyez la figure 4(b)]. Autrement dit, les hauteurs de ces rectangles sont les valeurs de la fonction $f(x) = x^2$ aux extrémités droites des sous-intervalles $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$.

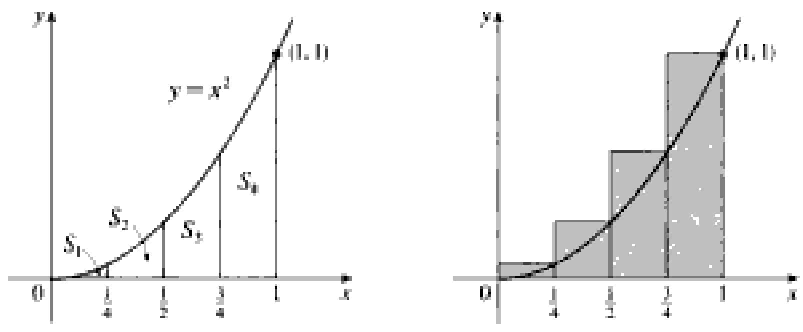


FIGURE 4 (a) (b)

La largeur de chaque rectangle est égale à $\frac{1}{4}$ et leur hauteur à $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ et 1^2. Si nous désignons par D_4 la somme des aires de ces rectangles d'approximation, nous obtenons

$$D_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot(1)^2 = \frac{15}{32} = 0{,}46875.$$

Comme l'aire A de S est inférieure à D_4, nous avons

$$A < 0{,}46875.$$

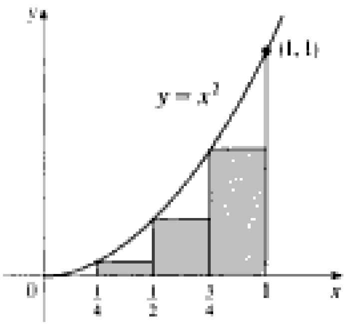


FIGURE 5

Au lieu des rectangles de la figure 4(b), nous pourrions utiliser ceux plus petits de la figure 5 dont les hauteurs sont les valeurs de f aux extrémités gauches des sous-intervalles. (Le rectangle à l'extrémité gauche a disparu car sa hauteur est nulle). La somme des aires de ces rectangles d'approximation est égale à

$$G_4 = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0{,}21875.$$

Comme l'aire de S est supérieure à G_4, nous disposons désormais d'estimations par excès et par défaut de A :

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875.$$

Cette façon de faire peut être répétée avec un plus grand nombre de bandes. La figure 6 montre ce qui se passe si la région S est divisée en huit bandes d'égale largeur.

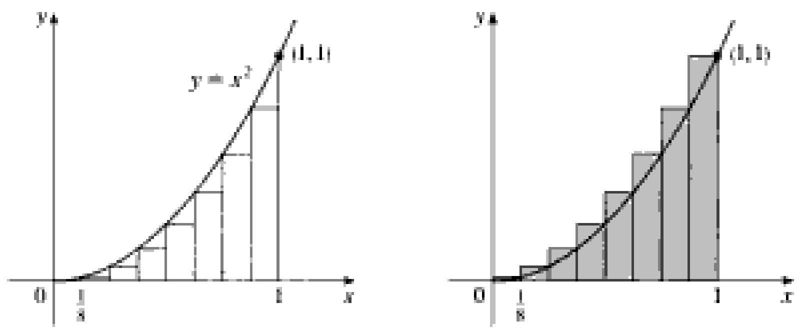


FIGURE 6
Approximation de S par huit rectangles

(a) Avec les extrémités gauches (b) Avec les extrémités droites

La somme des aires des plus petits rectangles (G_8) et la somme des aires des plus grands rectangles (D_8) fournissent de meilleures approximations respectivement par défaut et par excès de A :

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375.$$

Nous pourrions donc répondre à la question posée que l'aire exacte de S se situe entre 0,2734375 et 0,3984375.

n	G_n	D_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

En augmentant le nombre de bandes, nous arriverions à une meilleure estimation encore. La table montre la liste des résultats produits par ordinateur de calculs semblables faits pour n rectangles dont les hauteurs sont les extrémités gauches (G_n) ou les extrémités droites (D_n). Nous y lisons par exemple qu'avec 50 bandes, l'aire est coincée entre 0,3234 et 0,3434. Avec 1000 bandes, l'intervalle se rétrécit encore: A se trouve entre 0,3328335 et 0,3338335. La moyenne de ces deux dernières estimations fournit une bonne approximation: $A \approx 0{,}3333335$. ■

Des valeurs de la table il semble ressortir que D_n s'approche de 1/3 lorsque n augmente. Ce résultat sera confirmé suite à l'exemple que voici.

EXEMPLE 2 ■ À propos de la région S dans l'exemple 1, montrez que la somme des aires des rectangles d'approximation par excès tend vers 1/3, autrement dit,

$$\lim_{n \to \infty} D_n = \frac{1}{3}.$$

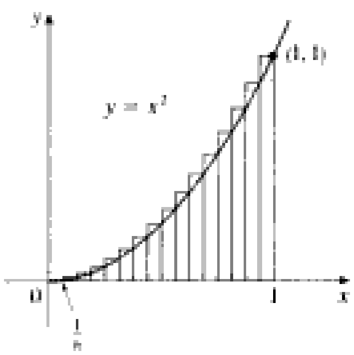


FIGURE 7

SOLUTION D_n désigne la somme des aires des n rectangles dessinés dans la figure 7. La largeur de chaque rectangle vaut $1/n$ et les hauteurs sont égales aux valeurs de la fonction $f(x) = x^2$ aux points $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$, à savoir $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. D'où

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Pour la suite du calcul, on a besoin de la somme des carrés des n premiers entiers positifs :

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Peut-être avez-vous déjà renconté cette formule précédemment. Sa démonstration peut se faire par induction (voyez l'exercice 12). On introduit la formule 1 dans l'expression de D_n et on obtient :

$$D_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

On calcule ici la limite de la suite D_n. Les suites ont été mentionnées dans *Un aperçu du calcul différentiel et intégral* et seront étudiées en détail dans le chapitre 8. Leurs limites se calculent de la même façon que les limites à l'infini (section 2.5). En particulier, il est acquis que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

De là, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} D_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\
&= \tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

On peut montrer que les sommes d'approximation par défaut tendent aussi vers 1/3, autrement dit,

$$\lim_{n\to\infty} G_n = \frac{1}{3}.$$

Des figures 8 et 9 il ressort que tant G_n que D_n deviennent de meilleures approximations de l'aire de S lorsque n augmente. Par conséquent, on *définit* l'aire A comme la limite des sommes des aires des rectangles d'approximation, c'est-à-dire

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} G_n = \frac{1}{3}.$$

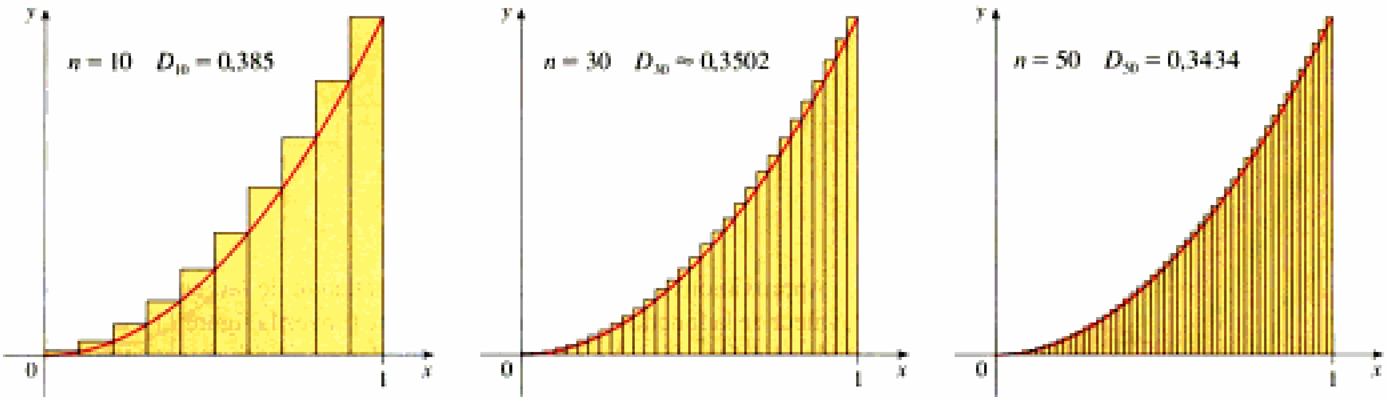


FIGURE 8

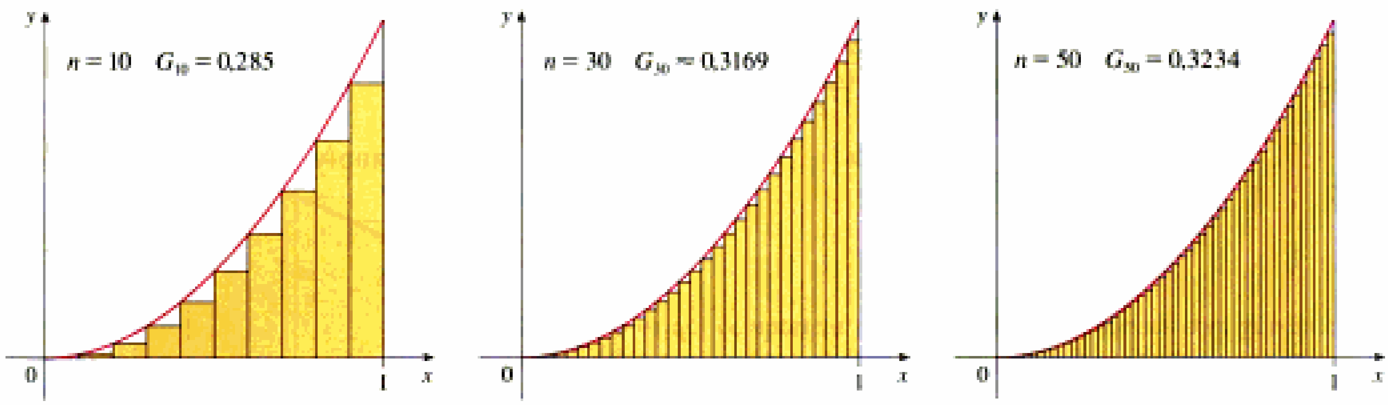


FIGURE 9

Appliquons l'idée des exemples 1 et 2 à la région de forme générale S de la figure 1. Subdivisons d'abord S en n bandes $S_1, S_2, \ldots, S_n$ d'égale largeur comme dans la figure 10. Comme l'intervalle $[a, b]$ mesure $b - a$, la largeur de chaque bande est égale à

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Ces bandes divisent l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

où $x_0 = a$ et $x_n = b$. Les extrémités droites des sous-intervalles sont

$$x_1 = a + \Delta x, \qquad x_2 = a + 2\Delta x, \qquad x_3 = a + 3\Delta x, \ldots.$$

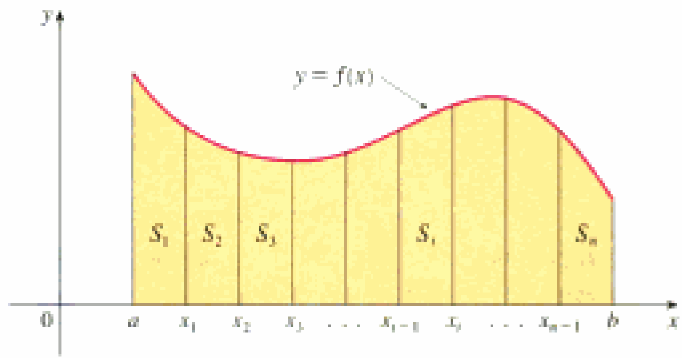


FIGURE 10

Approximons la $i^{\text{ème}}$ bande S_i par un rectangle de largeur Δx et de longueur $f(x_i)$, valeur de la fonction f en l'extrémité droite (voyez la figure 11). L'aire de ce $i^{\text{ème}}$ rectangle vaut donc $f(x_i)\Delta x$. Ce que nous considérons intuitivement comme l'aire de S est approché par la somme des aires de ces rectangles, à savoir

$$D_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

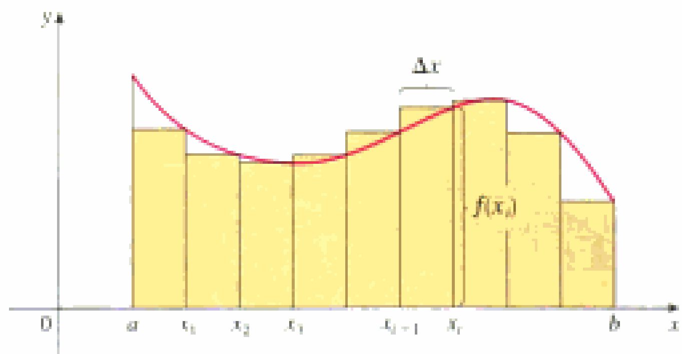
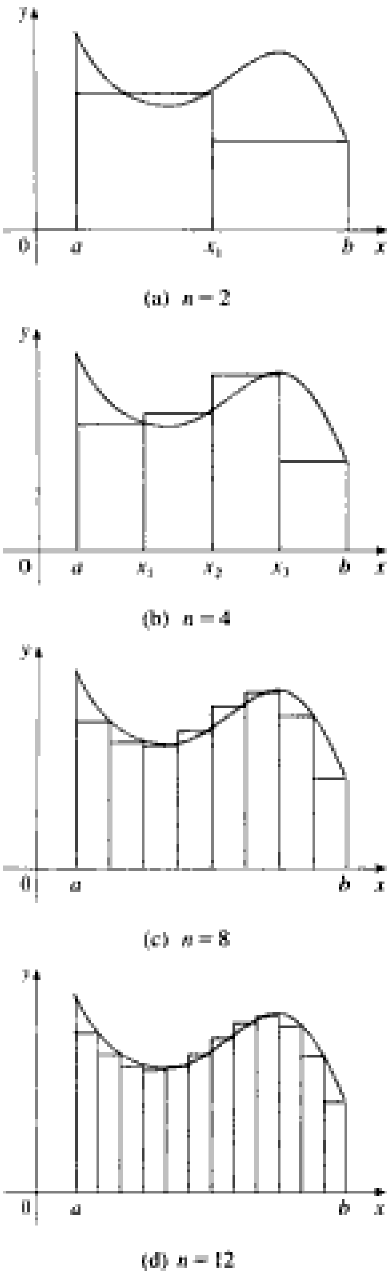


FIGURE 11



(a) $n = 2$

(b) $n = 4$

(c) $n = 8$

(d) $n = 12$

FIGURE 12

La figure 12 montre cette approximation pour $n = 2, 4, 8$ et 12. Vous pouvez remarquez que cette approximation semble s'améliorer à mesure que le nombre de tranches augmente, c'est-à-dire quand $n \to \infty$. Par conséquent, nous définissons l'aire A de la région S de la manière suivante.

> **2 Définition** L'**aire** A de la région S située sous le graphique de la fonction continue f est la limite de la somme des aires des rectangles d'approximation :
>
> $$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x].$$

À condition de supposer, comme nous l'avons fait, que f est continue, il est possible de démontrer que la limite de la définition 2 existe toujours. Il est également possible de démontrer que la limite est la même à partir des extrémités gauches :

3 $$A = \lim_{n\to\infty} G_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x].$$

En fait, au lieu de choisir les extrémités droites ou gauches, on peut choisir comme hauteur du $i^{\text{ème}}$ rectangle la valeur de f en *n'importe quel* point x_i^* du $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Les points $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ sont appelés les points au choix. La figure 13 montre des rectangles d'approximation qui ne sont pas construits sur les extrémités des sous-intervalles. De ce fait, l'expression de l'aire que voici est plus générale :

4 $$A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x].$$

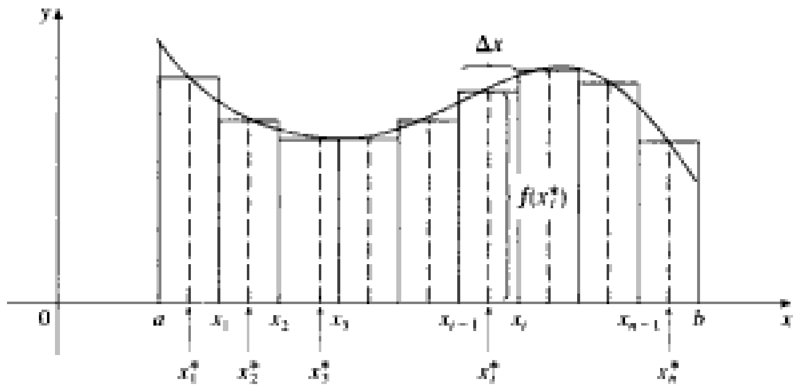


FIGURE 13

Pour dire de terminer à $i = n$.
Pour dire qu'il faut additionner $\longrightarrow \displaystyle\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$
Pour dire de démarrer à $i = m$.

Des sommes qui comportent un grand nombre de termes sont généralement écrites de façon plus compacte grâce au symbole $\sum$. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Les différentes expressions 2, 3 et 4 de l'aire peuvent maintenant être écrites :

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

La formule 1 aurait pu s'écrire

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

EXEMPLE 3 ■ Soit la région située sous la courbe représentative de la fonction $f(x) = e^{-x}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2$.

a) Cherchez une expression de l'aire comme limite d'une somme en prenant les points au choix aux extrémités droites.

b) Estimez l'aire en choisissant les points au choix au milieu, d'abord sur quatre sous-intervalles, ensuite sur dix.

SOLUTION

a) Puisque $a = 0$ et $b = 2$, la largeur des sous-intervalles est égale à

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$

D'où, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ et $x_n = 2n/n$. La somme des aires des rectangles d'approximation s'écrit

$$\begin{aligned} D_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

Et selon la définition 2, l'aire est donnée par

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right).$$

On peut aussi adopter la notation $\sum$ et écrire alors

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}.$$

Sans l'aide d'un logiciel de calcul algébrique, il est difficile de calculer cette somme et d'en obtenir la limite (voyez l'exercice 16). Après la section 5.3, il sera heureusement possible de calculer A plus facilement par une autre méthode.

b) Avec $n = 4$, les sous-intervalles de largeur $\Delta x = 0{,}5$ sont $[0; 0{,}5]$, $[0{,}5; 1]$, $[1; 1{,}5]$ et $[1{,}5; 2]$. Les points médians de ces sous-intervalles sont $x_1^* = 0{,}25$, $x_2^* = 0{,}75$, $x_3^* = 1{,}25$ et $x_4^* = 1{,}75$. La somme des aires des quatre rectangles

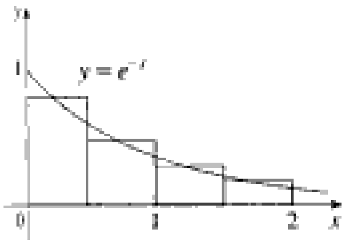


FIGURE 14

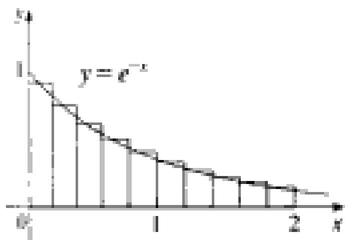


FIGURE 15

d'approximation (voyez la figure 14) est égale à

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0{,}25)\,\Delta x + f(0{,}75)\,\Delta x + f(1{,}25)\,\Delta x + f(1{,}75)\,\Delta x \\ &= e^{-0{,}25}(0{,}5) + e^{-0{,}75}(0{,}5) + e^{-1{,}25}(0{,}5) + e^{-1{,}75}(0{,}5) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{-0{,}25} + e^{-0{,}75} + e^{-1{,}25} + e^{-1{,}75}) \approx 0{,}8557 \end{aligned}$$

L'aire est donc estimée à

$$A \approx 0{,}8557.$$

Avec $n = 10$, les sous-intervalles sont $[0; 0{,}2], [0{,}2; 0{,}4], \ldots, [1{,}8; 2]$ et les points médians de ces sous-intervalles sont $x_1^* = 0{,}1$, $x_2^* = 0{,}3$, $x_3^* = 0{,}5, \ldots,$ $x_{10}^* = 1{,}9$. D'où

$$\begin{aligned} A \approx M_{10} &= f(0{,}1)\,\Delta x + f(0{,}3)\,\Delta x + f(0{,}5)\,\Delta x + \cdots + f(1{,}9)\,\Delta x \\ &= 0{,}2(e^{-0{,}1} + e^{-0{,}3} + e^{-0{,}5} + \cdots + e^{-1{,}9}) \approx 0{,}8632 \end{aligned}$$

De la figure 15, il ressort clairement que cette approximation est meilleure que la précédente avec $n = 4$.

■ Le problème de la distance

Abordons maintenant le *problème de la distance* : calculer la distance parcourue par un mobile durant un certain temps connaissant sa vitesse à tout moment. (D'une certaine manière, il s'agit du problème inverse de celui qui a été posé dans la section 2.1). Si la vitesse était constante, il serait facile de répondre à la question par la formule

$$\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps}.$$

Mais quand la vitesse varie, il n'est pas si facile de déterminer la distance parcourue. Nous creusons le problème dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 4 ■ Malgré que le compteur kilométrique d'une voiture soit défectueux, on veut estimer la distance parcourue pendant un intervalle de temps de 30 secondes. Le tachymètre permet de noter la vitesse toutes les 5 secondes. Ce qui donne le tableau suivant

Temps (en s)	0	5	10	15	20	25	30
Vitesse (en km/h)	90	111	126	155	169	165	148

Pour que les unités de temps et de vitesse soient cohérentes, on convertit les vitesses en m/s (1 km/h = 1000/3600 m/s) :

Temps (en s)	0	5	10	15	20	25	30
Vitesse (en m/s)	25	31	35	43	47	46	41

Comme la vitesse ne change pas beaucoup pendant les cinq premières secondes, on est tenté de la supposer constante sur cet intervalle de temps afin d'ainsi obtenir facilement la distance parcourue. En choisissant la vitesse initiale (25 m/s) comme vitesse constante, on obtient comme distance parcourue pendant les cinq premières secondes

$$25 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 125 \text{ m}.$$

De même, la vitesse est plus ou moins constante durant le deuxième intervalle de temps et on choisit celle relevée au moment $t = 5$. Par conséquent, la distance parcourue entre $t = 5$ s et $t = 10$ s est à peu près égale à

$$31 \text{ m/s} \times 5 \text{ s} = 155 \text{ m}.$$

En additionnant ainsi les estimations de la distance parcourue sur les autres intervalles de temps, on obtient une estimation de la distance totale parcourue :

$$25 \times 5 + 31 \times 5 + 35 \times 5 + 43 \times 5 + 47 \times 5 + 46 \times 5 = 1135 \text{ m}.$$

On aurait très bien pu retenir comme vitesse constante sur chaque intervalle de temps la vitesse à la fin de l'intervalle au lieu de celle du début et dans ce cas, l'estimation aurait été

$$31 \times 5 + 35 \times 5 + 43 \times 5 + 47 \times 5 + 46 \times 5 + 41 \times 5 = 1215 \text{ m}.$$

Si on voulait une meilleure estimation, on aurait dû relever les vitesses indiquées par le tachymètre toutes les deux secondes, ou même chaque seconde.

Les calculs effectués dans l'exemple 4 vous rappellent peut-être les sommes calculées précédemment pour estimer les aires. La parenté devient manifeste dès qu'on trace le graphique de la fonction vitesse (voyez la figure 16). L'aire du premier rectangle mesure $25 \times 5 = 125$, exactement l'estimation de la vitesse parcourue durant les 5 premières secondes. En effet, l'aire de chaque rectangle peut être vue comme une distance puisque sa hauteur est égale à la vitesse et sa base, au temps. La somme des aires des rectangles de la figure 16 vaut $G_6 = 1135$, autrement dit la première estimation de la distance parcourue.

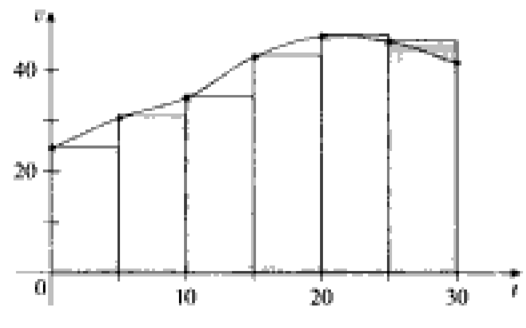


FIGURE 16

De façon générale, on suppose qu'un objet se déplace à la vitesse $v = f(t)$, où $a \leqslant t \leqslant b$ et $f(t) \geqslant 0$ (de manière à ce que l'objet se déplace toujours dans la direction positive). La vitesse est relevée aux moments $t_0(= a), t_1, t_2, \ldots, t_n(= b)$ et supposée constante entre temps. Si ces moments sont régulièrement espacés, l'intervalle de temps entre deux lectures consécutives dure $\Delta t = (b - a)/n$. Pendant le premier intervalle de temps, la vitesse vaut approximativement $f(t_0)$ et donc l'espace parcouru, $f(t_0)\Delta t$. Pendant le deuxième intervalle de temps, l'espace parcouru est d'environ $f(t_1)\Delta t$. À la fin de l'intervalle de temps complet $[a, b]$, la distance totale est approximativement égale à

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t.$$

Si au lieu de la vitesse au début de l'intervalle de temps, on retient plutôt celle du moment final, alors l'approximation de la distance totale parcourue devient

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

Vu que, plus la vitesse est mesurée fréquemment, plus l'estimation devient précise, il semble acceptable que la valeur exacte de la distance parcourue d soit la *limite* de ces expressions :

5 $$d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t.$$

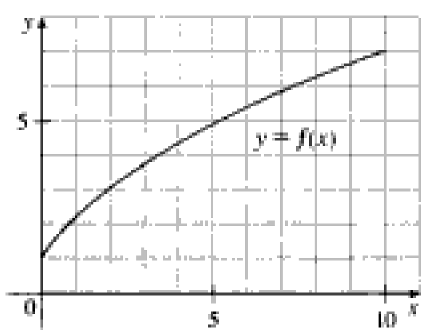
On verra dans la section 5.3 que cette conjecture est effectivement exacte.

Parce que l'équation 5 est de la même forme que les expressions 2 et 3 relative à l'aire, il suit que la distance parcourue est égale à l'aire sous le graphique de la fonction vitesse. Dans le chapitre 6, on verra que d'autres grandeurs qui relèvent des sciences naturelles et sociales—telles le travail d'une force ou le débit cardiaque—peuvent être aussi interprétées comme l'aire sous une courbe. Aussi, ayez à l'esprit que, derrière les calculs d'aire de ce chapitre, se cache toute une panoplie d'interprétations concrètes.

5.1 Exercices

1. a) En lisant les valeurs de f sur sa représentation graphique, utilisez 5 rectangles pour calculer une approximation par défaut et une approximation par excès de l'aire sous la courbe de f depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 10$. Dessinez les rectangles utilisés.

   b) Calculez de nouvelles estimations basées sur 10 rectangles.



2. a) Utilisez 6 rectangles pour calculer les approximations de chaque type de l'aire sous la courbe donnée, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 12$.

   ■ G_6 (les points au choix sont les extrémités gauches)

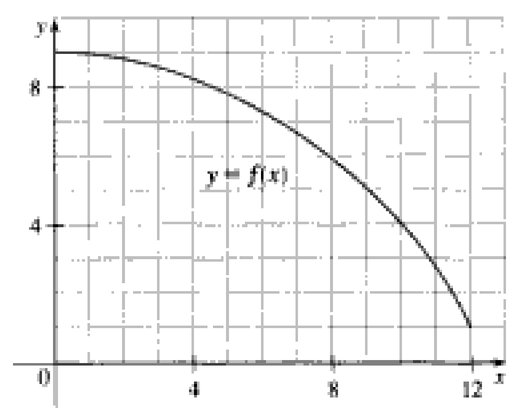
   ■ D_6 (les points au choix sont les extrémités droites)

   ■ M_6 (les points au choix sont les points médians)

   b) G_6 est-elle une sous-estimation ou une surestimation ?

   c) D_6 est-elle une sous-estimation ou une surestimation ?

   d) Lequel des nombres D_6, G_6 ou M_6 donne-t-il la meilleure estimation ? Expliquez pourquoi.



3. a) Estimez l'aire sous le graphique de $f(x) = x^3 + 2$ depuis $x = -1$ jusqu'à $x = 2$ en vous servant de trois rectangles et des extrémités droites. Ensuite, améliorez votre estimation en vous basant sur six rectangles. Représentez la courbe et les rectangles d'approximation.
   b) Recommencez la partie a) avec les extrémités gauches.
   c) Recommencez la partie a) avec les points médians.
   d) Au vu des graphiques réalisés dans les parties a), b) et c), quelle est la meilleure approximation?

4. a) Tracez le graphique de $f(x) = e^{-x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
   b) Estimez l'aire sous le graphique de f en vous servant de quatre rectangles d'approximation construits sur 1) les extrémités droites 2) les points médians. Dans chaque cas, tracez la courbe et les rectangles.
   c) Améliorez vos estimations de la partie b) en vous basant sur huit rectangles.

5-6 ■ À l'aide d'une calculatrice programmable (ou d'un ordinateur), il n'est pas difficile de calculer les sommes des aires des rectangles, même lorsque n est grand, en faisant exécuter des boucles. Calculez la somme des aires des rectangles d'approximation construits sur une subdivision régulière et les extrémités droites pour $n = 10$, 30 et 50. Après cela, conjecturez la valeur exacte de l'aire de la région.

5. La région située sous $y = \sin x$ depuis 0 jusqu'à π.
6. La région située sous $y = 1/x^2$ depuis 1 jusqu'à 2.

7. Certains logiciels comportent des commandes qui ont pour effet de dessiner les rectangles d'approximation et d'en calculer la somme des aires, du moins pour x_i^* situés aux extrémités gauches ou droites, (avec Maple, par exemple, les commandes sont leftbox, rightbox, leftsum, rightsum).
   a) Calculez les sommes droites et gauches pour $n = 10$, 30 et 50 de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.
   b) Illustrez en dessinant les rectangles dont il est question dans la partie a).
   c) Montrez que la valeur exacte de l'aire sous f se situe entre 4,6 et 4,7.

8. a) En utilisant les commandes dont il est question dans l'exercice 7, calculez les sommes droites et gauches pour $n = 10$, 30 et 50 de la fonction $f(x) = \sin(\sin x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.
   b) Illustrez par le dessin des rectangles.
   c) Montrez que la valeur exacte de l'aire sous f se situe entre 0,87 et 0,91.

9. Une athlète qui entame une épreuve accroît constamment sa vitesse pendant les trois premières secondes. Cette vitesse est relevée toutes les demi-secondes et figure dans la table. Déterminez une sous-estimation et une surestimation de la distance qu'elle parcourt durant ces 3 secondes.

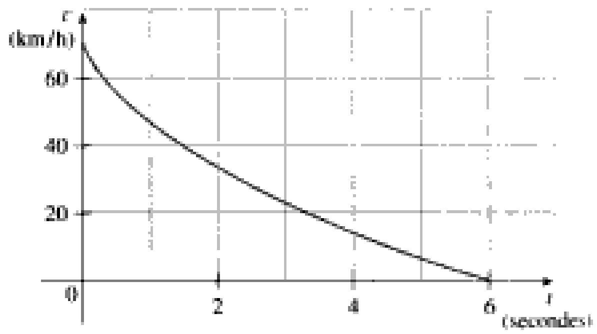
t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v (m/s)	0	1,9	3,3	4,5	5,5	5,9	6,2

10. Il peut arriver qu'on ait à estimer l'espace parcouru par un mobile dont on a relevé la vitesse à des moments $t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots$ non également répartis dans le temps. Les distances seront alors exprimées en fonction des intervalles de temps $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Par exemple, le 7 mai 1992, la navette spatiale *Endehaviour* a été envoyée dans le cadre de la mission STS-49 dans le but d'installer un nouveau moteur de démarrage au satellite de communications Intelstat. Le tableau, fourni par la NASA, donne les vitesses de la navette entre le moment du décollage et celui du largage des fusées de mise à feu.

Étapes	Temps (en s)	Vitesse (m/s)
Lancement	0	0
Début de la manœuvre de pivotement	10	56
Fin de la manœuvre de pivotement	15	97
Commande des gaz à 89%	20	136
Commande des gaz à 67%	32	227
Commande des gaz à 104%	59	403
Pression maximum	62	440
Largage des fusées de mise à feu	125	1265

De ces données, déduisez l'altitude atteinte par la navette *Endehavior*, 62 secondes après son lancement.

11. Voici le graphique de la courbe de freinage d'une voiture. Servez-vous en pour estimer la distance qu'a parcourue la voiture pendant qu'elle freinait.



12. Démontrez par induction la formule 1

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(voyez les *Principes de la résolution de problèmes*, page 88).

13. Démontrez par induction la formule qui permet de calculer la somme des cubes des n premiers nombres entiers :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

14. a) Écrivez une expression de l'aire sous la courbe d'équation $y = x^3$ depuis 0 jusqu'à 1 sous forme de limite à la manière de la définition 2.

b) Calculez la limite de la partie a) à l'aide de la formule de l'exercice 13.

15. a) Exprimez sous forme d'une limite l'aire sous la courbe $y = x^5$ depuis 0 jusqu'à 2.

b) Trouvez une formule de la somme qui figure dans la partie a) grâce à un logiciel de calcul symbolique.

c) Calculez la limite de la partie a).

16. Calculez la mesure exacte de la région sous le graphique de $y = e^{-x}$ depuis 0 jusqu'à 2 en cherchant, à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, une expression de la somme écrite dans l'exemple 3 a), puis en effectuant le passage à la limite. Comparez la réponse à l'estimation calculée dans l'exemple 3 b).

LCS **17.** Calculez la mesure exacte de l'aire sous la courbe $y = \cos x$ depuis 0 jusqu'à b, où $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Utilisez un logiciel de calcul symbolique tant pour calculer la somme que sa limite.) En particulier, que vaut l'aire dans le cas $b = \pi/2$?

18. a) Désignons par A_n l'aire du polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de rayon r. En divisant le polygone en n triangles congruents d'angle au centre $2\pi/n$, montrez que $A_n = \frac{1}{2}nr^2 \sin(2\pi/n)$.

b) Montrez que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. (*Indication :* Pensez à la formule 2 dans la section 3.4.)

5.2 L'intégrale définie

Dans la section 5.1, nous avons vu que pour calculer une aire, nous sommes amenés à prendre une limite de la forme

1
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [\,f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x].$$

Nous avons vu également qu'une telle limite survient lorsque nous nous mettons à calculer la distance parcourue par un mobile. Il s'avère que ce même type de limite intervient dans toute une série de situations sans même que f soit nécessairement une fonction positive. En effet, dans le chapitre 6 nous allons rencontrer des limites du type 1 lors du calcul de longueurs d'arcs, de volumes de solides, de centres de masse, de force exercée par la pression de l'eau, du travail et d'autres grandeurs encore. Voilà pourquoi nous attribuons à ce type de limite un nom particulier et une notation.

> **2 Définition d'une intégrale définie** Étant donné une fonction continue f définie pour $a \leqslant x \leqslant b$, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de largeur égale $\Delta x = (b-a)/n$. On appelle $x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_n(=b)$ les extrémités de ces sous-intervalles et on fixe arbitrairement des points $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ dans ces sous-intervalles de sorte que x_i^* appartient au $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Alors, l'**intégrale définie de f depuis a jusqu'à b** est
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

REMARQUE 1 • Le symbole $\int$ fut introduit par Leibniz et s'appelle le **signe intégrale**. Il a la forme d'un S allongé, justifié par le fait qu'une intégrale est une limite de sommes. Dans la notation $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ s'appelle l'**intégrande** et a et b les **bornes d'intégration** ; a est la borne inférieure et b la borne supérieure. Le symbole dx n'a pas de signification en lui-même ; $\int_a^b f(x)dx$ est un tout. Calculer une intégrale se dit aussi effectuer une **intégration**.

REMARQUE 2 ● L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre ; elle ne dépend pas de x au sens où on peut remplacer x par n'importe quelle lettre, cela ne change pas la valeur de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr.$$

REMARQUE 3 ● Sous l'hypothèse de continuité de f que nous avons faite, il est possible de démontrer que la limite de la définition 2 existe toujours et est la même quel que soit le choix des points x_i^*. Si nous choisissons x_i^* égal à l'extrémité droite x_i dans chaque sous-intervalle, la définition de l'intégrale définie s'écrit

3
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Si nous choisissons x_i^* égal à l'extrémité gauche x_{i-1} de chaque sous-intervalle, la définition de l'intégrale définie s'écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x.$$

Ou bien nous pouvons choisir x_i^* au milieu de chaque sous-intervalle ou encore n'importe où entre x_{i-1} et x_i.

Bien que la plupart des fonctions que nous rencontrerons seront continues, la limite de la définition 2 existe également lorsque f présente un nombre fini de discontinuités réductibles ou par saut (pas une infinité de discontinuités) (voyez la section 2.4). L'intégrale définie de telles fonctions est aussi définie.

REMARQUE 4 ● La somme

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

présente dans la définition 2 porte le nom de **somme de Riemann**, d'après le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866). Nous savons que dans le cas où f est positive, la somme de Riemann est égale à la somme des aires des rectangles d'approximation (voyez la figure 1). La comparaison de la définition 2 avec la définition de l'aire dans la section 5.1 mène à conclure que l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ peut être interprétée comme l'aire sous la courbe $y = f(x)$ depuis a jusqu'à b (voyez la figure 2).

Bernhard Riemann fit son doctorat sous la direction du très célèbre Gauss à l'université de Göttingen où il resta pour y enseigner. Gauss, qui n'avait pas l'habitude de faire l'éloge d'autres mathématiciens, trouvait Riemann « créatif, actif, l'esprit vraiment mathématique et une originalité extraordinairement fertile ». Riemann est l'auteur de la définition 2 que nous avons donnée de l'intégrale. Il apporta également une contribution remarquable à la théorie des fonctions d'une variable complexe, à la physique mathématique, à la théorie des nombres et aux fondements de la géométrie. C'est le concept général d'espace et de géométrie qu'avait eu Riemann qui s'avéra, cinquante ans plus tard, le plus adéquat pour la théorie de la relativité d'Einstein. Toute sa vie, Riemann souffrit d'une mauvaise santé et il mourut de tuberculose à 39 ans.

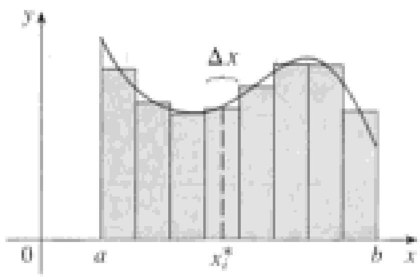


FIGURE 1
Lorsque $f(x) \geq 0$, la somme de Riemann $\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ est égale à la somme des aires des rectangles.

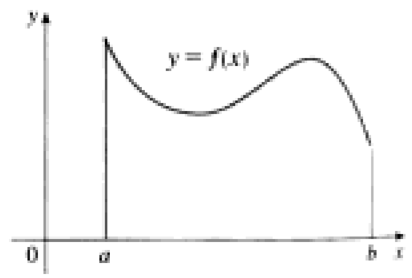


FIGURE 2
Lorsque $f(x) \geq 0$, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ vaut l'aire sous la coube $y = f(x)$ depuis a jusqu'à b.

Au cas où f prend à la fois des valeurs positives et négatives, comme dans la figure 3, la somme de Riemann additionne les aires des rectangles qui se trouvent au-dessus de l'axe Ox et retranche les aires des rectangles qui se trouvent sous l'axe Ox (les aires des rectangles jaunes *moins* les aires des rectangles bleus). Après passage à la limite, la situation est celle de la figure 4. Une intégrale définie peut être interprétée comme une différence d'aires :

$$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2,$$

où A_1 est l'aire de la région sous la courbe f et au-dessus de l'axe Ox et où A_2 est l'aire de la région sous l'axe Ox et au-dessus de la courbe f.

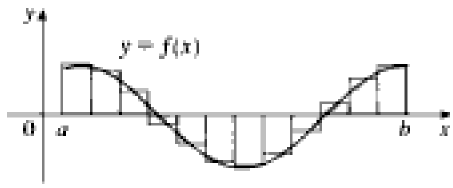


FIGURE 3

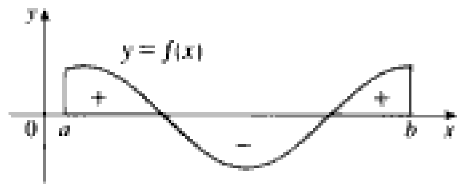


FIGURE 4

EXEMPLE 1 ■ Exprimez

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [x_i^3 + x_i \sin x_i]\Delta x$$

comme une intégrale sur l'intervalle $[0, \pi]$.

SOLUTION En comparant la limite proposée avec celle de la définition 2, on voit qu'elles sont identiques si on choisit

$$f(x) = x^3 + x\sin x \qquad \text{et} \qquad x_i^* = x_i.$$

(Ainsi les x_i^* sont les extrémités droites des sous-intervalles et la limite proposée prend la forme de l'équation 3). L'intervalle donné fait que $a = 0$ et $b = \pi$. Dès lors, selon la définition 2 ou l'équation 3, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [x_i^3 + x_i \sin x_i]\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x\sin x)dx.$$

Apprendre à reconnaître des limites de sommes comme des intégrales, comme nous venons de le faire dans l'exemple 1, est une compétence importante lorsque par la suite on se sert de l'intégrale définie dans des situations physiques. Lorsque Leibniz fit choix de la notation aujourd'hui classique pour désigner une intégrale, il tint compte des ingrédients du processus de passage à la limite. De façon générale, quand on écrit

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx,$$

on remplace $\lim \sum$ par $\int$, x_i^* par x et Δx par dx.

■ Calculer des intégrales

Calculer une intégrale définie à partir de sa définition nécessite forcément de manipuler des sommes. Voici trois formules qui donnent le résultat des sommes de puissances d'entiers positifs. Il est possible que vous ayez rencontré la formule 4 dans un cours d'algèbre. Les formules 5 et 6 ont été citées dans la section 5.1.

4 $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

5 $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6 $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Les autres formules sont de simples règles de calcul avec le symbole $\sum$:

7 $$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

8 $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

9 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

10 $$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Démontrer les formules 7-10 consiste à écrire en extension chaque membre de l'égalité. Le membre de gauche de l'équation 8 s'écrit

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n,$$

et le membre de droite,

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

Ces deux expressions sont égales en vertu de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

EXEMPLE 2 ■

a) Calculez la somme de Riemann de la fonction $f(x) = x^3 - 6x$ en choisissant les extrémités droites comme x_i^* et $a = 0$, $b = 3$ et $n = 6$.

b) Calculez la valeur de $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$.

SOLUTION

a) Chaque sous-intervalle mesure

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

et les extrémités droites sont $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1{,}5$, $x_4 = 2$, $x_5 = 2{,}5$ et $x_6 = 3$. Alors, la somme de Riemann s'écrit

$$\begin{aligned} D_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0{,}5)\,\Delta x + f(1)\,\Delta x + f(1{,}5)\,\Delta x + f(2)\,\Delta x + f(2{,}5)\,\Delta x + f(3)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2{,}875 - 5 - 5{,}625 - 4 + 0{,}625 + 9) \\ &= -3{,}9375 \end{aligned}$$

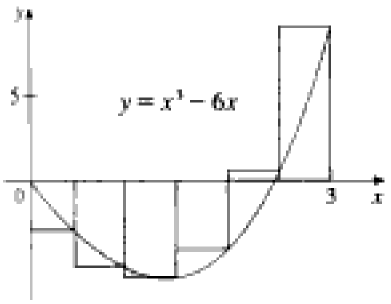


FIGURE 5

Remarquez que f n'est pas toujours positive sur l'intervalle considéré et donc que la somme de Riemann n'est pas égale à la somme des aires des rectangles. Elle vaut la somme des aires des rectangles jaunes (au-dessus de l'axe Ox) moins la somme des aires des rectangles bleus (sous l'axe Ox) dans la figure 5.

b) Si les sous-intervalles sont au nombre de n, leur largeur est égale à

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n},$$

et $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$ et, en général, $x_i = 3i/n$. Comme nous choisissons les extrémités droites, c'est la formule 3 qui conduit à

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(Équation 8 avec } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(Équations 10 et 8)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6{,}75$$

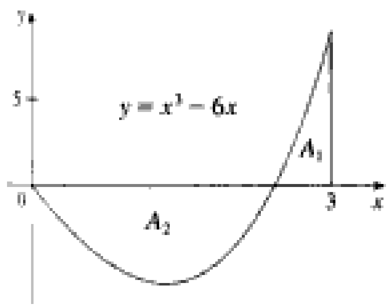


FIGURE 6

Si cette intégrale ne peut pas être interprétée comme une aire du fait que f prend des valeurs positives et négatives, elle représente quand même la différence des aires A_1 et A_2, que montre la figure 6.

La figure 7 illustre la somme de Riemann droite D_n (appelons ainsi la somme de Riemann construite sur les extrémités droites) pour $n = 40$. La table présente quelques valeurs de D_n pour des valeurs de plus en plus grandes de n, laissant ainsi prévoir la convergence des sommes de Riemann vers la valeur exacte $-6{,}75$ de l'intégrale lorsque $n \to \infty$.

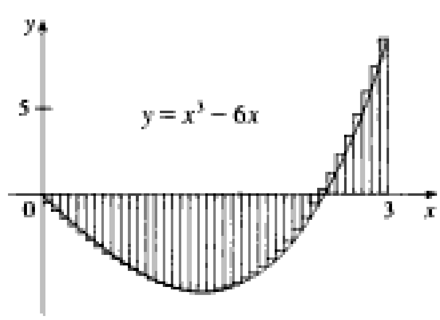


FIGURE 7
$D_{40} \approx -6{,}3998$

n	D_n
40	$-6{,}3998$
100	$-6{,}6130$
500	$-6{,}7229$
1000	$-6{,}7365$
5000	$-6{,}7473$

Il existe une méthode beaucoup plus simple pour calculer l'intégrale de l'exemple 2, mais elle s'appuie sur le Théorème de calcul de l'intégrale définie, qui ne sera présenté que dans la section 5.3.

EXEMPLE 3 ■

a) Établissez une expression de $\int_1^3 e^x\,dx$ sous forme d'une limite de sommes.

b) Calculez cette expression à l'aide d'un logiciel de calcul algébrique.

Comme $f(x) = e^x$ est positive, l'intégrale de l'exemple 3 est égale à l'aire de la région ombrée dans la figure 8.

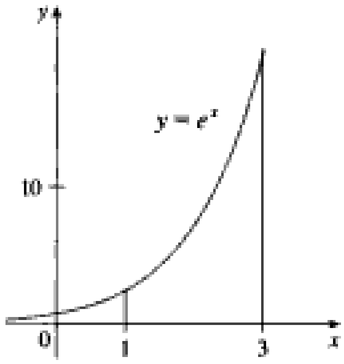


FIGURE 8

SOLUTION

a) Ici, $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$ et

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}.$$

Aussi, $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$ et

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}.$$

Conformément à l'équation 3, on a

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}.$$

b) Un logiciel de calcul algébrique est capable de simplifier une telle somme et fournit

Un logiciel de calcul algébrique peut trouver une expression explicite de cette somme car ses termes forment une suite géométrique. La limite pourrait être obtenue par l'application de la Règle de l'Hospital.

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}.$$

Il en donne également sur demande la limite :

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e.$$

EXEMPLE 4 ■ En regardant les intégrales suivantes comme des aires, déterminez leur valeur.

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^3 (x-1)\,dx.$

SOLUTION

a) Comme $f(x) = \sqrt{1-x^2} \geqslant 0$, cette intégrale correspond à l'aire sous la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ depuis 0 jusqu'à 1. Mais, puisque $y^2 = 1 - x^2$, on a aussi $x^2 + y^2 = 1$ et on reconnaît que le graphique de f est le quart de cercle de rayon 1 de la figure 9. Par conséquent,

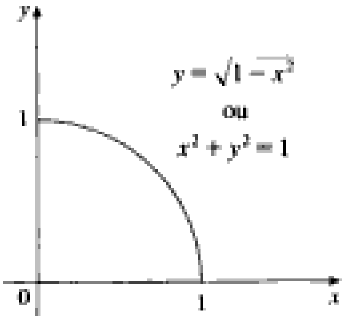


FIGURE 9

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

(Dans la section 5.5, nous pourrons *démontrer* que l'aire d'un disque de rayon r mesure πr^2.)

b) Le graphique de $y = x - 1$ est la droite de pente 1 que vous voyez dans la figure 10. L'intégrale est donc égale à la différence des aires A_1 et A_2 des deux triangles :

$$\int_0^3 (x-1)dx = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) - \frac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1{,}5.$$

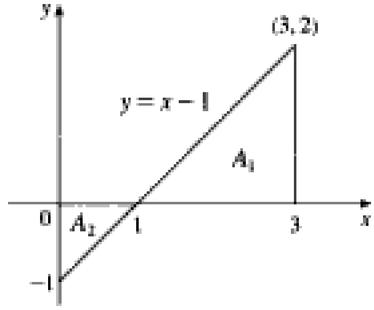


FIGURE 10

■ La Méthode du point médian

Pour faciliter le calcul de la limite, on a souvent choisi le point x_i^* à l'extrémité droite du $i^{ème}$ sous-intervalle. Mais si l'objectif est de calculer une valeur approchée d'une intégrale, il vaut mieux choisir x_i^* au milieu de l'intervalle, point noté $\bar{x}_i$. Toute somme de Riemann est une approximation d'une intégrale, mais avec le choix du point médian, il s'agit de l'approximation suivante.

> **Méthode du point médian**
>
> $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x = \Delta x[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$
>
> où
>
> $$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$
>
> et
>
> $$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{milieu de } [x_{i-1}, x_i].$$

EXEMPLE 5 ■ Calculer une approximation de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ par la Méthode du point médian avec $n = 5$.

SOLUTION Les extrémités des cinq sous-intervalles sont 1, 1,2, 1,4, 1,6, 1,8 et 2 et donc les points médians sont 1,1, 1,3, 1,5, 1,7 et 1,9. Chaque sous-intervalle mesure $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$. La Méthode du point médian conduit au calcul suivant :

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}7} + \frac{1}{1{,}9}\right)$$

$$\approx 0{,}691908$$

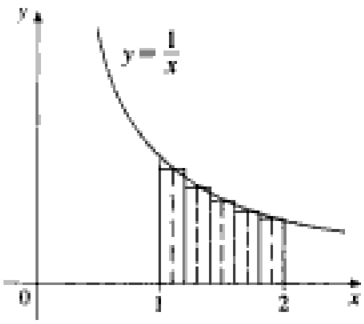


FIGURE 11

Comme $f(x) = 1/x > 0$ pour $1 \leqslant x \leqslant 2$, l'intégrale vaut la mesure d'une aire et l'approximation fournie par la Méthode du point médian est égale à la somme des aires des rectangles de la figure 11.

Pour le moment, nous ne savons rien du degré de précision de l'approximation calculée dans l'exemple 5, mais dans la section 5.8 nous étudierons une méthode d'estimation de l'erreur commise lors de l'utilisation de la Méthode du point médian. En même temps, nous aborderons d'autres façons de calculer approximativement une intégrale définie.

La figure 12 montre les rectangles dont les aires sont additionnées ou soustraites par la Méthode du point médian appliquée à l'intégrale de l'exemple 2. La valeur $M_{40} \approx -6{,}7563$ est beaucoup plus proche de la valeur exacte $-6{,}75$ que la règle de l'extrémité droite, $D_{40} \approx -6{,}3998$, illustrée dans la figure 7.

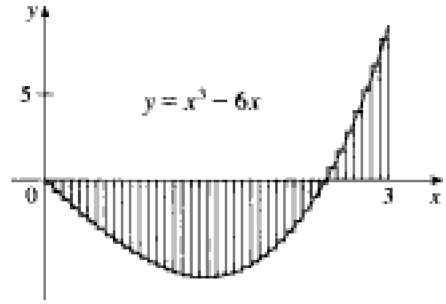


FIGURE 12
$M_{40} \approx -6{,}7563$

■ Propriétés de l'intégrale définie

Nous énonçons maintenant quelques propriétés de base des intégrales qui vont faciliter leur calcul. Nous faisons l'hypothèse que les fonctions f et g sont continues.

Propriétés de l'intégrale

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ où c est une constante quelconque

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ où c est une constante quelconque

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

La propriété 1 certifie que l'intégrale d'une fonction constante $f(x) = c$ est égale à la constante multipliée par la longueur de l'intervalle. Au cas où $c > 0$ et $a < b$, c'était escompté puisque $c(b-a)$ est la mesure de l'aire du rectangle dans la figure 13.

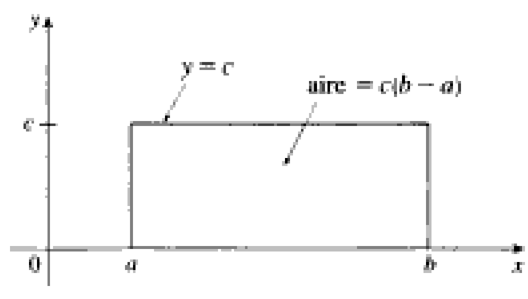


FIGURE 13
$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

La propriété 2 dit que l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales. Pour des fonctions positives, cela signifie que l'aire de la région sous $f + g$

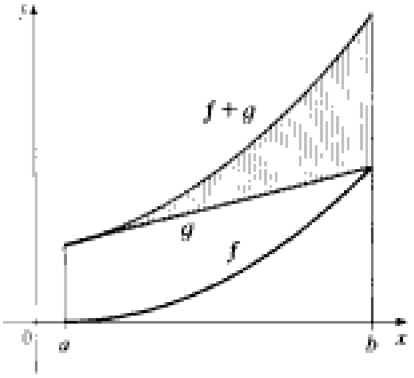


FIGURE 14

$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

vaut l'aire de la région sous f plus l'aire de la région sous g. La figure 14 nous aide à comprendre pourquoi c'est vrai : vu comment s'effectue l'addition graphique, les segments verticaux correspondants ont même longueur. De façon générale, la propriété 2 découle de l'équation 3 et du fait que la limite d'une somme est égale à la somme des limites :

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

La propriété 3 apparaît intuitivement acceptable si on se souvient que multiplier une fonction par un nombre positif c étire ou rétrécit son graphique verticalement d'un facteur c. Par conséquent, chaque rectangle d'approximation est étiré ou rétréci d'autant et l'aire est elle-même affectée du facteur c.

La propriété 3 certifie que l'intégrale d'une fonction multipliée par une constante est égale à l'intégrale de la fonction multipliée par la constante et sa démonstration se fait de manière semblable. En d'autres mots, une constante (*seulement* une constante) peut sortir devant un signe d'intégration. Pour démontrer la propriété 4, il suffit d'écrire $f - g = f + (-g)$ et d'utiliser les proriétés 2 et 3 avec $c = -1$.

EXEMPLE 6 ■ Utilisez les propriétés de l'intégrale pour calculer $\int_0^1 (4 + 3x^2)dx$.

SOLUTION Selon les propriétés 2 et 3, on a

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2 dx = \int_0^1 4dx + 3\int_0^1 x^2 dx.$$

Or, par la propriété 1, on sait que

$$\int_0^1 4dx = 4(1 - 0) = 4,$$

et suite à l'exemple 2 dans la section 5.1, que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Dès lors,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 (4 + 3x^2)dx &= \int_0^1 4dx + 3\int_0^1 x^2 dx \\
&= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5
\end{aligned}
$$

Une dernière propriété nous explique comment combiner des intégrales de la même fonction sur des intervalles adjacents :

5. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

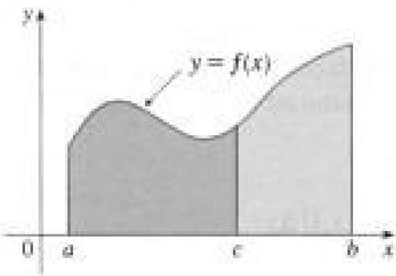


FIGURE 15

La démonstration générale n'est pas facile, mais dans le cas où $f(x) \geqslant 0$ et $a < c < b$, la propriété 5 se lit comme l'interprétation géométrique de la figure 15 : l'aire sous $y = f(x)$ depuis a jusqu'à c plus l'aire sous $y = f(x)$ depuis c jusqu'à b est égale à l'aire totale depuis a jusqu'à b.

EXEMPLE 7 ■ Sachant que $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ et que $\int_0^8 f(x)dx = 12$, calculez $\int_8^{10} f(x)dx$.

SOLUTION D'après la propriété 5, on a

$$\int_0^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx.$$

D'où

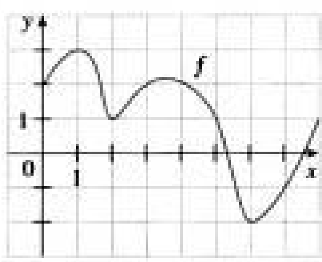
$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5.$$

5.2 Exercices

1. Calculez la somme de Riemann de la fonction $f(x) = 2 - x^2$, pour l'intervalle $[0, 2]$ découpé en 4 sous-intervalles et les points choisis aux extrémités droites. Faites un croquis qui explique ce que la somme de Riemann représente.

2. Calculez la somme de Riemann de la fonction $f(x) = \ln x - 1$, pour l'intervalle $[1, 4]$ découpé en 6 sous-intervalles et les points choisis aux extrémités gauches. (Donnez la réponse avec 6 décimales exactes.) Que représente la somme de Riemann ? Faites un croquis pour illustrer.

3. Voici le graphique d'une fonction f. Estimez $\int_0^8 f(x)dx$ en divisant l'intervalle en quatre et en choisissant les points a) droits, b) gauches, c) médians dans chaque sous-intervalles.



4. Voici dans la table les valeurs d'une fonction tirées d'une expérience. Utilisez ces valeurs pour estimer $\int_0^6 f(x)dx$ en considérant trois sous-intervalles égaux et a) les extrémités droites, b) les extrémités gauches, c) les points médians. Sachant que la fonction est décroissante, pouvez-vous dire si les estimations sont des sous-estimations ou des surestimations de la valeur exacte ?

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	9,3	9,0	8,3	6,5	2,3	−7,6	−10,5

5-8 ■ Calculez une valeur approximative de chaque intégrale par la Méthode du point médian pour la valeur de n indiquée. Arrondissez la réponse à la quatrième décimale.

5. $\int_0^5 x^3\,dx, \quad n = 5$

6. $\int_1^3 \frac{1}{2x - 7}\,dx, \quad n = 4$

7. $\int_1^2 \sqrt{1 + x^2}\,dx, \quad n = 10$

8. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx, \quad n = 4$

LCS **9.** Si vous disposez d'un logiciel de calcul symbolique qui effectue les approximations par la Méthode du point médian et trace les rectangles correspondants (ce sont les commandes middlesum et middlebox en Maple), vérifiez la réponse de l'exercice 7 et illustrez-la d'un dessin. Répétez le calcul en prenant $n = 20$ et $n = 30$.

10. À l'aide d'une calculatrice programmable ou d'un ordinateur, calculez les sommes de Riemann à droite et à gauche pour la fonction $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ sur l'intervalle $[1, 2]$ avec $n = 100$. Expliquez pourquoi ces estimations situent l'intégrale dans les limites

$$1{,}805 < \int_1^2 \sqrt{1 + x^2}\,dx < 1{,}815.$$

Déduisez-en que l'approximation fournie par la Méthode du point médian pour $n = 10$ à l'exercice 7 est correcte jusqu'à la deuxième décimale.

11-14 ■ Écrivez la limite sous la forme d'une intégrale définie relative à l'intervalle indiqué.

11. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \cos x_i \Delta x, \quad [0, \pi]$

12. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{tg} x_i}{x_i} \Delta x, \quad [2, 4]$

13. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [2(x_i^*)^2 - 5x_i^*]\,\Delta x, \quad [0, 1]$

14. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^*}\,\Delta x, \quad [1, 4]$

15-17 ■ Écrivez l'intégrale sous la forme de la définition (3).

15. $\int_0^2 (2 - x^2)\,dx$

16. $\int_0^5 (1 + 2x^3)\,dx$

17. $\int_1^2 x^3\,dx$

18. a) Calculez une approximation de l'intégrale $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$ en utilisant une somme de Riemann à droite et $n = 8$.

b) Dessinez une figure semblable à la figure 3 pour illustrer l'approximation de la partie a).

c) Employez l'équation 3 pour calculer $\int_0^4 (x^2 - 3x)dx$.

d) Interprétez l'intégrale comme une différence d'aires et illustrez avec une figure semblable à la figure 4.

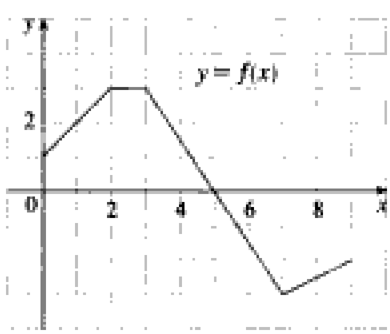
19-20 ■ Exprimez l'intégrale comme une limite de sommes. Ensuite, calculez-la grâce à un logiciel de calcul symbolique qui donne à la fois la somme et la limite.

19. $\int_0^{\pi} \sin 5x\,dx$ **20.** $\int_2^{10} x^6\,dx$

21. Voici le graphique de f. Calculez chaque intégrale en l'interprétant en termes d'aires.

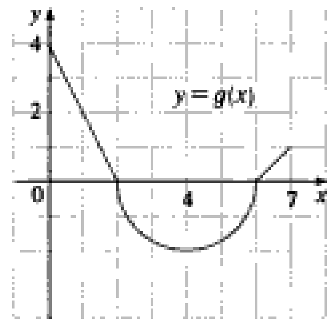
a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

c) $\int_5^7 f(x)\,dx$ d) $\int_0^9 f(x)\,dx$



22. Le graphique de g se compose de deux segments de droite et d'un demi-cercle. Sachant cela, calculez chaque intégrale.

a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



23-28 ■ Déterminez la valeur de chaque intégrale en l'interprétant en termes d'aires.

23. $\int_1^3 (1 + 2x)\,dx$ **24.** $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

25. $\int_{-3}^0 (1 + \sqrt{9 - x^2})\,dx$ **26.** $\int_{-1}^3 (2 - x)\,dx$

27. $\int_{-2}^2 (1 - |x|)\,dx$ **28.** $\int_0^3 |3x - 5|\,dx$

29-30 ■ Écrivez la somme ou la différence donnée en une seule intégrale de la forme $\int_a^b f(x)dx$.

29. $\int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^6 f(x)\,dx + \int_6^{12} f(x)\,dx$

30. $\int_2^{10} f(x)\,dx - \int_2^7 f(x)\,dx$

31. Si $\int_2^8 f(x)dx = 1{,}7$ et $\int_5^8 f(x)dx = 2{,}5$, que vaut $\int_2^5 f(x)dx$?

32. Si $\int_0^1 f(t)dt = 2$, $\int_0^4 f(t)dt = -6$ et $\int_3^4 f(t)dt = 1$, que vaut $\int_1^3 f(t)dt$?

33. Dans l'exemple 2 de la section 5.1, on a montré que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Utilisez ce résultat et les propriétés des intégrales pour calculer $\int_0^1 (5 - 6x^2)dx$.

34. Utilisez les propriétés des intégrales et le résultat de l'exemple 3 pour calculer $\int_1^3 (2e^x - 1)dx$.

35. Utilisez le résultat de l'exemple 3 pour calculer $\int_1^3 e^{x+2}dx$.

36. Exprimez la limite suivante comme une intégrale définie :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^4}{n^5}.$$

5.3 Le calcul de l'intégrale définie

Dans la section 5.2, nous avons calculé des intégrales à partir de la définition qui se présente sous la forme d'une limite de sommes de Riemann et nous avons pu nous rendre compte à quel point cette façon de faire est parfois longue et laborieuse. Isaac Newton découvrit une méthode beaucoup plus simple pour calculer des intégrales et, quelques années plus tard, Leibniz fit la même découverte. Ils s'aperçurent qu'il leur était possible de calculer $\int_a^b f(x)dx$ s'ils arrivaient à connaître une primitive F de f. Leur découverte est une partie du théorème fondamental du calcul intégral, étudié dans la section suivante.

Théorème de calcul de l'intégrale définie Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f, c'est-à-dire telle que $F' = f$.

Le théorème établit que dès qu'une primitive F de f est connue, le nombre $\int_a^b f(x)dx$ peut être calculé simplement en soustrayant les valeurs de F aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$. Il est d'ailleurs surprenant que le nombre $\int_a^b f(x)dx$, qui avait été défini par une procédure compliquée impliquant toutes les valeurs de $f(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, puisse maintenant être calculé en connaissant seulement les valeurs de F aux deux points a et b.

Par exemple, depuis la section 4.9, nous savons que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de $f(x) = x^2$ et donc, suivant le Théorème de calcul de l'intégrale définie,

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

De la comparaison avec les calculs effectués dans l'exemple 2 de la section 5.1 pour trouver l'aire sous la parabole $y = x^2$ depuis 0 jusqu'à 1, il ressort que le Théorème de calcul de l'intégrale définie constitue un outil simple et puissant.

Bien que ce théorème puisse à première vue sembler surprenant, il devient acceptable lorsqu'on le place dans le contexte de la physique. Si $v(t)$ désigne la vitesse d'un mobile et $s(t)$ sa position au moment t, alors $v(t) = s'(t)$ et s est une primitive de v. Dans la section 5.1, on a considéré un mobile qui se déplaçait toujours dans la direction positive et on a fait la conjecture que l'aire sous la courbe de vitesse était égale à la distance parcourue. En symbole :

$$\int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a).$$

C'est exactement ce que signifie le Théorème de calcul de l'intégrale définie dans ce contexte.

Démonstration du théorème de calcul de l'intégrale définie Par les points $x_0(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n(= b)$, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta x = (b - a)/n$. On dispose d'une primitive F de f. La variation totale de F entre a et b peut être exprimée, en additionnant et soustrayant les mêmes termes, comme la somme des variations de F sur chaque sous-intervalle :

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_2) \\ &\qquad - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]\end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis a été présenté dans la section 4.3.

Vu que F est continue (puisqu'elle est dérivable) on peut, par application du théorème des accroissements finis sur chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, affirmer l'existence d'un nombre x_i^* entre x_{i-1} et x_i tel que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(x_i^*)\Delta x.$$

De là,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

On prend maintenant la limite de cette expression pour n tendant vers l'infini. Comme le membre de gauche est une constante tandis que le membre de droite est une somme de Riemann de la fonction f, on a

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Lorsqu'on applique le théorème de calcul de l'intégrale définie, on emploie la notation

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

et donc on écrit

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{où} \quad F' = f.$$

On trouve aussi les notations $F(x)\Big|_a^b$ ou $F(x)\Big]_a^b$.

EXEMPLE 1 ■ Calculez $\int_1^3 e^x\, dx$.

SOLUTION Comme $F(x) = e^x$ est une primitive de $f(x) = e^x$, le Théorème de calcul de l'intégrale définie conduit à

Pour appliquer le théorème de calcul de l'intégrale définie, on prend une primitive particulière F de f. Il n'est pas nécessaire de prendre la primitive sous sa forme générale.

$$\int_1^3 e^x\, dx = e^x\Big]_1^3 = e^3 - e.$$

La comparaison des calculs de l'exemple 1 avec ceux de l'exemple 3 dans la section 5.2 montre à nouveau que le Théorème de calcul de l'intégrale définie est une méthode beaucoup plus courte.

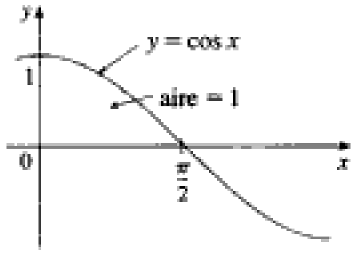


FIGURE 1

EXEMPLE 2 ■ Calculez l'aire de la région sous la courbe cosinus depuis 0 jusqu'à b, où $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUTION Comme $F(x) = \sin x$ est une primitive de $f(x) = \cos x$,

$$A = \int_0^b \cos x\, dx = \sin x\Big]_0^b = \sin b - \sin 0 = \sin b.$$

En particulier, lorsque $b = \pi/2$, l'aire de la région sous la courbe cosinus depuis 0 jusqu'à $\pi/2$ vaut $\sin(\pi/2) = 1$ (voyez la figure 1).

Lorsqu'en 1635 le mathématicien français Gilles de Roberval réussit à calculer l'aire sous le sinus et le cosinus, il relevait un défi difficile qui demandait une bonne dose d'ingéniosité. En l'absence du théorème de calcul de l'intégrale définie, il faut calculer une limite compliquée de sommes impliquant d'obscures identités trigonométriques (ou faire appel à un logiciel de calcul algébrique comme dans l'exercice 17 de la section 5.1). Si l'on pense qu'en 1635 l'outil de la limite n'était pas encore disponible, on mesure mieux encore la difficulté surmontée par Roberval . Mais, en 1660 et 1670, après que Newton et Leibniz eurent découvert le théorème de calcul de l'intégrale définie, ce problème devint très facile à résoudre, comme vous avez pu le constater dans l'exemple 2.

■ Les intégrales indéfinies

Il faut une notation convenable pour les primitives qui en rende l'utilisation aisée. On adopte habituellement la notation $\int f(x)dx$ à cause de la relation que le Théorème de calcul de l'intégrale définie établit entre intégrales et primitives et on parle d'**intégrale indéfinie**. Donc

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) \qquad \text{signifie} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Il est important de faire la distinction entre intégrale définie et indéfinie. Une intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est un nombre alors qu'une intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ est une fonction. La relation qui les lie est celle du théorème de calcul de l'intégrale définie. Si f est continue sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx\Big]_a^b.$$

On se souvient avoir vu dans la section 4.9 que si F était une primitive de f sur un intervalle I, alors la forme générale de toutes les primitives de f sur I était $F + C$, où C est une constante arbitraire. Par exemple, on peut écrire

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

(sur tout intervalle qui ne contient pas 0) parce que $(d/dx)\ln|x| = 1/x$. C'est ainsi qu'une intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ désigne parfois une primitive particulière de f, parfois la famille entière des primitives de f (une par valeur de C).

Pour que le Théorème de calcul de l'intégrale définie soit efficace, il faut disposer de primitives. Voilà pourquoi nous reproduisons dans la notation des intégrales indéfinies la table des primitives de la section 4.9, complétée de quelques autres formules. Chaque formule est vérifiable : la dérivée du membre de droite est égale à la fonction sous le signe d'intégration. Par exemple,

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \text{parce que} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x + C) = \sec^2 x.$$

Nous convenons qu'une formule générale d'intégrale indéfinie n'est valable que sur un intervalle.

1 Table des intégrales indéfinies

$$\int c f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C \qquad \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Arctg} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin} x + C$$

La figure 2 présente l'intégrale indéfinie de l'exemple 3 pour quelques valeurs de C. L'intersection de la courbe avec l'axe Oy correspond à la valeur de C.

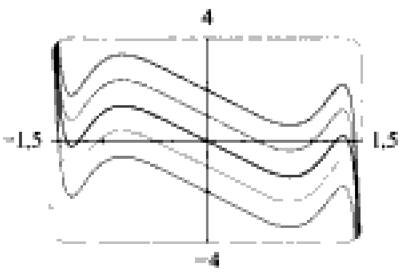


FIGURE 2

EXEMPLE 3 ■ Calculez l'intégrale indéfinie

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx.$$

SOLUTION La table 1 jointe à notre convention conduit à

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\frac{x^5}{5} - 2\operatorname{tg} x + C$$

$$= 2x^5 - 2\operatorname{tg} x + C.$$

Cette réponse peut être vérifiée par dérivation.

EXEMPLE 4 ■ Calculez $\int_0^3 (x^3 - 6x)dx$

SOLUTION En utilisant la table 1 et le théorème de calcul de l'intégrale définie, on a

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Big]_0^3 \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right) \\ &= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6{,}75.\end{aligned}$$

Comparez ce calcul avec celui de l'exemple 2b) dans la section 5.2.

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ et interprétez le résultat en termes d'aires.

SOLUTION Le Théorème de calcul de l'intégrale définie conduit à

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx &= 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\,\mathrm{Arctg}\,x\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\,\mathrm{Arctg}\,x\Big]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\,\mathrm{Arctg}\,2 - 0 \\ &= -4 + 3\,\mathrm{Arctg}\,2.\end{aligned}$$

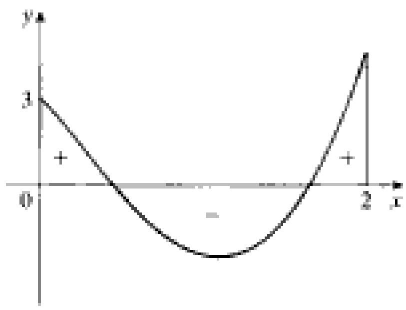


FIGURE 3

Ceci est la valeur exacte de l'intégrale. Si l'on veut la réponse sous forme décimale approchée, il faut employer une calculatrice qui évalue Arctg 2. La voici.

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0{,}67855.$$

La courbe qui représente l'intégrande est dessinée dans la figure 3. On sait, depuis la section 5.2, que la valeur obtenue peut être interprétée comme la somme des aires marquées d'une signe + moins l'aire marquée d'un signe −.

EXEMPLE 6 ■ Calculez $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt.$

SOLUTION Il faut commencer par écrire la fonction à intégrer sous une forme plus simple en effectuant la division :

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt &= \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt \\ &= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 \\ &= 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9 \\ &= \left[2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right) \\ &= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}\end{aligned}$$

■ Applications

Le Théorème de calcul de l'intégrale définie dit que si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f. Comme cela signifie que $F' = f$, l'équation s'écrit aussi

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Or, $F'(x)$ représente la vitesse de variation de $y = F(x)$ par rapport à x et $F(b) - F(a)$, la variation totale de y lorsque x passe de a à b. Le Théorème de calcul de l'intégrale définie peut alors être formulé comme suit.

Théorème de variation totale L'intégrale d'un taux de variation est la variation totale :

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Cette formulation s'applique à tous les taux de variation rencontré dans les domaines des sciences sociales et naturelles dans la section 3.3. Voici quelques exemples.

- Si $V(t)$ représente la quantité d'eau présente dans un réservoir au moment t, la dérivée $V'(t)$ représente le débit avec lequel l'eau entre dans le réservoir au moment t. Alors

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

calcule la variation totale du volume d'eau entre les instants t_1 et t_2.

- Si $[C](t)$ désigne la concentration du produit d'une réaction chimique au moment t, alors le taux de réaction est donné par la dérivée $d[C]/dt$ et

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[C]}{dt}\,dt = [C](t_2) - [C](t_1)$$

représente la différence de concentration C entre les moments t_1 et t_2.

- Si $m(x)$ désigne la masse d'une tige mesurée depuis son extrémité gauche jusqu'à x, la densité linéaire est donnée par $\rho(x) = m'(x)$. Aussi

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

représente la masse du tronçon de la tige compris entre $x = a$ et $x = b$.

- Si dn/dt est le taux d'accroissement d'une population, alors

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

est l'accroissement total de la population sur la période qui va de t_1 à t_2.

■ Si $C(x)$ est le coût de production de x unités d'un bien, alors $C'(x)$ est le coût marginal et

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

est le coût supplémentaire total qu'entraîne le passage du niveau de production x_1 au niveau de production x_2.

■ Si $s(t)$ désigne la position au moment t d'un mobile qui se déplace en ligne droite, alors sa vitesse est $v(t) = s'(t)$ et

2 $$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

est le changement de position, ou *déplacement*, du mobile sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$. Dans la section 5.1 on avait conjecturé ce résultat pour un mobile qui se déplaçait dans le sens positif, maintenant il est démontré que ce résultat est toujours vrai.

■ Au cas où on souhaite connaître la distance parcourue pendant un intervalle de temps, il faut distinguer les intervalles durant lesquels $v(t) \geqslant 0$ (le mobile se déplace vers la droite) de ceux durant lesquels $v(t) \leqslant 0$ (le mobile se déplace vers la gauche). De toutes façons, la distance est obtenue en intégrant $|v(t)|$. Donc

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = \text{la distance totale parcourue.}$$

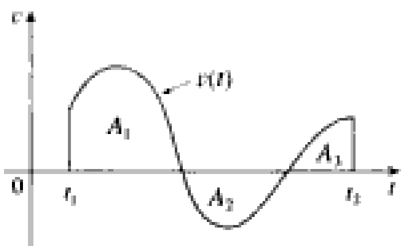


FIGURE 4
déplacement $= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$

distance $= \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$

La figure 4 illustre comment déplacement et distance parcourue peuvent être interprétés en termes d'aires sous la courbe vitesse.

■ Comme l'accélération d'un mobile est égale à $a(t) = v'(t)$,

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

représente la variation de la vitesse entre les instants t_1 et t_2.

EXEMPLE 7 ■ Une particule se déplace le long d'une droite à une vitesse donnée à chaque instant t par $v(t) = t^2 - t - 6$ (mesurée en mètres par seconde).

a) Calculez le déplacement de la particule entre $t = 1$ et $t = 4$.

b) Calculez la distance parcourue pendant cet intervalle de temps.

SOLUTION

a) Selon l'équation 2, le déplacement est égal à

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}.$$

Ce qui signifie que la particule s'est déplacée de 4,5 m vers la gauche.

b) En écrivant $v(t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2)$, on remarque que $v(t) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[1, 3]$ et que $v(t) \geqslant 0$ sur $[3, 4]$. De ce fait, selon l'équation 3, la distance parcourue est égale à

L'intégration de la valeur absolue de $v(t)$ requiert la décomposition de l'intégrale en deux parties, l'une sur laquelle $v(t) \leqslant 0$ et l'autre sur laquelle $v(t) \geqslant 0$, selon la propriété 5 des intégrales énoncée à la section 5.2.

$$\begin{aligned}\int_1^4 |v(t)|\,dt &= \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt \\ &= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\ &= \frac{61}{6}\text{ m} \approx 10{,}17\text{ m.}\end{aligned}$$

EXEMPLE 8 ■ La figure 5 montre la puissance électrique fournie à la ville de San Francisco au cours de la journée du 19 septembre 1996 (P est mesurée en mégawatts et t en heures à partir de minuit). Estimez l'énergie consommée ce jour-là.

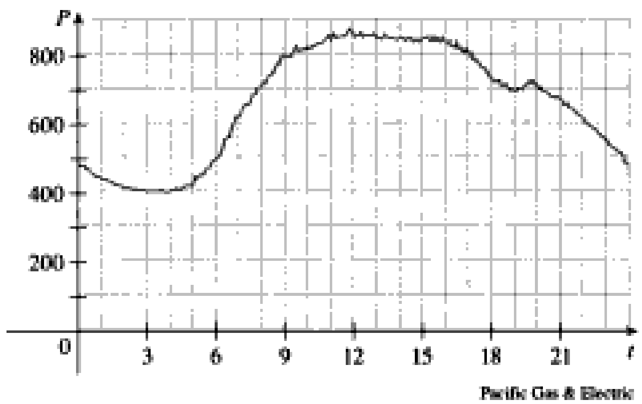


FIGURE 5

SOLUTION Comme la puissance est le taux de variation de l'énergie, ce qui s'écrit $P(t) = E'(t)$, le théorème de la variation totale permet de calculer la quantité totale d'énergie consommée le 19 septembre 1996,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

Une approximation de la valeur de cette intégrale provient de l'application de la Méthode du point médian sur chacun des 12 sous-intervalles de longueur $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t \\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850 \\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2) \\ &= 15\,840\end{aligned}$$

L'énergie utilisée se monte donc à 15 840 megawatts-heure environ.

Remarque à propos des unités.

D'où proviennent les unités dans lesquelles est exprimée l'énergie dans l'exemple 8 ? L'intégrale $\int_0^{24} P(t)dt$ est définie comme la limite des sommes de termes de la forme $P(t_i^*)\Delta t$. Or, $P(t_i^*)$ se mesure en mégawatts et Δt en heures. Donc, leur produit se mesure en magawatts-heure et la limite également. De façon générale, l'unité de mesure de $\int_a^b f(x)dx$ est le produit de l'unité de $f(x)$ par celle de x.

5.3 Exercices

1. Si $w'(t)$ représente le taux de croissance d'un enfant en kilos par an, que représente $\int_5^{10} w'(t)dt$?

2. L'intensité du courant qui passe dans un fil est définie comme la dérivée de la charge : $I(t) = Q'(t)$ (voyez l'exemple 3 dans la section 3.3). Quelle est la signification de $\int_a^b I(t)dt$?

3. Que représente $\int_0^{120} r(t)dt$, si $r(t)$ désigne le nombre de litres de pétrole qui s'échappent par minute d'un réservoir au temps t ?

4. L'effectif initial d'une ruche est de 100 abeilles et croît à raison de $n'(t)$ abeilles par semaine. Que représente $100 + \int_0^{15} n'(t)dt$?

5. Dans la section 4.7, on a défini la fonction recette marginale $R'(x)$ comme la dérivée de la fonction recette $R(x)$, où x est le nombre d'unités vendues. Que représente $\int_{1000}^{5000} R'(x)dx$?

6. Si $f(x)$ désigne la pente d'un sentier à x km de son point de départ, que représente $\int_3^5 f(x)dx$?

7-30 ■ Calculez l'intégrale.

7. $\int_{-2}^{4} (3x - 5)\, dx$

8. $\int_1^2 (5x^2 - 4x + 3)\, dx$

9. $\int_{-1}^{0} (2x - e^x)\, dx$

10. $\int_0^1 (y^9 - 2y^5 + 3y)\, dy$

11. $\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$

12. $\int_1^2 \dfrac{t^6 - t^2}{t^4}\, dt$

13. $\int_1^2 \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}\, dx$

14. $\int_0^2 (x^3 - 1)^2\, dx$

15. $\int_0^1 u(\sqrt{u} + \sqrt[3]{u})\, du$

16. $\int_1^8 \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

17. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin t\, dt$

18. $\int_0^{\pi/2} (\cos\theta + 2\sin\theta)\, d\theta$

19. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta$

20. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\, dx$

21. $\int_4^8 \dfrac{1}{x}\, dx$

22. $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x\, dx$

23. $\int_8^9 2^t\, dt$

24. $\int_{-e^2}^{-e} \dfrac{3}{x}\, dx$

25. $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{6}{1 + x^2}\, dx$

26. $\int_0^{0.5} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

27. $\int_1^e \dfrac{x^2 + x + 1}{x}\, dx$

28. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

29. $\int_{-2}^{3} |x^2 - 1|\, dx$

30. $\int_{-1}^{2} |x - x^2|\, dx$

31-34 ■ Faites un graphique qui vous permette d'estimer grossièrement l'aire de la région sous la courbe donnée. Calculez ensuite l'aire exacte.

31. $y = \sqrt[3]{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 27$

32. $y = x^{-4},\ 1 \leqslant x \leqslant 6$

33. $y = \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

34. $y = \sec^2 x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

35. Déterminez graphiquement les intersections de la courbe $y = x + x^2 - x^4$ avec l'axe Ox. À partir de ces estimations, calculez l'aire de la région qui se trouve sous la courbe et au-dessus de l'axe Ox.

36. Refaites l'exercice 35 pour la courbe $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

37-38 ■ Calculez l'intégrale et interprétez-la comme une différence d'aires. Faites un dessin du même type que celui de la figure 3.

37. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

38. $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \sin x\, dx$

39-40 ■ Vérifiez par dérivation que la formule est correcte.

39. $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

40. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C$

41-42 ■ Déterminez l'expression générale de la primitive. Illustrez en faisant apparaître les graphiques de plusieurs membres de la famille sur un même écran.

41. $\int x\sqrt{x}\, dx$

42. $\int (\cos x - 2\sin x)\, dx$

43-46 ■ Déterminez l'expression générale de la primitive.

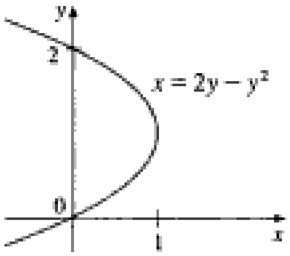
43. $\int (2 - \sqrt{x})^2\, dx$

44. $\int \sqrt{x}(x^2 - 1/x)\, dx$

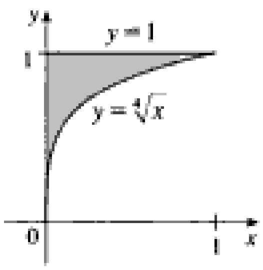
45. $\int (2x + \sec x \operatorname{tg} x)\, dx$

46. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$

47. L'aire de la région qui s'étend, de gauche à droite, de l'axe Oy à la parabole $x = 2y - y^2$ (la région ombrée de la figure) peut être calculée par $\int_0^2 (2y - y^2)dy$ (tournez votre tête dans le sens des aiguilles d'une montre et regardez la région comme située sous la courbe $x = 2y - y^2$ depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 2$). Calculez l'aire de cette région.



48. La frontière de la région ombrée se compose de l'axe Oy, de la droite $y = 1$ et de la courbe d'équation $y = \sqrt[4]{x}$. Déterminez l'aire de cette région en écrivant x comme une fonction de y et en intégrant par rapport à y (comme dans l'exercice 47).



49-50 ■ Connaissant la fonction vitesse (exprimée en m/s) d'un mobile qui se déplace en ligne droite, calculez a) la fonction déplacement et b) la distance parcourue pendant l'intervalle de temps indiqué.

49. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

50. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

51-52 ■ Connaissant la fonction accélération (exprimée en m/s^2) et la vitesse initiale d'un mobile qui se déplace en ligne droite, calculez a) la fonction vitesse en fonction du temps t et b) la distance parcourue pendant l'intervalle de temps indiqué.

51. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

52. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

53. La densité linéaire (mesurée en kg/m) d'une tige de 4 m est donnée par $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$, où x est la longueur en mètres depuis l'une des extrémités. Calculez la masse totale de la tige.

54. Une population d'animaux augmente annuellement à la vitesse de $200 + 50t$ (t est mesuré en années). Par quel facteur cette population est-elle multipliée entre la quatrième et la dixième année ?

55. La vitesse d'une voiture en mouvement est lue toutes les 10 secondes sur le tachymètre et notée dans une table. Estimez la distance parcourue par la voiture, en employant la Méthode du point médian.

t (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
v (km/h)	0	38	52	58	55	51	56	53	50	47	45

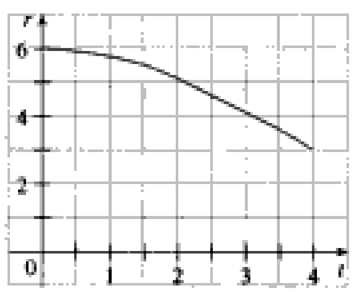
56. Le taux d'inflation est souvent défini comme la dérivée de l'indice des prix à la consommation, qui lui rend compte des prix d'un certain « panier de produits représentatifs » pour les consommateurs d'un centre urbain. La table reprend le taux d'inflation aux Etats-Unis tel qu'il a été calculé entre 1980 et 1994. Donnez une expression, sous la forme d'une intégrale, de l'accroissement total en pourcentage de l'indice des prix à la consommation pendant ces années-là. Calculez ensuite ce pourcentage en employant la Méthode du point médian.

t	$r(t)$
1980	13,5
1981	10,3
1982	6,2
1983	3,2
1984	4,3
1985	3,6
1986	1,9
1987	3,6

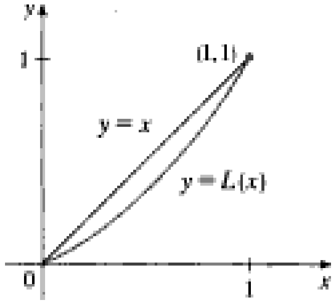
t	$r(t)$
1988	4,1
1989	4,8
1990	5,4
1991	4,2
1992	3,0
1993	3,0
1994	2,6

57. Le coût marginal de fabrication de x mètres d'un certain tissu est donné par $C'(x) = 3 - 0{,}01x + 0{,}000006x^2$ (en euros par mètre). Calculez l'augmentation globale du coût si la production passe de 2000 à 4000 mètres.

58. Le graphique montre la vitesse $r(t)$ (exprimée en litres par heure) à laquelle de l'eau fuit d'une citerne. Écrivez sous forme d'une intégrale la quantité totale d'eau qui a fui durant les quatre premières heures. Utilisez ensuite la Méthode du point médian pour l'estimer.



59. Les économistes se servent d'une distribution cumulative appelée *courbe de Lorenz* pour décrire la distribution des revenus des ménages dans une région donnée. Plus précisément, une courbe de Lorenz est définie sur $[0, 1]$, passe par $(0, 0)$ et $(1, 1)$, est continue, croissante et convexe. Les points de cette courbe sont obtenus en ordonnant tous les ménages selon leur revenu et en comptant le pourcentage de ceux qui ont un revenu inférieur ou égal à un pourcentage donné du revenu total de la région. Par exemple, le point $(a/100, b/100)$ appartient à la courbe de Lorenz si a % des ménages a un revenu inférieur ou égal à b % du revenu total. Une *égalité absolue* dans la distribution des revenus serait la situation dans laquelle a % des ménages recevraient a % du revenu total, auquel cas la courbe de Lorenz serait la droite $y = x$. L'aire située entre la courbe de Lorenz et la droite $y = x$ mesure l'écart de la distribution des revenus par rapport à l'égalité absolue. On appelle *coefficient d'inégalité* le rapport entre cette aire et l'aire sous $y = x$.



a) Démontrez que le coefficient d'inégalité vaut deux fois l'aire entre la courbe de Lorenz et la droite $y = x$, autrement dit

$$\text{coefficient d'inégalité} = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$$

b) La distribution de revenu d'une certaine région est caractérisée par la courbe de Lorenz d'équation

$$L(x) = \frac{5}{12}x^2 + \frac{7}{12}x.$$

Quel est le pourcentage du revenu total que se partagent les 50 % des ménages à plus bas revenu ? Calculez le coefficient d'inégalité.

60. Le 7 mai 1992, la navette spatiale *Endehaviour* a été envoyée dans le cadre de la mission STS-49 dans le but d'installer un nouveau moteur de démarrage au satellite de communication Intelstat. Le tableau, fourni par la NASA, donne les vitesses de la navette entre le moment du décollage et celui du largage des fusées de mise à feu.

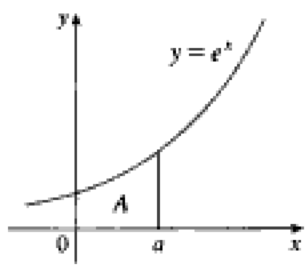
Étapes	Temps (s)	Vitesse (m/s)
Lancement	0	0
Début de la manœuvre de pivotement	10	56
Fin de la manœuvre de pivotement	15	97
Commande des gaz à 89%	20	136
Commande des gaz à 67%	32	226
Commande des gaz à 104%	59	403
Pression maximum	62	440
Larguage des fusées de mise à feu	125	1265

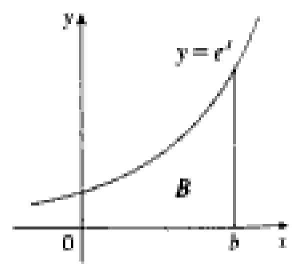
a) Utilisez les méthodes de la section 1.7 pour modéliser ces données par un polynôme du troisième degré.

b) Exploitez le modèle de la partie a) pour estimer la hauteur atteinte par *Endehaviour*, 125 s après son décollage.

61. On suppose que h est une fonction telle que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$ et $h''(2) = 13$. On suppose en outre que h'' est une fonction partout continue. Calculez $\int_1^2 h''(u)du$.

62. L'aire de la région B vaut trois fois celle de la région A. Exprimez b en fonction de a.





Sujet à découvrir

Les fonctions d'aires

1. a) Tracez la droite $y = 2t + 1$ et calculez l'aire de la figure géométrique élémentaire délimitée par cette droite, l'axe des t et les deux verticales $t = 1$ et $t = 3$.

b) Soit $A(x)$ l'aire de la région située sous la droite $y = 2t + 1$ entre les verticales $t = 1$ et $t = x$ où x est supposé strictement supérieur à 1. Dessinez cette région et déterminez une expression de $A(x)$ qu'en donne la géométrie élémentaire.

c) Calculez la dérivée de la fonction d'aire $A(x)$. Que remarquez-vous ?

2. a) Pour $0 \leqslant x \leqslant \pi$, soit

$$A(x) = \int_0^x \sin t\, dt.$$

$A(x)$ représente l'aire d'une région. Faites un dessin de cette région.

b) Quelle expression de $A(x)$ vous donne le théorème de calcul de l'intégrale définie ?

c) Calculez $A'(x)$. Que remarquez-vous ?

d) Si x est une valeur quelconque comprise entre 0 et π et si h est un nombre positif petit, alors $A(x+h) - A(x)$ représente l'aire d'une région. Décrivez et dessinez cette région.

e) Dessinez un rectangle dont l'aire est approximativement égale à celle de la région du point d). En comparant les aires de ces deux régions, montrez que

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx \sin x.$$

f) Grâce à la partie e), donnez une explication intuitive du résultat de la partie c).

3. a) Faites afficher la courbe représentative de la fonction $f(x) = \cos(x^2)$ dans la fenêtre $[0, 2]$ sur $[-1{,}25; 1{,}25]$.

b) Si g désigne une nouvelle fonction définie par

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt,$$

$g(x)$ donne l'aire sous le graphique de f depuis 0 jusqu'à x [jusqu'à ce que $f(x)$ devienne négative, après quoi $g(x)$ correspond à une différence d'aires]. Utilisez le dessin de la partie a) pour déterminer la valeur de x à partir de laquelle $g(x)$ commence à décroître. Contrairement à l'intégrale du problème 2, il est impossible d'obtenir une expression de $g(x)$ par calcul de l'intégrale qui définit g.

c) Calculez, grâce à la commande d'intégration de votre calculatrice ou de votre ordinateur, les valeurs $g(0{,}2), g(0{,}4), g(0{,}6), \ldots, g(0{,}8), g(2)$. Reportez ces valeurs dans un système d'axes et esquissez le graphique de g.

d) Compte tenu de l'interprétation géométrique de $g'(x)$, à savoir la pente de la tangente au graphique de g tel qu'il a été tracé dans la partie c), esquissez le graphique de g'. Comparez les courbes de g' et de f.

4. Étant donné la fonction continue f sur $[a, b]$, on définit une nouvelle fonction g par

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Conjecturez une expression de $g'(x)$ en vous fiant aux résultats des problèmes 1 à 3.

5.4 Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

C'est parce qu'il établit un lien entre le calcul différentiel et le calcul intégral que le théorème fondamental du calcul intégral porte à juste titre ce nom. Le calcul différentiel relevait du problème de la tangente alors que le calcul intégral était issu d'un problème apparemment étranger, celui de l'aire. Isaac Barrow (1630-1677), professeur de Newton à Cambridge, découvrit que ces deux problèmes étaient étroitement liés. Il réalisa en effet qu'intégration et dérivation étaient des processus inverses. Le Théorème fondamental du calcul intégral énonce de façon précise cette relation réciproque entre la dérivée et l'intégrale. Newton et Leibniz exploitèrent cette relation et la développèrent en un procédé mathématique systématique.

En préparation au théorème fondamental, nous proposons d'abord quelques nouvelles propriétés de l'intégrale définie.

■ Propriétés des intégrales

Au moment où nous avons défini l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, nous avons implicitement fait l'hypothèse que a était strictement inférieur à b. Or, la définition en tant que limite de sommes de Riemann a un sens même lorsque a est strictement supérieur à b. Il suffit de remarquer qu'intervertir a et b a pour effet de changer $(b-a)/n$ en $(a-b)/n$. Dès lors

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Dans le cas où $a = b$, alors $\Delta x = 0$ de sorte que

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0.}$$

Les propriétés suivantes relient l'ordre des fonctions à l'ordre des intégrales. Ces propriétés ne sont vraies que si $a \leqslant b$.

Propriétés de comparaison de l'intégrale

1. Si $f(x) \geqslant 0$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

2. Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, alors $\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$.

3. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Lorsque $f(x) \geqslant 0$, $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la région sous le graphique de f et géométriquement, la propriété 1 n'affirme rien d'autre que le caractère positif des aires. (Elle découle directement du fait que toutes les grandeurs impliquées dans la définition sont positives.) La propriété 2 déclare qu'une fonction plus grande qu'une autre a aussi une intégrale plus grande. C'est une conséquence de la propriété 1 du fait que $f - g \geqslant 0$.

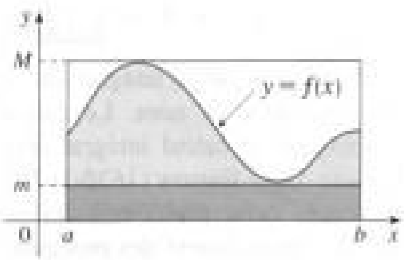


FIGURE 1

La propriété 3 est illustrée (voyez la figure 1) dans le cas où $f(x) \geqslant 0$. Si f est une fonction continue, on peut prendre m égal au minimum absolu de f sur l'intervalle $[a, b]$ et M égal au maximum absolu. La propriété 3 dit que l'aire de la région sous le graphique de f est supérieure à celle du rectangle de hauteur m et inférieure à celle du rectangle de hauteur M.

De façon générale, grâce à la propriété 2, on a que si $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M\,dx.$$

Et de là, le calcul des intégrales de gauche et de droite conduit à

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Cette propriété 3 est intéressante à utiliser lorsqu'on a besoin d'une approximation grossière de la valeur d'une intégrale sans même se donner la peine d'appliquer la Méthode du point médian.

EXEMPLE 1 ■ Estimez, grâce à la propriété 3, $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

SOLUTION Comme $f(x) = e^{-x^2}$ est une fonction décroissante sur $[0, 1]$, son maximum absolu est $M = f(0) = 1$ et son minimum absolu est $m = f(1) = e^{-1}$. Par conséquent, selon la propriété 3,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}dx \leqslant 1(1-0),$$

ou

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}dx \leqslant 1.$$

Comme $e^{-1} \approx 0{,}3679$, on a l'encadrement suivant

$$0{,}367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}dx \leqslant 1.$$

Le résultat de l'exemple 1 est illustré par la figure 2. L'intégrale vaut plus que l'aire du rectangle inférieur, mais moins que l'aire du carré.

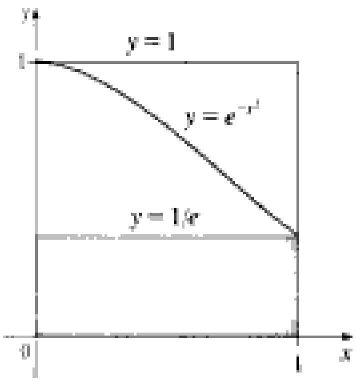


FIGURE 2

■ Le théorème fondamental

En vue d'amener le théorème fondamental, considérons une fonction f continue sur $[a, b]$ et définissons une nouvelle fonction g de la manière suivante

1 $$g(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

où $a \leqslant x \leqslant b$. Remarquez que g ne dépend que de x qui est la borne supérieure variable de l'intégrale. Chaque fois que la valeur de x est fixée, l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ est un nombre bien défini. Lorsque x varie, le nombre $\int_a^x f(t)dt$ varie aussi et définit la fonction de x que nous avons notée g. Par exemple, si $f(t) = t^2$ et $a = 1$, alors, par application du théorème de calcul de l'intégrale définie, nous avons

$$g(x) = \int_1^x t^2 dt = \frac{x^3 - 1}{3}.$$

Remarquez que $g'(x) = x^2$, ou $g' = f$. Autrement dit, quand g est définie par l'intégrale de f, comme l'indique l'équation 1, il s'avère que g est une primitive de f, du moins dans cet exemple.

Afin de voir pourquoi ce résultat pourrait être vrai en général, nous envisageons une fonction continue quelconque f telle que $f(x) \geqslant 0$. Dans ces conditions, $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ représente l'aire de la région sous le graphique de f depuis a jusqu'à x, où x peut varier entre a et b. (Pensez à g comme la fonction « aire jusqu'à » ; voyez la figure 3).

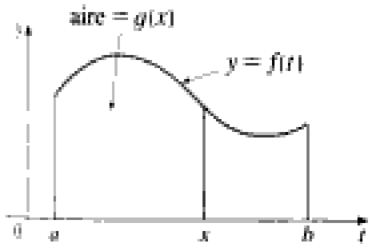


FIGURE 3

Dans l'intention de calculer $g'(x)$ à partir de la définition de la dérivée, nous observons que, si $h > 0$, $g(x+h) - g(x)$ représente, par différence d'aires, l'aire de la

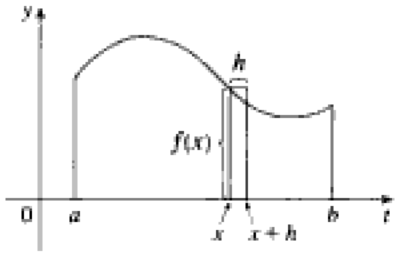


FIGURE 4

région sous le graphique de f depuis x jusqu'à $x + h$ (région jaune de la figure 4) et pour h petit, cette région est proche du rectangle de base h et de hauteur $f(x)$:

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x),$$

ou

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Il est dès lors intuitivement acceptable que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Que ce résultat soit vrai, sans même que f soit nécessairement positive, constitue la première partie du Théorème fondamental du calcul intégral.

Toute référence à ce théorème sera abrégée en TFCI. Il énonce que la dérivée d'une intégrale définie par rapport à sa borne supérieure est la fonction sous le signe d'intégration calculée en cette borne supérieure.

Le Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, Partie 1 Si f est continue sur $[a, b]$, alors la fonction g définie par

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

est une primitive de f, autrement dit $g'(x) = f(x)$ pour $a < x < b$.

Avec la notation de Leibniz, ce théorème s'écrit

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

lorsque f est continue. En gros, cette équation dit que si nous intégrons f, puis dérivons le résultat, nous retrouvons la fonction initiale f.

Il est facile de démontrer le Théorème fondamental du calcul intégral sous l'hypothèse de l'existence d'une primitive F de f. (Ce qui n'a rien d'exceptionnel. Après tout, dans les sections 2.10 et 4.9, nous avons tracé des graphiques de primitives). Dans ce cas, en effet, par le théorème de calcul de l'intégrale définie,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a),$$

pour tout x entre a et b et de là,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x) = f(x),$$

comme annoncé. À la fin de cette section, nous proposerons une démonstration qui ne requiert pas l'existence d'une primitive.

EXEMPLE 2 ■ Calculez la dérivée de la fonction $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$.

SOLUTION Vu que $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ est continue, selon la partie I du Théorème fondamental,

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

EXEMPLE 3 ■ Bien qu'il paraisse étrange à première vue de définir une fonction par une formule de la forme $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, les livres de physique, de chimie et de statistiques en sont remplis. Par exemple, la **fonction de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)dt,$$

du nom du physicien français Augustin Fresnel (1788-1827), célèbre pour ses travaux en optique. Cette fonction apparut la première fois dans la théorie de Fresnel de la diffraction des ondes lumineuses, et plus récemment, elle est aussi utilisée dans l'élaboration des plans des autoroutes.

La partie I du Théorème fondamental nous indique comment dériver la fonction de Fresnel :

$$S'(x) = \sin(\pi x^2/2).$$

À partir de là, toutes les méthodes du calcul différentiel sont d'application pour étudier S (voyez l'exercice 25).

La figure 5 montre les graphiques de $f(x) = \sin(\pi x^2/2)$ et de la fonction de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)dt$. C'est un ordinateur qui, en calculant la valeur de cette intégrale en beaucoup de valeurs de x, a tracé la courbe représentative de S. Elle semble bien correcte si on regarde $S(x)$ comme l'aire sous le graphique de f depuis 0 jusqu'à x, (tout au moins jusqu'à $x \approx 1{,}4$ après quoi $S(x)$ devient une différence d'aires). La figure 6 montre un plus grand morceau de la courbe S.

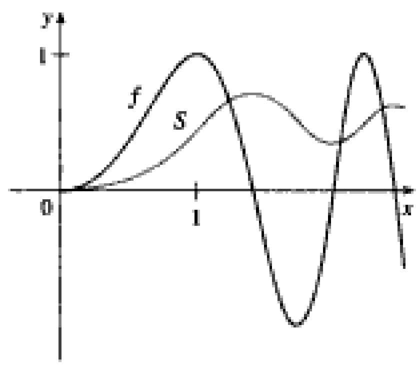


FIGURE 5
$f(x) = \sin(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\,dt$

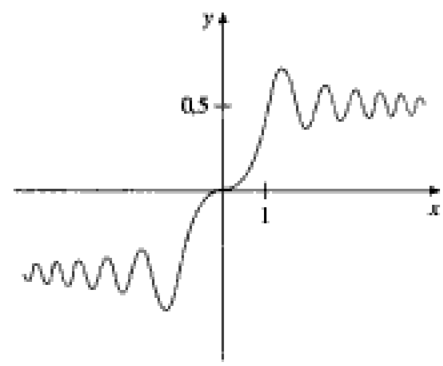


FIGURE 6
La fonction de Fresnel $S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\,dt$

Si maintenant nous prenons la courbe S comme point de départ dans la figure 5 et imaginons à quoi pourrait ressembler sa dérivée, il semble raisonnable que $S'(x) = f(x)$. (Par exemple, S croît là où f est positive et décroît là où f est négative.) Ces considérations confirment visuellement la partie I du Théorème fondamental du calcul intégral.

EXEMPLE 4 ■ Calculez $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\,dt$.

SOLUTION Ici, il faut tenir compte, en plus de la partie 1 du théorème fondamental, de la règle de dérivation des fonctions composées. Soit $u = x^4$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt \\ &= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(par la Règle de dérivation des fonctions composées)} \\ &= \sec u\,\frac{du}{dx} && \text{(par TFC1)} \\ &= \sec(x^4)\cdot 4x^3.\end{aligned}$$

■ Dérivation et intégration sont des procédés réciproques

Nous mettons ici ensemble les deux parties du théorème fondamental. Nous considérons la partie 1 comme fondamentale parce qu'elle relie intégration et dérivation. Mais étant donné que le Théorème de calcul de l'intégrale définie de la section 5.3 établit aussi un lien entre des intégrales et des dérivées, nous le rebaptisons partie 2 du théorème fondamental.

Le Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral On suppose que f est continue sur $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x) = f(x)$.
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où F est une primitive quelconque de f, autrement dit $F' = f$.

Nous avions fait remarquer que la partie 1 pouvait être réécrite

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),$$

ce qui revient à dire que si f est intégrée et le résultat ensuite dérivé, on retrouve la fonction originale f. Dans la section 5.3, la partie 2 était appelée le théorème de variation totale :

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Cette expression signifie que dériver la fonction F et ensuite intégrer le résultat ramène à la fonction originale F, mais sous la forme $F(b) - F(a)$. Ensemble les deux parties du Théorème fondamental du calcul intégral établissent que dérivation et intégration sont des procédés réciproques. Chacun défait ce que l'autre a fait.

Le Théorème fondamental du calcul intégral est sans conteste le théorème le plus important de ce domaine des mathématiques et compte en effet comme l'un des grands exploits de l'esprit humain. Avant sa découverte, depuis Eudoxe et Archimède jusqu'à l'époque de Galilée et de Fermat, traiter un problème d'aires, de volumes ou de longueurs de courbes était tellement difficile que seuls quelques génies pouvaient y prétendre. Maintenant au contraire, forts de la méthode systématique que Newton et Leibniz ont construite, nous allons voir dans les chapitres ultérieurs que ces problèmes sont à notre portée à tous.

■ Démonstration du TFCI

Voici une démonstration de la partie 1 du Théorème fondamental du calcul intégral qui ne requiert pas l'existence d'une primitive de f. Soit $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si x et $x + h$ appartiennent à l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors

$$\begin{aligned} g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt, \end{aligned}$$

et donc, à condition que h soit différent de 0,

2 $$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Supposons pour le moment $h > 0$. Puisque f est continue sur $[x, x+h]$, le théorème des valeurs extrêmes assure l'existence des nombres u et v dans $[x, x+h]$ tels que $f(u) = m$ et $f(v) = M$, où m et M sont le minimum et le maximum absolus de f sur $[x, x+h]$ (voyez la figure 7).

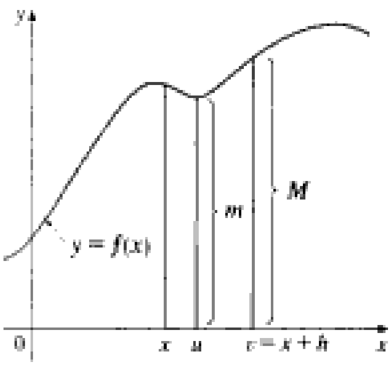


FIGURE 7

Par la propriété 3, nous avons

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant Mh,$$

ou

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant f(v)h.$$

Comme $h > 0$, nous pouvons diviser cette inégalité par h :

3 $$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant f(v).$$

L'inégalité 3 peut être établie de manière analogue dans le cas $h < 0$. Maintenant, nous faisons tendre h vers 0. Alors $u \to x$ et $v \to x$ parce que u et v se trouvent entre x et $x + h$. D'où

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x) \qquad \lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x} f(v) = f(x)$$

grâce à la continuité de f en x. Nous tirons de (3) et du théorème du sandwich la conclusion

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x). \qquad ■$$

5.4 Exercices

1. Expliquez de façon précise ce que signifie l'énoncé « dérivation et intégration sont des procédés réciproques ».

2. On suppose que f atteint une valeur minimale absolue m et une valeur maximale absolue M. Situez $\int_0^2 f(x)dx$ entre deux valeurs. Sur quelle propriété des intégrales repose votre conclusion ?

3. Vérifiez, grâce aux propriétés des intégrales, que

$$0 \leqslant \int_1^3 \ln x\,dx \leqslant 2\ln 3.$$

4-5 ■ Utilisez la propriété 3 pour estimer la valeur de l'intégrale.

4. $\int_0^2 \sqrt{x^3+1}\;dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx$

6. a) Utilisez la propriété 3 pour démontrer que

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^2}\,dx \geqslant \sqrt{2}.$$

b) Démontrez que $\sqrt{1+x^2} \geqslant x$.

c) À l'aide de la partie b) et de la propriété 2, montrez que

$$\int_1^4 \sqrt{1+x^2}\,dx \geqslant 7{,}5.$$

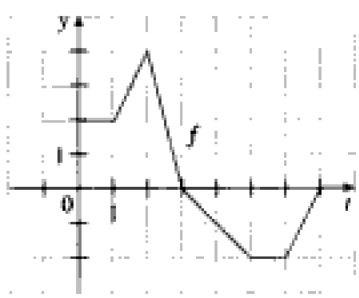
7. On désigne par $g(x)$ la fonction définie par $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, où f est la fonction dont le graphique est présenté ci-dessous.

a) Calculez $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ et $g(6)$.

b) Sur quels intervalles g est-elle croissante ?

c) Où g atteint-elle un maximum ?

d) Tracez un graphique grossier de g.



8. Soit $g(x)=\int_{-3}^x f(t)dt$, où f est la fonction représentée par le graphique ci-après.

a) Calculez $g(-3)$ et $g(3)$.

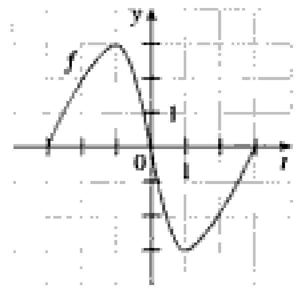
b) Estimez $g(-2)$, $g(-1)$ et $g(0)$.

c) Sur quel intervalle g est-elle croissante ?

d) Où g atteint-elle un maximum ?

e) Tracez un graphique grossier de g.

f) Partant du graphique de la partie e), déduisez le graphique de $g'(x)$. Comparez-le avec celui de f.



9-10 ■ Délimitez l'aire représentée par $g(x)$. Déterminez ensuite $g'(x)$ de deux manières différentes : a) par la première partie du Théorème fondamental du calcul intégral et b) en calculant l'intégrale suivant la partie 2, puis en dérivant.

9. $g(x)=\int_0^x (1+t^2)\,dt$ **10.** $g(x)=\int_\pi^x (2+\cos t)\,dt$

11-20 ■ Calculez la dérivée de la fonction donnée en appliquant la première partie du Théorème fondamental du calcul intégral.

11. $g(x)=\int_1^x (t^2-1)^{20}\,dt$

12. $g(x)=\int_{-1}^x \sqrt{t^3+1}\;dt$

13. $g(u)=\int_\pi^u \dfrac{1}{1+t^4}\,dt$

14. $F(x)=\int_x^2 \cos(t^2)\,dt$

$$\left[\textit{Suggestion}: \int_x^2 \cos(t^2)\,dt = -\int_2^x \cos(t^2)\,dt\right]$$

15. $h(x)=\int_2^{1/x} \sin^4 t\,dt$ **16.** $h(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \dfrac{s^2}{s^2+1}\,ds$

17. $y=\int_{\operatorname{tg} x}^{17} \sin(t^4)\,dt$ **18.** $y=\int_{-5}^{\sin x} t\cos(t^3)\,dt$

19. $g(x)=\int_{2x}^{3x} \dfrac{u-1}{u+1}\,du$

$$\left[\textit{Suggestion}: \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_0^{3x} f(u)\,du\right]$$

20. $g(x)=\int_{\operatorname{tg} x}^{x^2} \dfrac{1}{\sqrt{2+t^4}}\,dt$

21. Calculez $F''(2)$, si $F(x)=\int_1^x f(t)dt$ et $f(t)=\displaystyle\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\,du$.

22. Sur quel intervalle la courbe de la fonction

$$y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$$

est-elle convexe ?

23-24 ■ Soit $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ où f est la fonction présentée par son graphique.

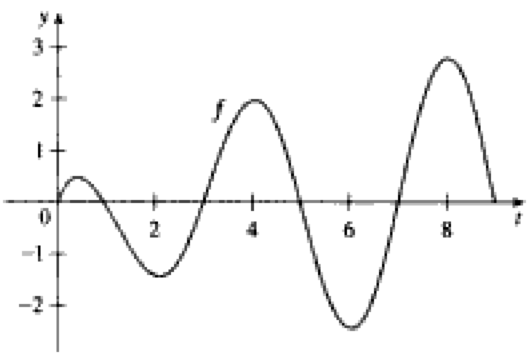
a) En quelles valeurs de x se produit un maximum local ou un minimum local de g ?

b) Où g atteint-elle son maximum absolu ?

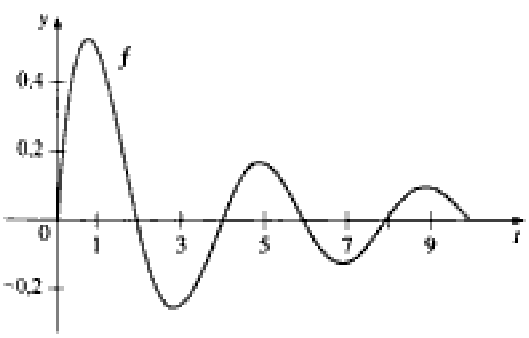
c) Sur quels intervalles g est-elle concave ?

d) Esquissez le graphique de g.

23.



24.



25. La fonction de Fresnel S a été définie à l'exemple 3 et son graphique présenté dans les figures 5 et 6.

a) En quelles valeurs de x cette fonction atteint-elle des valeurs maximales ?

b) Sur quels intervalles cette fonction est-elle convexe ?

c) Situez graphiquement la solution de l'équation

$$\int_0^x \sin(\pi t^2/2)dt = 0{,}2,$$

et donnez-en la valeur à une décimale correcte.

26. La fonction **sinus intégral**

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

joue un rôle important en électrotechnique (l'intégrande $f(t) = (\sin t)/t$ n'est pas définie en $t = 0$, mais comme on sait que sa limite pour t tendant vers 0 vaut 1, on définit $f(0) = 1$, faisant ainsi de f une fonction continue partout).

a) Dessinez le graphique de Si.

b) En quelles valeurs de x cette fonction atteint-elle des valeurs maximales ?

c) Déterminez les coordonnées du premier point d'inflexion situé à droite de l'origine.

d) Cette fonction admet-elle des asymptotes horizontales ?

e) Donnez la valeur à une décimale correcte de la solution de l'équation suivante

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = 1.$$

27. Définissez une fonction f telle que $f(1) = 0$ et $f'(x) = 2^x/x$.

28. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

a) Donnez une expression de $g(x)$ de la même forme que celle de $f(x)$.

b) Tracez les graphiques de f et g.

c) Où f est-elle dérivable ? Où g est-elle dérivable ?

29. Déterminez une fonction f et un nombre a tels que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}.$$

30. Une société de pointe acquiert un nouvel équipement informatique dont la valeur d'achat est V. Cet équipement se déprécie à une vitesse $f = f(t)$ et occasionne des dépenses d'entretien qui croissent à la vitesse $g = g(t)$, où t est mesuré en mois. La société souhaite naturellement estimer quel est le moment le plus opportun pour remplacer l'équipement.

a) Soit

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]ds.$$

Montrez que les points critiques de C sont ceux pour lesquels $C(t) = f(t) + g(t)$.

b) On suppose que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

et

$$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0.$$

Déterminez après combien de temps T la dépréciation totale $D(t) = \int_0^t f(s)ds$ atteindra la valeur initiale V.

c) Déterminez le minimum absolu de C sur $]0, T]$.

d) Représentez dans un même système d'axes les courbes de C et de $f + g$ et confirmez ainsi le résultat de la partie a).

31. Une entreprise de fabrication possède une pièce maîtresse de son équipement qui se déprécie au taux (continu) $f = f(t)$, où t est mesuré en mois depuis la dernière révision. Comme à chaque révision de la machine, un coût fixe A est imputé, l'entreprise essaie de déterminer la fréquence optimale de ces révisions, c'est-à-dire l'intervalle de temps T à laisser passer entre deux révisions.

a) Montrez que $\int_0^t f(s)ds$ représente la perte de valeur de la machine sur une période de temps t depuis la dernière révision.

b) Soit $C = C(t)$ donné par

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

Que représente C et pourquoi l'entreprise doit-elle minimiser C ?

c) Montrez que C est rendu minimal quand $t = T$ tel que $C(T) = f(T)$.

Sujet de rédaction

Newton, Leibniz et l'invention du calcul différentiel et intégral

Il n'est pas rare de lire que les inventeurs du calcul différentiel et intégral furent Sir Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Or, nous savons que les premières idées à la base de l'intégration furent émises il y a 2500 ans par les grecs tels Eudoxe et Archimède, et que Pierre de Fermat (1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677) et d'autres furent les premiers à mettre au point les méthodes de calcul des tangentes. Barrow, maître de Newton à Cambridge, fut le premier à comprendre la relation de réciprocité entre la dérivation et l'intégration. Ce que firent Newton et Leibniz fut d'exploiter cette relation, sous la forme du Théorème fondamental du calcul intégral, de façon à faire de l'analyse infinitésimale une discipline mathématique à part entière.

Lisez les contributions de ces hommes dans l'une ou l'autre des références mentionnées et rédigez un compte-rendu sur l'un des trois sujets ci-après. Vous pouvez inclure des détails biographiques mais l'accent doit être mis sur la description, assez détaillée, de leur méthode et de leurs notations. Plus particulièrement, vous devez consulter l'un des livres sources, qui reprend des passages des publications originales de Newton et Leibniz, traduites du latin.

- Le rôle de Newton dans le développement du calcul différentiel et intégral.
- Le rôle de Leibniz dans le développement du calcul différentiel et intégral.
- La controverse entre les disciples de Newton et Leibniz sur la priorité dans l'invention du calcul différentiel et intégral.

Références

1. C. Boyer and U. Merzbach, *A History of Mathematics*, New York, John Wiley, 1987, chap. 19.

2. C. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, New York, Dover, 1959, chap. V.

3. C.H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer-Verlag, 1979, chapitres 8 et 9.

4. H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6^e ed., New York, Saunders, 1990, chap. 11.

5. C. C. Gillipsie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, New York : Scribner's, 1974. Voyez aussi l'article sur Leibniz par Joseph Hofmann dans le volume VIII et l'article sur Newton de I. B. Cohen dans le volume X.

6. V. Katz, *A History of Mathematics : An Introduction*, New York, Harper-Collins, 1993, chap. 12.

7. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, Oxford University Press, 1972, chap. 17.

Livres sources

1. J. Fauvel and J. Gray, eds., *The History of Mathematics : A Reader*, London, MacMillan Press, 1987, chapitres 12 et 13.

2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, New York, Dover, 1959, chap. V.

3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1969, chap. V.

5.5 La Règle d'intégration par substitution

En raison du Théorème de calcul de l'intégrale définie, il est important de savoir déterminer des primitives. Or, notre formulaire de primitives usuelles ne nous dit pas comment traiter des intégrales telles que

1 $$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx.$$

Pour calculer cette intégrale, nous allons employer *introduire quelque chose de nouveau* de la stratégie de résolution de problème. Le « quelque chose de nouveau » est ici une nouvelle variable ; nous passons de la variable x à une nouvelle variable u. Soit $u = 1 + x^2$, l'expression sous le radical dans (1). La différentielle de u est alors $du = 2x\,dx$. Remarquez que si, dans la notation de l'intégrale, le dx pouvait être interprété comme une différentielle, alors, voyant $2x\,dx$ dans (1), nous pourrions, de façon tout à fait formelle et sans justifier notre calcul, écrire

Les différentielles ont été définies dans la section 3.8. Si $u = f(x)$, alors

$$du = f'(x)dx.$$

2 $$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx \\ &= \int \sqrt{u}\,du = \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Et nous pourrions, par la Règle de dérivation des fonctions composées, vérifier que la réponse est correcte en dérivant la fonction finale de (2) :

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}.$$

De façon générale, cette façon de faire marche quand la fonction à intégrer est de la forme $\int f(g(x))g'(x)dx$. En effet, si $F' = f$, alors

3 $$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

parce que, par la Règle de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x).$$

Avec le « changement de variable » ou la « substitution » $u = g(x)$, l'expression (3) s'écrit

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du,$$

ou, en remplaçant F' par f,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Nous avons ainsi démontré la règle suivante.

4 La Règle de substitution Si $u = g(x)$ est une fonction dérivable dont l'ensemble image est un intervalle I et si f est continue sur I, alors

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du.$$

Remarquez que la règle d'intégration par substitution a été démontrée à partir de la Règle de dérivation des fonctions composées. Remarquez aussi que si $u = g(x)$, alors $du = g'(x)dx$ de sorte qu'un moyen de se souvenir de cette règle est de penser dx et du dans (4) comme des différentielles.

Finalement, la Règle de substitution dit : **Il est licite de travailler avec dx et du sous le signe d'intégration comme s'il s'agissait de différentielles.**

EXEMPLE 1 ■ Calculez $\int x^3 \cos(x^4 + 2)dx$.

SOLUTION On propose la substitution $u = x^4 + 2$ parce que la différentielle $du = 3x^3$, hormis le facteur constant 4, est présente dans la fonction à intégrer. De là, en effectuant la substitution et en employant $x^3dx = du/4$, on a

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\sin u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\sin(x^4 + 2) + C.\end{aligned}$$

Vérifiez la réponse en dérivant.

Remarquez qu'à la dernière étape, on est revenu à la variable d'origine x.

La méthode d'intégration par substitution n'a d'autre but que de remplacer une intégrale quelque peu compliquée par une autre plus simple. Cela se fait en passant de la variable originale x à une nouvelle variable u qui est fonction de x. Dans l'exemple 1, nous avons remplacé l'intégrale $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$ par l'intégrale plus simple $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

Lors d'une intégration par substitution, la difficulté majeure consiste à trouver la substitution qui convient. Il faut essayer de choisir u égal à une certaine fonction qui apparaît sous le signe d'intégration et dont la différentielle s'y trouve aussi (à un facteur constant près). C'est ce qui a été fait dans l'exemple 1. Si ce n'est pas possible, il faut essayer de prendre u égal à une partie un peu compliquée de la fonction à intégrer. Trouver la bonne substitution s'apparente à un art. Il n'est pas rare de se tromper. Si le premier choix n'est pas le bon, il faut en tenter d'autres.

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUTION 1 Posons $u = 2x + 1$. Alors $du = 2dx$ ou $dx = du/2$. La Règle de substitution conduit alors à

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

SOLUTION 2 Une autre substitution possible est $u = \sqrt{2x+1}$. Alors

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{donc} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du.$$

(Vous pouvez aussi constater que $u^2 = 2x + 1$, d'où $2u\,du = 2dx$). De là,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int u \cdot u\,du = \int u^2\,du \\ &= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

EXEMPLE 3 ■ Calculez $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUTION Posons $u = 1 - 4x^2$. Alors $du = -8x\,dx$ et $x\,dx = -\frac{1}{8}du$. Il vient

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx &= -\tfrac{1}{8}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du \\ &= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C.\end{aligned}$$

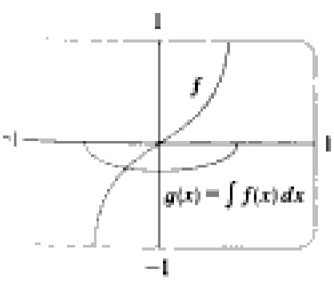


FIGURE 1

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La réponse de l'exemple 3 peut être vérifiée par dérivation, mais aussi visuellement. Nous avons reproduit dans la figure 1 les graphiques que donne une calculatrice de la fonction à intégrer $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ et de son intégrale indéfinie $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (cas $C = 0$). Nous pouvons observer que $g(x)$ décroît quand $f(x)$ est négative, croît quand $f(x)$ est positive et passe par un minimum quand $f(x) = 0$. Il est donc très vraisemblable, graphiquement parlant, que g soit une primitive de f.

EXEMPLE 4 ■ Calculez $\int \cos 5x\,dx$.

SOLUTION Si on choisit $u = 5x$, alors $du = 5dx$ et $dx = \frac{1}{5}du$. De là

$$\int \cos 5x\,dx = \tfrac{1}{5}\int \cos u\,du = \tfrac{1}{5}\sin u + C = \tfrac{1}{5}\sin 5x + C.$$

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

SOLUTION On commence par écrire la tangente comme le rapport du sinus au cosinus:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx,$$

ce qui suggère de prendre $u = \cos x$, d'où $du = -\sin x\,dx$ et $\sin x\,dx = -du$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u}\\ &= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

Comme $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, la réponse de l'exemple 5 peut aussi s'écrire

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln|\sec x| + C.$$

EXEMPLE 6 ■ Calculez $\int \cos^3 x\,dx$.

SOLUTION En vue d'opérer par substitution, on utilise d'abord l'identité trigonométrique $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et on écrit

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x.$$

Il est intéressant de voir apparaître un facteur $\cos x$ car si on opte pour la substitution $u = \sin x$, alors $du = \cos x\,dx$ et

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\,dx\\ &= \int (1 - u^2)\,du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C\\ &= \sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x + C.\end{aligned}$$

EXEMPLE 7 ■ Calculez $\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$.

SOLUTION La fonction rationnelle à intégrer se décompose en éléments simples grâce à l'identité

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

que vous pouvez vérifier en réduisant au même dénominateur le membre de droite. Il s'ensuit

Nous expliquons dans l'annexe F une manière systématique de traiter les intégrales de fonctions rationnelles. La décomposition en éléments simples peut être effectuée également à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique. Voyez l'exercice 59.

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx.$$

La dernière intégrale est traitée par la substitution $u = x + 1$. Il vient

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$= \ln|x| - \ln|x+1| + C.$$

■ Les intégrales définies

Lors du calcul d'une intégrale *définie* par substitution, deux méthodes sont possibles. La première consiste à calculer l'intégrale indéfinie et ensuite appliquer le théorème de calcul. Par exemple, suite au résultat obtenu dans l'exemple 2, on a

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{2x+1}\,dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\Big]_0^4$$
$$= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27-1) = \tfrac{26}{3}$$

L'autre méthode, habituellement préférable, consiste à changer les limites d'intégration en fonction de la nouvelle variable.

Cette règle prescrit, lors du calcul d'une intégrale définie par la méthode de substitution, d'exprimer non seulement x et dx en termes de la nouvelle variable u, mais aussi les bornes d'intégration. Celles-ci sont les valeurs que prend u en $x = a$ et $x = b$.

5 La Règle de substitution pour les intégrales définies Si g' est une fonction continue sur $[a, b]$ et si f est continue sur l'ensemble image de $u = g(x)$, alors

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

Démonstration Soit F une primitive de f. D'une part, comme selon (3), $F(g(x))$ est une primitive de $f(g(x))g'(x)$, par le théorème de calcul, on a

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)).$$

D'autre part, à nouveau par le théorème de calcul, on a

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

EXEMPLE 8 ■ En faisant appel au théorème (5), calculez $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUTION On reprend la substitution $u = 2x + 1$ de la solution 1 de l'exemple 2. Pour trouver les nouvelles bornes d'intégration, on remarque que quand $x = 0$, $u = 1$ et que

La figure 2 montre l'interprétation géométrique de l'exemple 2. La substitution $u = 2x + 1$ a pour effet d'étirer l'intervalle $[0, 4]$ d'un facteur 2 et de le translater d'une unité vers la droite. La Règle de substitution établit que les deux régions ont même aire.

quand $x = 4$, $u = 9$. Dès lors,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\, du$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} u^{3/2}\Big]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}.$$

Vous aurez remarqué que la formule du théorème 5 ne requiert pas de retourner à la variable x une fois l'intégrale résolue, le calcul final se faisant sur la variable u entre les bornes appropriées de u.

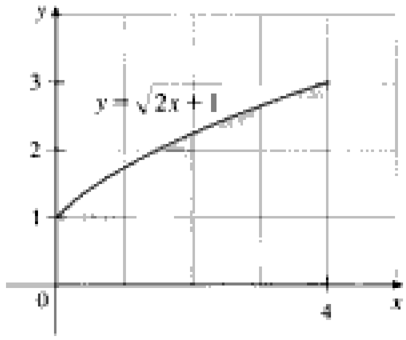
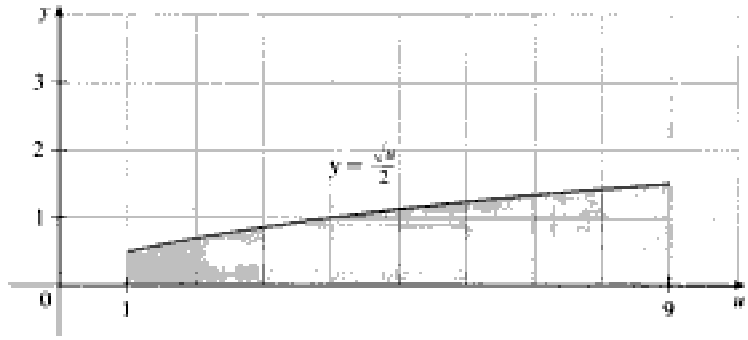


FIGURE 2



EXEMPLE 9 ■ Calculez $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$.

SOLUTION On pose $u = \ln x$ parce que sa différentielle $du = dx/x$ est présente sous le signe d'intégration. Quand $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; quand $x = e$, $u = \ln e = 1$. D'où

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_0^1 u\, du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Vu que la fonction $f(x) = (\ln x)/x$ est positive pour $x > 1$, l'intégrale représente l'aire de la région ombrée dans la figure 3.

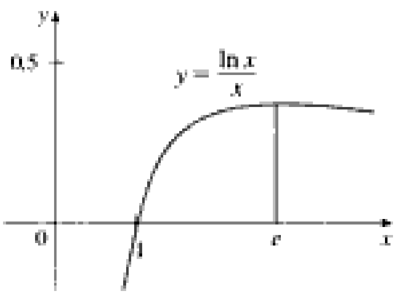


FIGURE 3

EXEMPLE 10 ■ Démontrez que l'aire d'un disque de rayon r vaut πr^2.

SOLUTION Ce résultat est évidemment bien connu. Il y a très longtemps qu'il vous a été énoncé ; mais la seule façon de le démontrer vraiment c'est par intégration.

On place le cercle avec son centre à l'origine pour que son équation soit simplement $x^2 + y^2 = r^2$. La résolution de cette équation par rapport à y conduit à

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Comme le cercle est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées, l'aire totale A vaut quatre fois celle qui se trouve dans le premier quadrant (voyez la figure 4). Or, l'équation de l'arc de courbe qui délimite cette région située dans le premier quadrant est

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant r.$$

D'où, la mesure de l'aire est donnée par

$$\frac{1}{4}A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx.$$

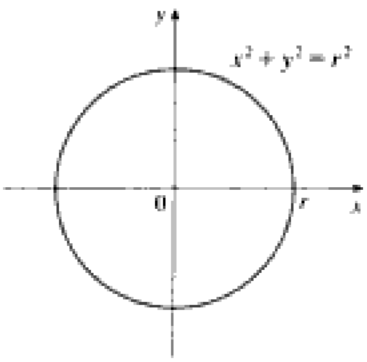


FIGURE 4

Pour simplifier cette intégrale il faudrait trouver une substitution qui fasse en sorte que $r^2 - x^2$ devienne le carré de quelque chose. L'identité trigonométrique $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ réalise cela. En effet, comme

$$r^2 - r^2\sin^2\theta = r^2\cos^2\theta,$$

Cette substitution est légèrement différente de celles qui précèdent en ce que c'est l'ancienne variable x qui est fonction de la nouvelle θ, au lieu de l'inverse. La substitution $x = r\sin\theta$ revient à poser $\theta = \text{Arcsin}(x/r)$.

on fait la substitution

$$x = r\sin\theta.$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant r$, on ne fait varier θ qu'entre 0 et $\pi/2$. On a $dx = r\cos\theta\, d\theta$ et

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - r^2\sin^2\theta} = \sqrt{r^2\cos^2\theta} = r\cos\theta$$

puisque $\cos\theta \geqslant 0$ quand $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. La Règle de substitution conduit à

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)\, r\cos\theta\, d\theta = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta.$$

L'intégration de $\cos^2\theta$ s'effectue via l'identité trigonométrique

C'est la formule 17a dans l'annexe C.

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta).$$

D'où

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}A &= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \tfrac{1}{2} r^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= \tfrac{1}{2} r^2 \Big[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) \\ &= \tfrac{1}{4}\pi r^2.\end{aligned}$$

On fait ici mentalement la substitution $u = 2\theta$.

On a ainsi démontré la formule bien connue $A = \pi r^2$. □

Symétries

Le théorème que voici exploite la Règle de substitution pour les intégrales définies (5) pour simplifier le calcul des intégrales de fonctions qui présentent des symétries.

> **6 Les intégrales de fonctions symétriques** On suppose que f est continue sur $[-a, a]$.
>
> a) Lorsque f est paire $[f(-x) = f(x)]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.
>
> b) Lorsque f est impaire $[f(-x) = -f(x)]$, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

Démonstration On divise l'intégrale en deux

7 $$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = -\int_0^{-a} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx$$

Dans la première des deux intégrales du membre de droite, on fait la substitution $u = -x$. Alors, $du = -dx$ et quand $x = -a$, $u = a$, de sorte que

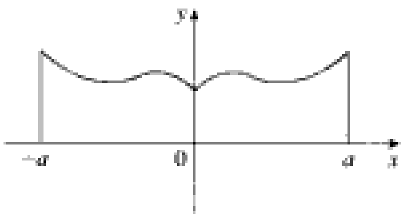
$$-\int_0^{-a} f(x)\, dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\, du.$$

L'équation 7 devient

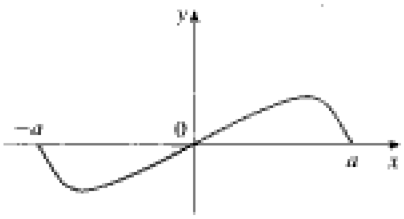
8 $$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a f(-u)\, du + \int_0^a f(x)\, dx.$$

a) Lorsque f est paire, $f(-u) = f(u)$ et l'équation 8 donne

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a f(u)\, du + \int_0^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx.$$



(a) f est paire, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



(b) f est impaire, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURE 5

b) Lorsque f est impaire, $f(-u) = -f(u)$ et l'équation 8 donne

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0 \qquad ■$$

La figure 5 illustre les deux énoncés du théorème 6. Dans le cas où f est positive et paire, la partie a) dit que l'aire sous la courbe depuis $-a$ jusqu'à a vaut le double de l'aire depuis 0 jusqu'à a, à cause de la symétrie. Si on se rappelle que l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la région comprise sous la courbe et au-dessus de l'axe Ox moins l'aire de la région sous l'axe Ox et au-dessus de la courbe, alors la partie b) dit que l'intégrale est nulle car les aires sont égales et de signes opposés.

EXEMPLE 11 ■ Vu que $f(x) = x^6 + 1$ satisfait à $f(-x) = f(x)$, elle est paire et de là,

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^7}{7} + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}. \qquad ■$$

EXEMPLE 12 ■ Vu que $f(x) = (\operatorname{tg} x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisfait à $f(-x) = -f(x)$, elle est impaire et de là,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0. \qquad ■$$

5.5 Exercices

1-6 ■ Calculez l'intégrale en effectuant la substitution indiquée.

1. $\int x(x^2 - 1)^{99}\,dx, \quad u = x^2 - 1$
2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2 + x^3}}\,dx, \quad u = 2 + x^3$
3. $\int e^{4x}\,dx, \quad u = 4x$
4. $\int \frac{dx}{(2x + 1)^2}, \quad u = 2x + 1$
5. $\int \frac{x + 3}{(x^2 + 6x)^2}\,dx, \quad u = x^2 + 6x$
6. $\int \sec a\theta \operatorname{tg} a\theta\,d\theta, \quad u = a\theta$

7-32 ■ Calculez l'intégrale indéfinie.

7. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$
8. $\int xe^{x^2}\,dx$
9. $\int \sqrt{x - 1}\,dx$
10. $\int t^2\cos(1 - t^3)\,dt$
11. $\int x^3\sqrt{2 + x^4}\,dx$
12. $\int x(x^2 + 1)^{3/2}\,dx$
13. $\int \frac{2}{(t + 1)^6}\,dt$
14. $\int \sqrt[5]{3 - 5y}\,dy$
15. $\int e^x(1 + e^x)^{10}\,dx$
16. $\int \frac{\operatorname{Arctg} x}{1 + x^2}\,dx$
17. $\int \sec^2 3\theta\,d\theta$
18. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
19. $\int \cos^4 x \sin x\,dx$
20. $\int \operatorname{cotg} x\,dx$
21. $\int \sin^5 x \cos^3 x\,dx$
22. $\int \cos x \cos(\sin x)\,dx$
23. $\int \frac{dx}{2x - 1}$
24. $\int \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$
25. $\int \frac{dx}{x \ln x}$
26. $\int e^x \sin(e^x)\,dx$
27. $\int \frac{e^x + 1}{e^x}\,dx$
28. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$
29. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\,dx$
30. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx$
31. $\int \frac{1 + x}{1 + x^2}\,dx$
32. $\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$

33-36 ■ Calculez l'intégrale indéfinie. Illustrez et vérifiez si votre réponse est acceptable en confrontant les graphiques de la fonction et de sa primitive (prenez $C = 0$).

33. $\displaystyle\int \frac{3x - 1}{(3x^2 - 2x + 1)^4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

35. $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\,dx$

36. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2\theta \sec^2\theta\,d\theta$

37-52 ■ Calculez l'intégrale définie.

37. $\displaystyle\int_0^1 (2x - 1)^{100}\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{1 + 4x^2}\,dx$

40. $\displaystyle\int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x)^2}\,dx$

41. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x - 1}\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int_0^1 \cos \pi t\,dt$

44. $\displaystyle\int_0^{\pi/8} \sin 4t\,dt$

45. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2 \sin x}{1 + x^6}\,dx$

47. $\displaystyle\int_{-a}^{a} x\sqrt{x^2 + a^2}\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

49. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{2x + 3}$

50. $\displaystyle\int_0^1 t^2 2^{-t^3}\,dt$

51. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

52. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

53-54 ■ Servez-vous du dessin pour estimer grossièrement l'aire de la région située sous le graphe. Calculez ensuite la valeur exacte.

53. $y = \sqrt{2x + 1}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

54. $y = 2\sin x - \sin 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

55. Calculez $\int_{-2}^{2}(x + 3)\sqrt{4 - x^2}\,dx$ en l'écrivant comme une somme de deux intégrales et en interprétant l'une d'elles en termes d'aire.

56. Calculez $\int_0^1 x\sqrt{1 - x^4}\,dx$ à l'aide d'une substitution et interprétez l'intégrale qui en résulte en termes d'aire.

57. Après avoir vérifié que

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right),$$

utilisez cette expression pour calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 1}\,dx$.

58. Calculez $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x + 1}\,dx$ après avoir effectué la division euclidienne des deux polynômes.

59-60 ■ Afin de calculer l'intégrale, récrivez la fraction rationnelle sous la forme d'une somme de fractions plus simples en utilisant un logiciel de calcul formel.

59. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$

60. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x + 1)(2x + 3)}\,dx$

61. Démontrez que l'aire de la région délimitée par l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vaut πab.

62. Utilisez la substitution trigonométrique $x = \sin\theta$ $(-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}}\,dx$$

63. Utilisez la substitution trigonométrique $x = 2\operatorname{tg}\theta$ $(-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ pour calculer

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$$

64. Une population de bactéries, d'initialement 400 unités, croît à la vitesse de $r(t) = (450{,}268)e^{1{,}12567t}$ bactéries par heure. Quel est l'effectif de cette population après 3 heures ?

65. L'acte de respirer est cyclique et une respiration complète, depuis le début de l'inhalation jusqu'à la fin de l'expiration, dure environ 5 s. Le débit de l'air qui entre dans les poumons ne dépasse pas 0,5 L/s environ. Ce qui explique en partie que la fonction $f(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi t/5)$ soit souvent utilisée pour modéliser le débit de l'air qui entre ou sort des poumons. Sur la base de ce modèle, déterminez une expression du volume de l'air inhalé par les poumons au moment t.

66. Une société informatique met en service une ligne de fabrication d'une nouvelle calculatrice. Le taux de production de ces machines après t semaines est modélisé par la fonction

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t + 10)^2}\right) \text{ calculatrices/semaine.}$$

Notez que le taux de production atteint progressivement 5000 unités environ par semaine, après avoir été plus lente au début à cause du manque de familiarisation des ouvriers à la nouvelle technique utilisée. Calculez combien de calculatrices sont produites entre le début de la troisième semaine et la fin de la quatrième semaine.

67. Sachant que f est continue et que $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, déterminer la valeur de $\int_0^2 2f(2x)\,dx$.

68. Sachant que f est continue et que $\int_0^a f(x)dx = 4$, déterminez la valeur de $\int_0^{\sqrt{a}} xf(x^2)dx$.

69. Démontrez que
$$\int_a^b f(-x)dx = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$$
pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique de cette équation sous forme d'égalités d'aires, dans le cas où f est positive.

70. Démontrez que
$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$
pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Donnez une interprétation géométrique de cette équation sous forme d'égalités d'aires, dans le cas où f est positive.

71. Démontrez que
$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$$
où a et b sont des nombres positifs.

5.6 L'intégration par parties

Il est normal qu'à chaque règle de dérivation corresponde une règle d'intégration. La Règle d'intégration par substitution correspond par exemple à la Règle de dérivation des fonctions composées. La Règle d'intégration par parties est celle qui correspond à la Règle de dérivation du produit. Réécrivons la Règle de dérivation du produit de deux fonctions dérivables :

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Dans le sens de l'intégration, cette formule s'écrit

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

ou

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Cette dernière expression peut être arrangée comme suit

1 $$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

La formule 1 porte le nom de **formule d'intégration par parties.** Il est peut-être plus facile de la retenir dans les notations que voici. Soit $u = f(x)$ et $v = g(x)$. Alors, les différentielles sont $du = f'(x)dx$ et $dv = g'(x)dx$ et par la Règle d'intégration par substitution, la formule 1 s'écrit

2 $$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

EXEMPLE 1 ■ Calculez $\displaystyle\int x \sin x\,dx$.

SOLUTION PAR LA FORMULE 1 Si on choisit $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin x$, alors $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos x$ (g peut être n'importe quelle primitive de g'). Alors, d'après la formule 1, on a

$$\int x \sin x \, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Il est sage de dériver la réponse pour vérifier. On obtient bien $x \sin x$, comme on s'y attendait.

SOLUTION PAR LA FORMULE 2 Soit

Il est bon d'adopter le schéma

$$\begin{array}{ll} u = \square & dv = \square \\ du = \square & v = \square \end{array}$$

$$u = x \qquad dv = \sin x \, dx.$$

Alors

$$du = dx \qquad v = -\cos x,$$

et

$$\int x \sin x \, dx = \int \overset{u}{x} \, \overbrace{\sin x \, dx}^{dv} = \overset{u}{x} \, \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v} \, \overset{du}{dx}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

REMARQUE ● L'intégration par parties n'est efficace que si l'on obtient une intégrale plus simple que l'intégrale initiale. Dans l'exemple 1, on est parti de $\int x \sin x \, dx$ et on en a obtenu une expression en fonction de l'intégrale plus simple $\int \cos x \, dx$. Si on avait choisi $u = \sin x$ et $dv = x\, dx$, alors, comme $du = \cos x \, dx$ et $v = x^2/2$, on serait arrivé à

$$\int x \sin x \, dx = (\sin x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x \, dx.$$

Mais $\int x^2 \cos x \, dx$ est plus difficile que l'intégrale de départ. Généralement, au moment de choisir u et dv, il faut faire en sorte que $u = f(x)$ soit une fonction qui, après dérivation, soit plus simple (ou pour le moins pas plus compliquée) tout en veillant à ce que $dv = g'(x)dx$ puisse être aisément intégrée pour fournir v.

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\displaystyle\int \ln x \, dx$.

SOLUTION Ici, il n'y a pas vraiment le choix pour u et dv. On pose

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Alors,

$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x.$$

L'intégration par parties conduit à

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x}$$

Il est habituel d'écrire $\int dx$ au lieu de $\int 1\,dx$.

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + C.$$

Vérifiez la réponse en dérivant.

L'intégration par parties se montre efficace ici parce que la dérivée de la fonction $f(x) = \ln x$ est plus simple que f elle-même.

EXEMPLE 3 ■ Calculez $\int x^2 e^x\,dx$.

SOLUTION Soit

$$u = x^2 \qquad dv = e^x\,dx$$

Alors,

$$du = 2x\,dx \qquad v = e^x.$$

En intégrant par parties, on obtient

3 $$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

Bien que la nouvelle intégrale obtenue, $\int xe^x\,dx$, soit plus simple que l'originale, elle n'est pas encore vraiment immédiate. Aussi, on entame une deuxième intégration par parties, avec cette fois $u = x$ et $dv = e^x\,dx$. Alors $du = dx$, $v = e^x$ et

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + C.$$

En injectant ce résultat dans l'équation 3, on arrive à

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x + C)$$

$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C_1 \qquad \text{où } C_1 = -2C.$$

EXEMPLE 4 ■ Calculez $\int e^x \sin x\,dx$.

L'exercice 50 de l'annexe H propose une méthode plus simple, mais qui fait intervenir des nombres complexes.

SOLUTION Soit $u = e^x$ et $dv = \sin x\,dx$. Alors $du = e^x\,dx$ et $v = -\cos x$. L'intégration par parties donne

4 $$\int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx.$$

L'intégrale obtenue $\int e^x \cos x\,dx$ n'est pas plus simple que l'originale, mais pas plus compliquée non plus. Comme une seconde intégration par parties s'est avérée efficace à l'exemple précédent, on persévère. On pose cette fois $u = e^x$ et $dv = \cos x\,dx$.

Alors $du = e^x\,dx$, $v = \sin x$ et

5 $$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Il semble à première vue que ce ne soit pas un succès, puisque l'intégrale $\int e^x \sin x\,dx$ à ce stade des opérations est la même que l'initiale. Pourtant, en introduisant l'équation 5 dans l'équation 4, on obtient

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

Cette expression peut être vue comme une équation satisfaite par l'intégrale inconnue et donc à résoudre par rapport à celle-ci. Ce qui donne

$$2\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x,$$

puis, après division par 2 et addition de la constante d'intégration,

$$\int e^x \sin x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

La figure 1 qui présente les graphiques de $f(x) = e^x \sin x$ et de $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ permet de contrôler visuellement notre calcul, puisque $f(x) = 0$ là où F passe par un maximum ou un minimum.

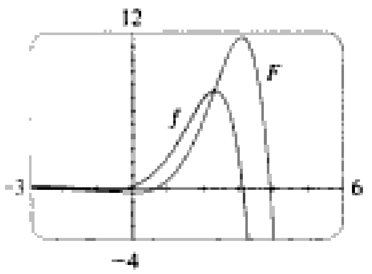


FIGURE 1

Pour calculer des intégrales définies par parties, il faut associer la méthode d'intégration par parties au Théorème de calcul de l'intégrale définie. On calcule la valeur des deux membres de la formule 1 aux bornes a et b, on suppose que f' et g' sont continues et on applique le Théorème de calcul :

6 $$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \text{Arctg}\,x\,dx$.

SOLUTION Soit

$$u = \text{Arctg}\,x \qquad dv = dx$$

Alors,

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = x.$$

La formule 6 conduit à

$$\int_0^1 \text{Arctg}\,x\,dx = x\,\text{Arctg}\,x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= 1\cdot\text{Arctg}\,1 - 0\cdot\text{Arctg}\,0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Comme $\text{Arctg}\,x \geqslant 0$ pour $x \geqslant 0$, l'intégrale de l'exemple 5 est égale à la mesure de l'aire de la région ombrée dans la figure 2.

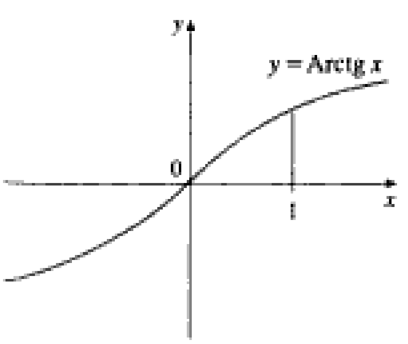


FIGURE 2

Pour calculer cette dernière intégrale, on fait la substitution $t = 1 + x^2$ (puisque la lettre u est déjà dédiée à une autre substitution dans cet exemple). Alors $dt = 2x\,dx$, d'où $x\,dx = dt/2$. Quand $x = 0$, $t = 0$ et quand $x = 1$, $t = 2$; ainsi

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 \operatorname{Arctg} x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

EXEMPLE 6 ■ Démontrez la formule de réduction

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

où n est un entier supérieur à 2.

SOLUTION Soit $\quad u = \sin^{n-1} x \qquad dv = \sin x\,dx$

Alors, $\quad du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

et l'intégration par parties conduit à

$$\int \sin^n x\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx.$$

Or $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, d'où

$$\int \sin^n x\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx.$$

Comme dans l'exemple 4, on résout l'équation par rapport à l'intégrale souhaitée en portant le dernier terme du membre de droite dans le membre de gauche. Cela donne

$$n\int \sin^n x\,dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$

ou

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

Cette formule de réduction est intéressante parce qu'elle permet d'arriver, après un usage itéré, à exprimer $\int \sin^n x\,dx$ en termes de $\int \sin x\,dx$ (dans le cas où n est impair) ou en termes de $\int \sin^0 x\,dx = \int dx$ (dans le cas où n est pair). Si on applique la formule 7 au cas $n = 2$ par exemple, on est conduit à

$$\int \sin^2 x\,dx = -\tfrac{1}{2}\cos x \sin x + \tfrac{1}{2}\int 1\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Et au cas $n = 4$, à

$$\int \sin^4 x\,dx = -\tfrac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \tfrac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{16}\sin 2x + C.$$

5.6 Exercices

1-24 ■ Calculez l'intégrale

1. $\int xe^{2x}\,dx$
2. $\int x\cos x\,dx$
3. $\int x\sin 4x\,dx$
4. $\int x\ln x\,dx$
5. $\int x^2\cos 3x\,dx$
6. $\int x^2\sin 2x\,dx$
7. $\int (\ln x)^2\,dx$
8. $\int \text{Arcsin}\,x\,dx$
9. $\int \theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta$
10. $\int \theta\sec^2\theta\,d\theta$
11. $\int t^2\ln t\,dt$
12. $\int t^3e^t\,dt$
13. $\int e^{2\theta}\sin 3\theta\,d\theta$
14. $\int e^{-\theta}\cos 3\theta\,d\theta$
15. $\int_0^1 te^{-t}\,dt$
16. $\int_1^4 \sqrt{t}\,\ln t\,dt$
17. $\int_0^{\pi/2} x\cos 2x\,dx$
18. $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$
19. $\int_0^{1/2} \text{Arcsin}\,x\,dx$
20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x\,\text{cosec}^2 x\,dx$
21. $\int_1^4 \ln\sqrt{x}\,dx$
22. $\int_0^1 x\,\text{Arctg}\,x\,dx$
23. $\int_0^1 (x^2-1)e^x\,dx$
24. $\int_1^\pi \cos(\ln x)\,dx$

25-28 ■ Calculez l'intégrale en effectuant d'abord une substitution, puis une intégration par parties.

25. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$
26. $\int x^5\cos(x^3)\,dx$
27. $\int x^3e^{x^2}\,dx$
28. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$

29-32 ■ Calculez l'intégrale indéfinie. Illustrez et vérifiez votre réponse en confrontant les graphiques de la fonction et de sa primitive (prenez $C = 0$).

29. $\int x\cos\pi x\,dx$
30. $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$
31. $\int (2x+3)e^x\,dx$
32. $\int x^3e^{x^2}\,dx$

33. Démontrez la formule de réduction

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

34. a) Utilisez la formule de l'exercice 33 pour calculer $\int \cos^2 x\,dx$.
b) Calculez $\int \cos^4 x\,dx$ grâce à la formule de l'exercice 33 et de la partie a) de cet énoncé.

35. a) Montrez que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}x\,dx$$

où n est un entier supérieur à 2, grâce à la formule de l'exemple 6.
b) Utilisez la partie a) pour calculer $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx$.
c) Démontrez, en utilisant la partie a), que pour les puissances impaires de sinus

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

36. Démontrez que pour les puissances paires de sinus

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

37-38 ■ À l'aide de l'intégration par parties, démontrez la formule de réduction

37. $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

38. $\int x^ne^x\,dx = x^ne^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

39. Utilisez l'exercice 37 pour calculez $\int(\ln x)^3dx$.
40. Utilisez l'exercice 38 pour calculer $\int x^4e^x\,dx$.
41. La vitesse d'un objet en mouvement rectiligne est donnée à tout instant t par $v(t) = t^2e^{-t}$ (en m/s). Quelle distance a-t-il parcourue après t secondes ?
42. Une fusée accélère en brûlant le carburant qu'elle a embarqué, ce qui a pour effet de faire diminuer sa masse avec le temps. On suppose que m désigne la masse initiale de la fusée au décollage (y compris le carburant), que r représente la consommation de carburant et que v_e désigne la vitesse constante (par rapport à la fusée) à laquelle sont éjectés les gaz d'échappement. La vitesse de la fusée en fonction du temps peut être modélisée par la fonction

$$v(t) = -gt - v_e\ln\frac{m-rt}{m},$$

où g désigne l'accélération due à la pesanteur et pour des valeurs de t pas trop grandes. Calculez la hauteur de la fusée une minute après le lancer si $g = 9{,}8$ m/s^2, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s et $v_e = 3000$ m/s.

43. Utilisez l'intégration par parties pour montrer que

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

44. a) Démontrez que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,dy$$

dans l'hypothèse où f est injective et f' continue. (*Suggestion :* utilisez l'exercice 43 et faites la substitution $y = f(x)$.)

b) Illustrez géométriquement la formule de la partie a) dans le cas où $b > a > 0$ et f positive.

45. Démontrez que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

dans l'hypothèse où $f(0) = g(0) = 0$.

46. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

a) Montrez que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

b) Utilisez l'exercice 36 pour montrer que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

c) Utilisez les parties a) et b) pour démontrer que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

et déduisez-en que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

d) Utilisez la partie c) et les exercices 35 et 36 pour montrer que

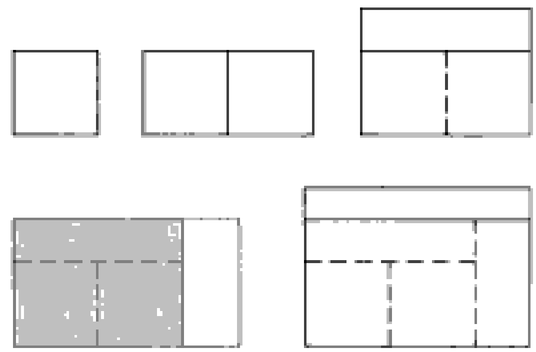
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Cette formule est généralement écrite comme un produit infini

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots$$

et porte le nom de *produit de Wallis*.

e) On construit des rectangles de la façon suivante. On dessine d'abord un carré de côté 1, puis on y accolle des rectangles d'aire unité alternativement à côté et au-dessus du rectangle précédent (voyez la figure). Calculez la limite des rapports entre la largeur et la hauteur de ces rectangles.



5.7 L'intégration avec des tables et des logiciels de calcul symbolique

Nous abordons dans cette section comment calculer des intégrales à l'aide de tables ou de logiciels de calcul symbolique.

Les tables d'intégrales

Les tables de primitives peuvent être d'un grand secours lorsqu'on a à calculer des intégrales difficiles à traiter à la main et qu'on ne dispose pas d'un logiciel de calcul symbolique. Vous trouverez une brève table d'environ 120 primitives usuelles dans l'encart. Mais il existe d'autres tables plus complètes qui contiennent des centaines de pages de primitives. Il faut néanmoins attirer l'attention sur le fait que les intégrales ne se présentent pas souvent sous la forme reprise dans une table. Il est souvent nécessaire de faire une substitution ou des simplifications algébriques pour que l'intégrale donnée prenne l'une des formes présentes dans la table.

EXEMPLE 1 ■ Utilisez la table d'intégrales de ce livre pour calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+12}{x^2+4}\,dx$.

La table d'intégrales figure à la fin de cet ouvrage.

SOLUTION La seule intégrale de la table qui ressemble à l'intégrale donnée est celle qui porte le numéro 17 :

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{u}{a} + C$$

En effectuant la division des polynômes de l'intégrande, on obtient

$$\frac{x^2+12}{x^2+4} = 1 + \frac{8}{x^2+4}$$

Il est maintenant possible d'utiliser la formule 17 en y faisant $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2+12}{x^2+4}\,dx &= \int_0^2 \left(1 + \frac{8}{x^2+4}\right) dx \\ &= x + 8 \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{x}{2}\bigg]_0^2 \\ &= 2 + 4 \operatorname{Arctg} 1 = 2 + \pi. \end{aligned}$$

EXEMPLE 2 ■ Utilisez la table d'intégrales de ce livre pour calculer $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx$.

SOLUTION En regardant dans la table les intégrales qui figurent sous le titre *Formes qui comprennent* $\sqrt{a^2-u^2}$, on voit que la plus proche est celle qui porte le numéro 34 :

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Comme ce n'est pas exactement celle qu'on a à calculer, on fait la substitution $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5-u^2}}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du$$

Maintenant on applique la formule 34 avec $a^2 = 5$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx &= \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du \\ &= \frac{1}{8}\left[-\frac{u}{2}\sqrt{5-u^2} + \frac{5}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{u}{\sqrt{5}}\right] + C \\ &= -\frac{x}{8}\sqrt{5-4x^2} + \frac{5}{16} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C. \end{aligned}$$

EXEMPLE 3 ■ Utilisez la table d'intégrales pour calculer $\displaystyle\int x^3 \sin x\,dx$.

SOLUTION On cherche dans la section intitulée *Formes trigonométriques* et on emploie la formule de réduction 84 avec $n = 3$:

$$\int x^3 \sin x\,dx = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cos x\,dx$$

85. $\int u^n \cos u\,du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u\,du$

Ensuite, on applique les formules 85 et 82 :

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$$
$$= x^2\sin x - 2(\sin x - x\cos x) + K.$$

Enfin on réunit ces calculs et on obtient

$$\int x^3\sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$$

où $C = 3K$.

EXEMPLE 4 ■ Utilisez la table d'intégrales pour calculer $\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

SOLUTION Étant donné que la table ne comprend que les formes $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$ et $\sqrt{x^2-a^2}$, mais pas $\sqrt{ax^2+bx+c}$, on commence par compléter le carré :

$$x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$$

De là, on fait la substitution $u = x + 1$:

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx = \int (u-1)\sqrt{u^2+3}\,du$$
$$= \int u\sqrt{u^2+3}\,du - \int \sqrt{u^2+3}\,du$$

La première des deux intégrales peut être calculée en faisant la substitution $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2+3}\,du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2+3)^{3/2}$$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

Pour la deuxième, on fait appel à la formule 21 avec $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2+3}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+3} + \tfrac{3}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+3})$$

Finalement

$$\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2} - \frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+4}$$
$$- \tfrac{3}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}) + C.$$

■ Logiciels de calcul symbolique

Nous avons vu que, pour se servir des tables, il est indispensable d'adapter la forme des fonctions à intégrer à celle des fonctions qui sont dans les tables. Les ordinateurs sont particulièrement aptes à ce genre d'exercices. Et tout comme nous avons utilisé des substitutions en même temps que les tables, un logiciel de calcul symbolique est capable de réaliser des substitutions qui transforment une intégrale donnée en une autre, qu'il reconnaît alors parmi celles qu'il a en mémoire. Aussi, il n'est pas surprenant qu'un logiciel de calcul symbolique excelle dans l'intégration. Mais cela ne veut pas dire qu'intégrer à la main soit une compétence obsolète. Nous allons voir qu'un calcul à la main mène parfois à une forme plus avantageuse que la réponse fournie par l'ordinateur.

Pour commencer, voyons ce qui se passe lorsqu'il est demandé à une machine d'intégrer la fonction assez simple $y = 1/(3x - 2)$. Manuellement, la substitution $u = 3x - 2$ conduirait à la solution

$$\int \frac{1}{3x - 2}\, dx = \tfrac{1}{3} \ln|3x - 2| + C$$

alors que Derive, Mathematica et Maple renvoie tous la réponse

$$\frac{1}{3}\ln(3x - 2).$$

La première chose à remarquer est que les logiciels omettent la constante d'intégration. Autrement dit, ils fournissent une primitive particulière et non la forme générale de toutes les primitives. Il faudra donc toujours ajouter une constante à la réponse produite par la machine. En second lieu, la valeur absolue manque : c'est très bien si le problème ne se rapporte qu'à des valeurs de x supérieures à 2/3, sinon, il convient d'ajouter le symbole de valeur absolue.

Dans l'exemple suivant, on demande à une machine d'effectuer l'intégration posée dans l'exemple 4.

EXEMPLE 5 ■ Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx$.

SOLUTION Maple répond

$$\tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \tfrac{1}{4}(2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \tfrac{3}{2}\ln(2\sqrt{x^2 + 2x + 4} + 2x + 2)$$

Cette réponse est équivalente à celle que nous avons trouvée dans l'exemple 4 puisque le troisième terme peut être réécrit

$$-\tfrac{3}{2}\ln[2(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1)] = -\tfrac{3}{2}\ln 2 - \tfrac{3}{2}\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}),$$

et qu'ainsi le terme constant $-\frac{3}{2}\ln 2$ est absorbé dans la constante d'intégration.

Mathematica répond

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{Arg\,sh}\left(\frac{1 + x}{\sqrt{3}}\right).$$

Le premier terme est une réécriture des deux premiers de la réponse de l'exemple 4 tandis que les derniers termes des deux réponses sont équivalents à cause de l'identité

$$\operatorname{Argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

C'est la formule du point 9c) dans le Sujet à découvrir à la fin de la section 3.7.

Derive répond

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,(2x^2 + x + 5) - \tfrac{3}{2}\ln(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1).$$

Le premier terme est semblable au premier terme donné par Mathematica tandis que le deuxième terme est identique au dernier terme de la solution de l'exemple 4.

EXEMPLE 6 ■ Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer $\int x(x^2 + 5)^8 dx$.

SOLUTION Maple et Mathematica donnent la même réponse

$$\tfrac{1}{18}x^{18} + \tfrac{5}{2}x^{16} + 50x^{14} + \tfrac{1750}{3}x^{12} + 4375x^{10} + 21875x^8 + \tfrac{218750}{3}x^6 + 156250x^4 + \tfrac{390625}{2}x^2$$

Il apparaît clairement dans la réponse que les deux systèmes ont procédé en développant $(x^2 + 5)^8$ par la formule du binôme de Newton et en intégrant ensuite terme à terme.

C'est aussi la réponse que donne Derive.

Une intégration manuelle, par la substitution $u = x^2 + 5$, mène à

$$\int x(x^2 + 5)^8 \, dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Cette forme-ci est de loin préférable dans la plupart des cas. ■

EXEMPLE 7 ■ Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUTION Derive et Maple envoient la réponse

$$-\tfrac{1}{7}\sin^4 x \cos^3 x - \tfrac{4}{35}\sin^2 x \cos^3 x - \tfrac{8}{105}\cos^3 x,$$

tandis que Mathematica affiche

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Il faut probablement faire jouer des identités trigonométriques pour arriver à montrer que ces réponses sont équivalentes. En effet, si l'on demande à Maple, Derive et Mathematica de simplifier leur réponse à l'aide d'identités trigonométriques, ils finissent par donner la réponse sous la même forme, à savoir

$$\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x.$$ ■

EXEMPLE 8 ■ Soit $f(x) = x + 60\sin^4 x \cos^5 x$. Cherchez une primitive F de f telle que $F(0) = 0$. Tracez la courbe représentative de F pour $0 \leqslant x \leqslant 5$. Situez les valeurs extrêmes et les points d'inflexion de F.

SOLUTION Voici la primitive produite par Maple

$$F(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{20}{3}\sin^3 x \cos^6 x - \tfrac{20}{7}\sin x \cos^6 x + \tfrac{4}{7}\cos^4 x \sin x + \tfrac{16}{21}\cos^2 x \sin x + \tfrac{32}{21}\sin x$$

Elle satisfait à $F(0) = 0$. Il y aurait certainement moyen de simplifier cette expression, mais à quoi bon puisqu'un logiciel de calcul symbolique est capable de tracer la courbe de F aussi bien lorsqu'elle est écrite sous cette forme que sous une autre. La figure 1 reproduit un graphique de F. Afin de localiser un maximum et un minimum de F, on fait tracer la courbe représentative de la dérivée f de F (voyez la figure 2) et on remarque ainsi que F passe par un maximum local en $x \approx 2{,}3$ et par un minimum local en $x \approx 2{,}5$. Le graphique de $F'' = f'$, visible également dans la figure 2, fait apparaître que F présente un point d'inflexion en $x \approx 0{,}7$, 1,3, 1,8, 2,4, 3,3 et 3,9.

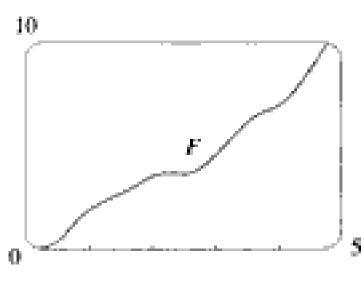


FIGURE 1

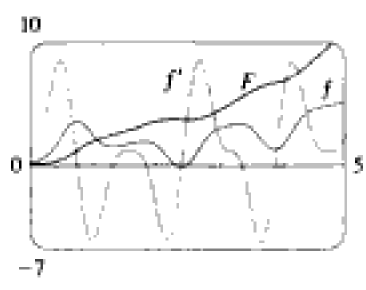


FIGURE 2

Est-il possible d'intégrer toutes les fonctions continues ?

Voici la question qui se pose : Est-ce que toutes les formules d'intégration usuelles, jointes à la règle d'intégration par substitution, à l'intégration par parties, aux tables d'intégrales et aux logiciels de calcul symbolique réussissent à procurer l'intégrale de n'importe quelle fonction continue ? En particulier, peuvent-ils répondre à $\int e^{x^2}dx$? La réponse est non, du moins en termes de fonctions familières.

La plupart des fonctions traitées dans ce livre sont ce qu'il convient d'appeler des **fonctions élémentaires**. Ce sont les polynômes, les fonctions rationnelles, les fonctions puissances (x^a), les fonctions exponentielles (a^x), les fonctions logarithmes, les fonctions trigonométriques et leurs réciproques ainsi que toutes les fonctions que l'on peut obtenir à partir de celles-ci par les cinq opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de composition. Selon cette définition, la fonction

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cos x) - xe^{\sin 2x}$$

est une fonction élémentaire.

Si f est une fonction élémentaire, alors f' en est une aussi, par contre $\int f(x)dx$ pas nécessairement. Considérons $f(x) = e^{x^2}$. Comme f est continue, son intégrale existe et par la première partie du Théorème fondamental du calcul intégral, nous savons que la fonction F définie par

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$$

est telle que

$$F'(x) = e^{x^2}.$$

Donc, $f(x) = e^{x^2}$ a une primitive F mais celle-ci ne fait pas partie de ce que nous avons appelé des fonctions élémentaires. Et quels que soient nos efforts, nous ne réussirons pas à exprimer $\int e^{x^2}dx$ en termes de fonctions connues. (Dans le chapitre 8, nous verrons néanmoins comment exprimer $\int e^{x^2}dx$ comme une série.) Les mêmes commentaires regardent les intégrales suivantes :

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \sin(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3 + 1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Ce qui mène à conclure que la majorité des fonctions élémentaires n'ont pas de primitives élémentaires.

5.7 Exercices

1-22 ■ Utilisez la table d'intégrales de l'encart pour calculer l'intégrale.

1. $\displaystyle\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 + 9}\,dx$

2. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^3(x/2)\,dx$

3. $\displaystyle\int e^{-3x}\cos 4x\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4 - 3x^2}}{x}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9x^2 - 1}}{x^2}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}\,dx$

7. $\displaystyle\int x\,\text{Arcsin}(x^2)\,dx$

8. $\displaystyle\int x^3\,\text{Arcsin}(x^2)\,dx$

9. $\displaystyle\int \sqrt{5 - 4x - x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int x^2\cos 3x\,dx$

11. $\int \sec^5 x\, dx$

12. $\int \sin^6 2x\, dx$

13. $\int \sin^2 x \cos x \ln(\sin x)\, dx$

14. $\int \dfrac{dx}{e^x(1 + 2e^x)}$

15. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$

16. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4x}}\, dx$

17. $\int \dfrac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

18. $\int_0^1 x^4 e^{-x}\, dx$

19. $\int e^x \ln(1 + e^x)\, dx$

20. $\int x^2 \operatorname{Arctg} x\, dx$

21. $\int \sqrt{e^{2x} - 1}\, dx$

22. $\int e^{\sin x} \sin 2x\, dx$

23. Vérifiez la formule 53 de la table d'intégrales a) en dérivant, b) par la substitution $t = a + bu$.

24. Vérifiez la formule 31 de la table a) en dérivant, b) par la substitution $u = a \sin\theta$.

25-32 ■ Calculez l'intégrale avec un logiciel de calcul symbolique. Comparez la réponse avec celle que vous obtenez par la table d'intégrales. Si les réponses ne semblent pas les mêmes, montrez qu'elles sont équivalentes.

25. $\int x^2 \sqrt{5 - x^2}\, dx$

26. $\int x^2(1 + x^3)^4\, dx$

27. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

28. $\int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x\, dx$

29. $\int x\sqrt{1 + 2x}\, dx$

30. $\int \sin^4 x\, dx$

31. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$

32. $\int x^5 \sqrt{x^2 + 1}\, dx$

33. Les logiciels de calcul symbolique ont parfois besoin d'être aidé par un être humain. Demandez à votre logiciel de calculer

$$\int 2^x \sqrt{4^x - 1}\, dx.$$

S'il ne répond pas, demandez-lui d'essayer plutôt

$$\int 2^x \sqrt{2^{2x} - 1}\, dx.$$

Pourquoi à votre avis va-t-il mieux réagir quand la fonction à intégrer est sous cette forme ?

34. Essayez de faire calculer par un logiciel de calcul symbolique

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2}\, dx.$$

S'il ne donne pas de réponse, faites une substitution qui transforme la fonction à intégrer en une autre que le logiciel pourra traiter.

35-36 ■ Calculez une primitive F de f, à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, telle que $F(0) = 0$. Faites dessiner les graphiques de F et f et localisez grossièrement les abscisses des valeurs extrêmes et des points d'inflexion de F.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$

36. $f(x) = xe^{-x} \sin x,\ -5 \leqslant x \leqslant 5$

37-38 ■ Faites appel à un outil graphique pour tracer le graphique de f et sur la base de celui-ci, faites une esquisse, à la main, du graphique de la primitive F qui satisfait à $F(0) = 0$. Ensuite, cherchez avec un logiciel de calcul symbolique l'expression de F, faites-en dessiner le graphique et comparez-le avec votre esquisse.

37. $f(x) = \sin^4 x \cos^6 x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

38. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^6 + 1}$

Sujet à découvrir

Des familles d'intégrales

Cette section propose de découvrir à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique les primitives de familles de fonctions. En observant les modèles qui reviennent dans les intégrales de plusieurs membres de la famille, vous allez d'abord deviner, puis prouver une formule générale de l'intégrale de n'importe quelle fonction de la famille.

1. a) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer les intégrales suivantes

■ $\int \dfrac{1}{(x + 2)(x + 3)}\, dx$ ■ $\int \dfrac{1}{(x + 1)(x + 5)}\, dx$

■ $\int \dfrac{1}{(x + 2)(x - 5)}\, dx$ ■ $\int \dfrac{1}{(x + 2)^2}\, dx$

b) Conjecturez l'expression de l'intégrale

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$$

dans le cas $a \neq b$, en vous inspirant des réponses obtenues dans la partie a). Et dans le cas $a = b$?

c) Vérifiez votre conjecture en demandant à votre logiciel de calcul symbolique de calculer l'intégrale de la partie b). Ensuite, démontrez-la en calculant sa dérivée.

2. a) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer les intégrales suivantes.

■ $\int \sin x \cos 2x\,dx$ ■ $\int \sin 3x \cos 7x\,dx$

■ $\int \sin 8x \cos 3x\,dx$

b) Conjecturez l'expression de l'intégrale

$$\int \sin ax \cos bx\,dx$$

en vous inspirant des réponses obtenues dans la partie a).

c) Vérifiez votre conjecture grâce à votre logiciel de calcul symbolique. Ensuite, démontrez-la soit en calculant la dérivée, soit en intégrant par parties. Pour quelles valeurs de a et b est-elle valable ?

3. a) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer les intégrales suivantes.

■ $\int \ln x\,dx$ ■ $\int x \ln x\,dx$

■ $\int x^2 \ln x\,dx$ ■ $\int x^3 \ln x\,dx$

■ $\int x^7 \ln x\,dx$

b) Conjecturez l'expression de l'intégrale

$$\int x^n \ln x\,dx$$

en vous inspirant des réponses obtenues dans la partie a).

c) Vérifiez votre conjecture en intégrant par parties. Pour quelles valeurs de n est-elle valable ?

4. a) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer les intégrales suivantes.

■ $\int xe^x\,dx$ ■ $\int x^2e^x\,dx$

■ $\int x^3e^x\,dx$ ■ $\int x^4e^x\,dx$

■ $\int x^5e^x\,dx$

b) Conjecturez l'expression de l'intégrale $\int x^6e^x\,dx$ en vous inspirant des réponses obtenues dans la partie a). Vérifiez votre conjecture grâce à votre logiciel de calcul symbolique.

c) Sur la base des modèles reconnus dans les parties a) et b), conjecturez l'expression de l'intégrale

$$\int x^n e^x\,dx$$

lorsque n est entier positif.

d) Démontrez par récurrence la formule conjecturée au point c).

5.8 L'intégration approchée

Il y a deux situations dans lesquelles il est impossible de calculer la valeur exacte d'une intégrale définie.

La première est celle où il est difficile, voire impossible de trouver une primitive (voyez la section 5.7). Il est, pour cette raison, impossible, par exemple, de calculer exactement les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx$$

La deuxième situation est celle où la fonction n'est connue que par les données expérimentales lues sur des instruments ou collectées. De ce fait, la formule qui définirait la fonction n'est pas connue (voyez l'exemple 5).

Dans les deux cas, on ne pourra chercher que des valeurs approchées des intégrales définies. Une de ces méthodes est déjà connue. Il suffit de se souvenir qu'une intégrale définie est définie comme une limite de sommes de Riemann, ce qui fait de n'importe quelle somme de Riemann une valeur approchée de l'intégrale définie. Plus précisément, divisons $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $\Delta x = (b - a)/n$. Alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\,\Delta x$$

où x_i^* est un point quelconque du $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Lorsque x_i^* est choisi en l'extrémité gauche du sous-intervalle ou $x_i^* = x_{i-1}$, alors

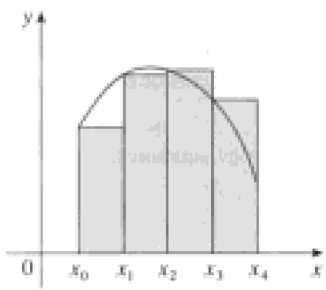
1 $$\int_a^b f(x)\,dx \approx G_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\,\Delta x.$$

Au cas où $f(x) \geqslant 0$, l'intégrale définie représente une aire et (1) fournit une approximation de cette aire, celle de l'ensemble des rectangles ombrés de la figure 1(a). Lorsque x_i^* est choisi en l'extrémité droite du sous-intervalle ou $x_i^* = x_i$, alors

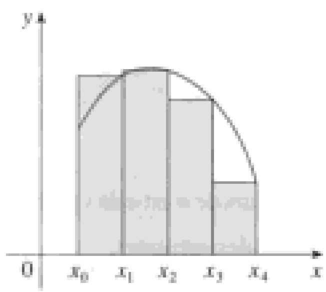
2 $$\int_a^b f(x)\,dx \approx D_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x$$

[voyez la figure 1(b)]. Les approximations G_n et D_n définies par les équations 1 et 2 sont appelées respectivement les approximations des extrémités gauches et des extrémités droites, ou plus brièvement **approximations à gauche** et **approximations à droite**.

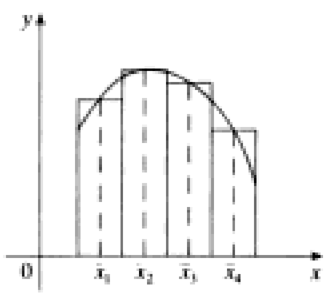
Dans la section 5.2, on a aussi envisagé le cas où x_i^* était le point milieu $\bar{x}_i$ du sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. La figure 1(c) illustre l'approximation au milieu M_n qui semble meilleure que G_n ou D_n.



(a) Approximation à gauche



(b) Approximation à droite



(c) Approximation au milieu

FIGURE 1

Méthode du point médian

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

où

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

et

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{point milieu de } [x_{i-1}, x_i]$$

La moyenne arithmétique des approximations 1 et 2 constitue encore une autre approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \tfrac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[\left(f(x_0) + f(x_1)\right) + \left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \cdots + \left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

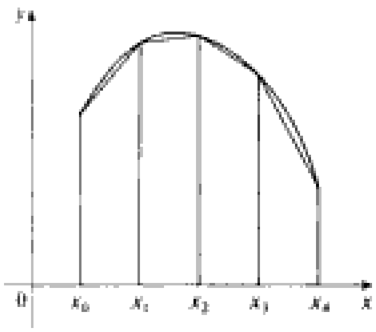


FIGURE 2
Approximation des Trapèzes

Méthode des trapèzes

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

où

$$\Delta x = (b-a)/n \qquad \text{et} \qquad x_i = a + i\Delta x.$$

L'appellation Méthode des trapèzes devient manifeste dans la figure 2, qui illustre le cas $f(x) \geqslant 0$. L'aire du trapèze qui repose sur le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle est égale à

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$$

et la somme des aires de tous ces trapèzes est égale au membre de droite de la Méthode des trapèzes.

EXEMPLE 1 ■ Utilisez a) la Méthode des trapèzes et b) La Méthode du point médian avec $n = 5$ pour calculer une valeur approchée de l'intégrale $\int_1^2 (1/x)dx$.

SOLUTION

a) Si $n = 5$, $a = 1$ et $b = 2$, $\Delta x = (2-1)/5 = 0{,}2$ et la Méthode des trapèzes donne

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}\left[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)\right]$$

$$= 0{,}1\left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right]$$

$$\approx 0{,}695635$$

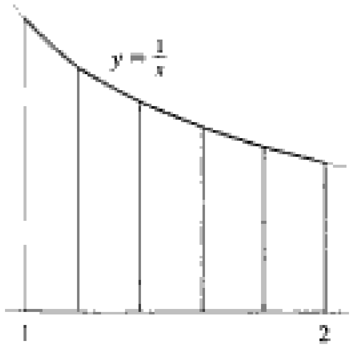


FIGURE 3

Cette valeur approchée est illustrée dans la figure 3.

b) Les centres des cinq sous-intervalles sont 1,1, 1,3, 1,5, 1,7 et 1,9, d'où la Méthode du point médian donne

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\left[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1{,}7} + \frac{1}{1{,}9}\right)$$

$$\approx 0{,}691908$$

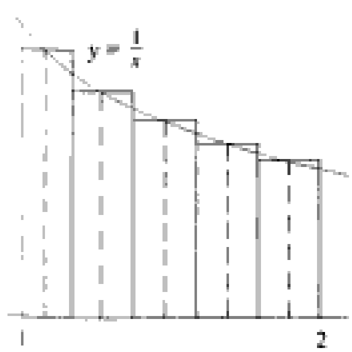


FIGURE 4

Cette valeur approchée est illustrée dans la figure 4.

L'intégrale de l'exemple 1 a été choisie parce qu'elle peut être calculée explicitement et qu'il est ainsi possible de juger de la précision offerte par la Méthode des trapèzes et la Méthode du point médian. Suivant le Théorème de calcul de l'intégrale définie,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0{,}693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ approximation + erreur

L'**erreur** relative à une valeur approchée est la quantité qu'il faudrait lui ajouter pour la rendre exacte. La comparaison avec les valeurs de l'exemple 1 montre que les erreurs des valeurs approchées obtenues par la Méthode des trapèzes et la Méthode du point médian pour $n = 5$ sont

$$E_T \approx -0{,}002488 \qquad \text{et} \qquad E_M \approx 0{,}001239.$$

De façon générale, on a

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{et} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n.$$

Si on applique, comme dans l'exemple 1, la Méthode des trapèzes et la Méthode du point médian pour $n = 5$, 10 et 20 et qu'on y ajoute les approximations à gauche et à droite, on obtient les tables suivantes.

Valeurs approchées de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	G_n	D_n	T_n	M_n
5	0,745635	0,645635	0,695635	0,691908
10	0,718771	0,668771	0,693771	0,692835
20	0,705803	0,680803	0,693303	0,693069

Erreurs correspondantes

n	E_G	E_D	E_T	E_M
5	−0,052488	0,047512	−0,002488	0,001239
10	−0,025624	0,024376	−0,000624	0,000312
20	−0,012656	0,012344	−0,000156	0,000078

Voici plusieurs remarques à propos de ces tables :

1. La précision de toutes les méthodes s'accroît avec n. (Néanmoins, il faut être conscient que de très grandes valeurs de n, impliquant un grand nombre d'opérations arithmétiques, peuvent avoir pour effet de cumuler des erreurs d'arrondis.)
2. Les erreurs des approximations à gauche et à droite sont de signes opposés et semblent être à peu près réduites de moitié chaque fois que n double.
3. Les Méthodes des trapèzes et du point médian donnent des résultats plus précis que les approximations à gauche et à droite.
4. Les erreurs des Méthodes des trapèzes et du point médian sont de signes opposés et semblent être à peu près réduites d'un facteur 4 lorsque n double.
5. L'erreur de la Méthode du point médian vaut, en valeur absolue, environ la moitié de celle de la Méthode des trapèzes.

La figure 5 montre pourquoi il est normal de s'attendre à ce que la Méthode du point médian donne un meilleur résultat que celle des trapèzes. L'aire d'un des rectangles construits selon la Méthode du point médian est égale à celle du trapèze $ABCD$ fermé supérieurement par la tangente à la courbe au point P. L'aire de ce trapèze est plus proche de l'aire sous la courbe que celle du trapèze $AQRD$ construit selon la Méthode des trapèzes. (La région ombrée en rouge (Méthode du point médian) est plus petite que celle ombrée en bleu (Méthode des trapèzes).)

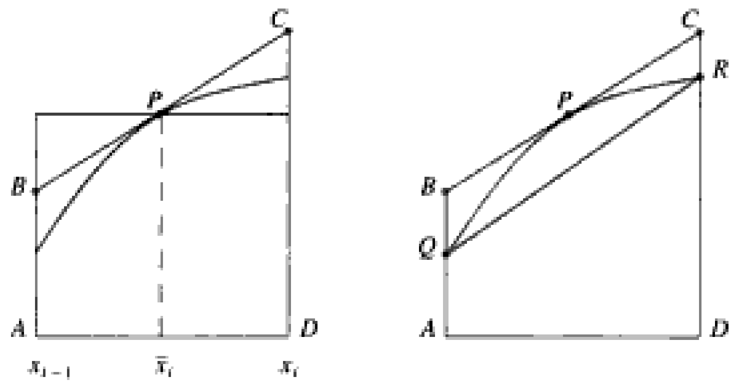


FIGURE 5

Ces remarques sont confirmées par les formules d'estimation des erreurs que l'on trouve dans les livres d'analyse numérique. La remarque 4 correspond au n^2 présent dans chaque dénominateur: en effet, $(2n)^2 = 4n^2$. Il n'est pas non plus surprenant, au vu de la figure 5, que ces estimations dépendent de la valeur de la dérivée seconde qui mesure le degré de courbure du graphique (rappelez-vous que $f''(x)$ mesure la vitesse avec laquelle varie la pente de f).

3 Bornes d'erreur On suppose que $|f''(x)| \leqslant K$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_T et E_M désignent les erreurs relatives à la Méthode des trapèzes et à la Méthode du point médian, alors

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{et} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Appliquons cette estimation de l'erreur à la valeur approchée donnée par la Méthode des trapèzes dans l'exemple 1. Pour $f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$ et $f''(x) = 2/x^3$. Lorsque $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1/x \leqslant 1$ et donc

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

De là, pour $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ et $n = 5$ dans la formule d'erreur (3), on voit que

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0{,}006667$$

La comparaison entre cette estimation de l'erreur 0,006667 et l'erreur réellement commise 0,002488 montre que l'erreur réellement commise peut être bien moindre que la borne supérieure prévue par la formule (3).

EXEMPLE 2 ■ Quelle serait une valeur de n suffisamment grande pour que les valeurs approchées fournies par la Méthode des trapèzes et par la Méthode du point médian de $\int_1^2 (1/x)dx$ soient précises à moins de 0,0001 ?

SOLUTION Des calculs antérieurs ayant montré que $|f''(x)| \leqslant 2$ lorsque $1 \leqslant x \leqslant 2$, on peut prendre $K = 2$, $a = 1$ et $b = 2$ dans la formule (3). Précis à 0,0001 près signifie que l'erreur doit être inférieure à 0,0001. Il faut donc choisir n pour que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0{,}0001.$$

On résout cette inégalité par rapport à n :

$$n^2 > \frac{2}{12(0{,}0001)}$$

ou

$$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0006}} \approx 40{,}8$$

C'est donc en prenant $n = 41$ qu'on aura la précision souhaitée.

Pour arriver à la même précision par la Méthode du point médian, il faut choisir n tel que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0{,}0001$$

ce qui donne

$$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0012}} \approx 29.$$

EXEMPLE 3 ■

a) Calculez une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$ par la Méthode du point médian avec $n = 10$.

b) Déterminez une borne supérieure de l'erreur associée à cette valeur approchée.

SOLUTION

a) Comme $a = 0$, $b = 1$ et $n = 10$, la Méthode du point médian fournit la valeur approximative

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \Delta x[f(0{,}05) + f(0{,}15) + \cdots + f(0{,}85) + f(0{,}95)]$$
$$= 0{,}1[e^{0{,}0025} + e^{0{,}0225} + e^{0{,}0625} + e^{0{,}1225} + e^{0{,}2025} + e^{0{,}3025} + e^{0{,}4225} + e^{0{,}5625} + e^{0{,}7225} + e^{0{,}9025}]$$
$$\approx 1{,}460393.$$

La figure 6 illustre ce calcul.

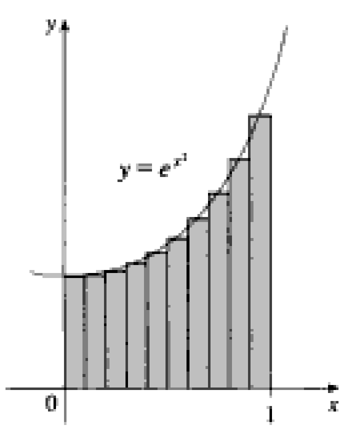


FIGURE 6

b) Comme $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = 2xe^{x^2}$ et $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x^2 \leqslant 1$ et donc

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

Pour $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$ et $n = 10$, la formule (3) fixe l'erreur maximale commise à

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0{,}007.$$

Les formules relatives à l'erreur en donnent des bornes supérieures ou, théoriquement, ce qui se passe dans le pire des cas. Ici, l'erreur tourne en réalité autour de 0,0023.

La Méthode de Simpson

Cette autre règle pour calculer des valeurs approchées d'une intégrale résulte du remplacement de la courbe, non pas par un segment de droite, mais par un arc de parabole. Comme précédemment, on divise $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur $h = \Delta x = (b - a)/n$, mais cette fois en supposant *n pair*. Ensuite, on substitue à la courbe $y = f(x) \geq 0$, sur chaque paire d'intervalles adjacents, un arc de parabole comme le montre la figure 7. Si $y_i = f(x_i)$, alors $P_i(x_i, y_i)$ désigne le point de la courbe au-dessus de x_i. Une parabole passe par chaque triplet de points consécutifs P_i, P_{i+1}, P_{i+2}.

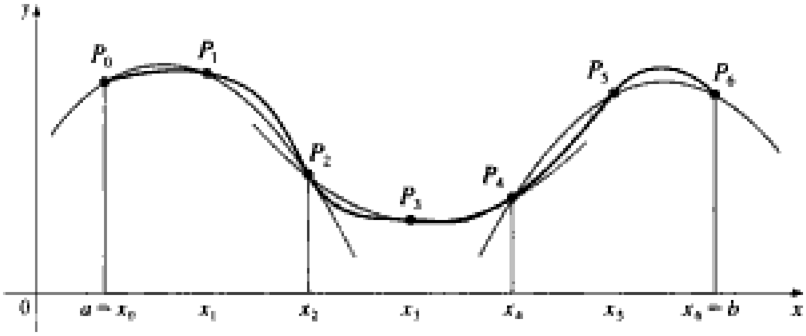


FIGURE 7

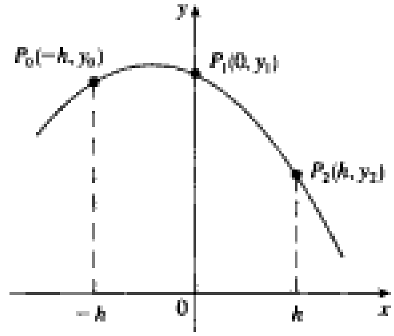


FIGURE 8

Les calculs sont plus simples dans le cas où $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ et $x_2 = h$ (voyez la figure 8). Comme l'équation d'une parabole qui passe par P_0, P_1 et P_2 s'écrit $y = Ax^2 + Bx + C$, l'aire de la région sous la parabole depuis $x = -h$ jusqu'à $x = h$ est égale à

Ceci en vertu du théorème 6 de la section 5.5. Il est à noter que $Ax^2 + C$ est une fonction paire tandis que Bx est une fonction impaire.

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx &= 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx \\ &= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h \\ &= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C).\end{aligned}$$

Que la parabole passe par les points $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$ et $P_2(h, y_2)$ entraîne

$$\begin{aligned}y_0 &= A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C\end{aligned}$$

et de là

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Compte tenu de cette expression, l'aire sous la parabole est égale à

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Comme une translation horizontale de la parabole et donc aussi de la région qu'elle délimite ne modifie en rien l'aire de cette dernière, on peut affirmer que l'aire sous la parabole passant par P_0, P_1 et P_2 depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_2$ vaut toujours

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Il en est de même de l'aire sous la parabole qui passe par P_2, P_3 et P_4 depuis $x = x_2$ jusqu'à $x = x_4$:

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

La somme des aires sous toutes ces paraboles s'écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

Même si on a établi cette approximation dans le cas où $f(x) \geqslant 0$, c'est une approximation acceptable pour toute fonction continue f et elle porte le nom de Méthode de Simpson en l'honneur du mathématicien anglais Thomas Simpson (1710-1761). Remarquez la suite des coefficients : 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . ., 4, 2, 4, 1.

Thomas Simpson était tisserand et se forma seul aux mathématiques. Il devint un des meilleurs mathématiciens anglais du 18[e] siècle. La règle qui porte son nom était déjà connue de Cavalieri et de Gregory un siècle plus tôt, mais Simpson la fit connaître par son livre de calcul différentiel et intégral à succès, intitulé *Un nouveau traité sur les fluxions*.

Méthode de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

où n est pair et $\Delta x = (b - a)/n$

EXEMPLE 4 ■ Calculez par la Méthode de Simpson avec $n = 10$ une valeur approchée de l'intégrale $\int_1^2 (1/x)dx$.

SOLUTION En prenant $f(x) = 1/x$, $n = 10$ et $\Delta x = 0{,}1$ dans la formule de Simpson, on obtient

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{10} = \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)]$$

$$= \frac{0{,}1}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{4}{1{,}1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{4}{1{,}3} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{4}{1{,}5} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{4}{1{,}7} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{4}{1{,}9} + \frac{1}{2}\right]$$

$$\approx 0{,}693150.$$

La valeur approchée calculée dans l'exemple 4 par la Méthode de Simpson est une meilleure approximation de la valeur exacte ($\ln 2 \approx 0{,}693147\ldots$) que celle fournie par la Méthode des trapèzes ($T_{10} \approx 0{,}693771$) ou par la Méthode du point médian

($M_{10} \approx 0{,}692835$). Il se fait que (voyez l'exercice 32) les approximations selon la Méthode de Simpson sont des moyennes pondérées des approximations selon la Méthode des trapèzes et la Méthode du point médian :

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Rappelez-vous que E_T et E_M sont de signes contraires et que $|E_M|$ vaut environ la moitié de $|E_T|$.)

Dans les domaines d'application du calcul différentiel et intégral, il arrive d'avoir à calculer l'intégrale d'une fonction dont la formule qui lie y à x n'est pas connue. Seuls un graphique ou une table de valeurs rassemblées expérimentalement définissent la fonction. S'il est avéré que les valeurs ne changent pas rapidement, alors la Méthode des trapèzes et la Méthode de Simpson peuvent encore être appliquées pour déterminer une valeur approchée de $\int_a^b y\,dx$, l'intégrale de y par rapport à x.

t	$r(t)$
1984	4,3
1985	3,6
1986	1,9
1987	3,6
1988	4,1
1989	4,8
1990	5,4
1991	4,2
1992	3,0
1993	3,0
1994	2,6

EXEMPLE 5 ■ Le taux d'inflation $r(t)$ est la dérivée de l'indice des prix à la consommation, calculé comme la moyenne des prix d'un « panier représentatif de biens ». La table ci-contre reprend les taux d'inflation (en pour cent) aux États-Unis entre 1984 et 1994 tels que les fournit le Bureau américain des statistiques du travail. Quelle estimation la Méthode de Simpson donne-t-elle de l'augmentation totale de l'indice des prix à la consommation entre 1984 et 1994 ?

SOLUTION Vu que la dérivée de l'indice des prix à la consommation est le taux d'inflation, l'augmentation totale de l'indice des prix à la consommation entre 1984 et 1994 est donné, selon le Théorème de variation totale (voyez la section 5.3), par

$$\int_{1984}^{1994} r(t)dt.$$

On applique la Méthode de Simpson avec $n = 10$. Chaque intervalle est de longueur $\Delta t = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{1984}^{1994} r(t)\,dt \\
&\approx \frac{\Delta t}{3}[r(1984) + 4r(1985) + 2r(1986) + \cdots + 4r(1993) + r(1994)] \\
&\approx \tfrac{1}{3}[4{,}3 + 4(3{,}6) + 2(1{,}9) + 4(3{,}6) + 2(4{,}1) + 4(4{,}8) \\
&\qquad + 2(5{,}4) + 4(4{,}2) + 2(3{,}0) + 4(3{,}0) + 2{,}6] \\
&= 37{,}5
\end{aligned}$$

L'indice des prix à la consommation a donc augmenté d'environ 37,5 % entre 1984 et 1994. □

À l'exercice 20, il est demandé de démontrer, dans un cas particulier, que l'erreur associée à la Méthode de Simpson est réduite d'un facteur 16 lorsque n est doublé. Cela concorde avec la présence de n^4 au dénominateur de la formule que voici, relative à l'estimation de l'erreur en cas d'application de la Méthode de Simpson. Elle est analogue aux formules (3) relatives à la Méthode des trapèzes et à la Méthode du point médian, mais fait intervenir la dérivée quatrième de f.

4 Borne d'erreur pour la Méthode de Simpson On suppose que $|f^{(4)}(x)| \leqslant K$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_S désigne l'erreur relative à la Méthode de Simpson, alors

$$|E_S| \leqslant \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EXEMPLE 6 ■ Quelle serait une valeur de n suffisamment grande pour que la valeur approchée fournie par la Méthode de Simpson de $\int_1^2 (1/x)dx$ soit précise à moins de 0,0001 ?

SOLUTION Si $f(x) = 1/x$, alors $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Comme $x \geqslant 1$, $1/x \leqslant 1$ et donc

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Beaucoup d'ordinateurs ou de logiciels de calculs algébriques sont pourvus d'algorithmes intégrés destinés à l'évaluation d'une intégrale définie. Certains utilisent la Méthode de Simpson, d'autres emploient des techniques plus sophistiquées telle l'*intégration numérique adaptée*. Cela veut dire qu'au cas où une fonction varie beaucoup plus sur une partie de l'intervalle d'intégration qu'ailleurs, cette partie est subdivisée plus finement. Cette façon de faire réduit le nombre de calculs nécessaires à la précision requise.

Ainsi, en prenant $K = 24$ et pour avoir une erreur inférieure à 0,0001, la formule (4) impose de choisir n tel que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0{,}0001.$$

Cela donne

$$n^4 > \frac{24}{180(0{,}0001)}$$

ou

$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}00075}} \approx 6{,}04.$$

La précision souhaitée est atteinte pour $n = 8$ (n doit être pair). C'est bien moins que le $n = 41$ de la Méthode des trapèzes et $n = 29$ de la Méthode du point médian.

EXEMPLE 7 ■

a) Calculez une valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 e^{x^2} dx$ par la Méthode de Simpson avec $n = 10$.

b) Déterminez une borne supérieure de l'erreur associée à cette valeur approchée.

SOLUTION

a) Si $n = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ et la Méthode de Simpson donne

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + \cdots + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)]$$

$$= \frac{0{,}1}{3}[e^0 + 4e^{0{,}01} + 2e^{0{,}04} + 4e^{0{,}09} + 2e^{0{,}16} + 4e^{0{,}25} + 2e^{0{,}36}$$

$$+ 4e^{0{,}49} + 2e^{0{,}64} + 4e^{0{,}81} + e^1]$$

$$\approx 1{,}462681.$$

La figure 9 illustre les calculs de l'exemple 7. Les arcs de parabole sont tellement proches de la courbe représentative de e^{x^2} qu'il est difficile de les distinguer.

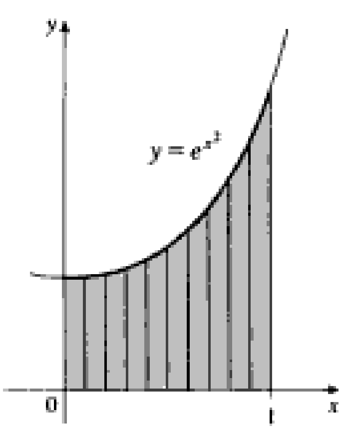


FIGURE 9

b) La dérivée quatrième de $f(x) = e^{x^2}$ est

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2},$$

d'où, puisque $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e.$$

Par conséquent, pour $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ et $n = 10$, la formule (4) annonce une erreur maximale de

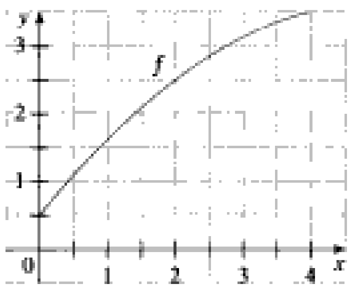
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0{,}000115.$$

(Cette réponse est à rapprocher de celle de l'exemple 3.) On voit qu'avec trois décimales correctes, l'intégrale demandée vaut

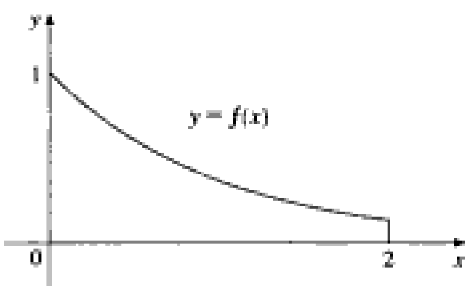
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx 1{,}463.$$

5.8 Exercices

1. Soit $I = \int_0^4 f(x)dx$ où f est la fonction dont vous voyez le graphique ci-dessous.
   a) Calculez G_2, D_2 et M_2 à partir du graphique.
   b) Ces nombres donnent-ils une estimation de I par défaut ou par excès ?
   c) Calculez T_2 à partir du graphique. Comparez T_2 avec I.
   d) Classez L_n, R_n, M_n, T_n et I en ordre croissant, quelle que soit la valeur de n.



2. On a employé l'approximation à droite, à gauche, la Méthode des trapèzes et la Méthode du point médian pour estimer $\int_0^2 f(x)dx$ où f est la fonction dont le graphique est dessiné ci-après. Dans chaque cas, le nombre de sous-intevalles a été le même et les résultats sont 0,9540, 0,7811, 0,8675 et 0,8632.



   a) Associez les règles employées aux résultats obtenus.
   b) Situez la valeur exacte de $\int_0^2 f(x)dx$ entre deux de ces nombres.

3. Cherchez une estimation de la valeur de $\int_0^1 \cos(x^2)dx$ a) par la Méthode des trapèzes et b) par la Méthode du point médian, chaque fois avec $n = 4$. Dites si le résultat est une sous-estimation ou l'inverse, en faisant dessiner la courbe représentative de la fonction à intégrer. Que pouvez-vous dire à propos de la valeur exacte de l'intégrale ?

4. Faites apparaître la courbe d'équation $y = \sin(x^2/2)$ dans une fenêtre de $[0, 1]$ sur $[0; 0{,}5]$ et soit I l'intégrale de cette fonction de 0 à 1.
   a) Sur la base du graphique, déterminez si G_2, D_2, M_2 et T_2 sont des estimations par défaut ou par excès de I.
   b) Classez G_n, D_n, M_n, T_n et I en ordre croissant, quelle que soit la valeur de n.
   c) Calculez G_5, D_5, M_5 et T_5. Lequel de ces nombres est au vu du graphique la meilleure approximation de I ?

5-12 ■ Calculez une valeur approchée de l'intégrale a) par la Méthode des trapèzes, b) par la Méthode du point médian et c) par la Méthode de Simpson, pour la valeur indiquée de n. (Arrondissez la réponse à la sixième décimale.)

5. $\int_0^1 e^{-x^2}dx,\ n = 10$

6. $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx,\ n = 10$

7. $\int_0^{1/2} \cos(e^x)\,dx,\ n = 8$

8. $\int_2^3 \dfrac{1}{\ln x}\,dx,\ n = 10$

9. $\int_0^1 x^5 e^x\,dx,\ n = 10$

10. $\int_0^4 \sqrt{x}\sin x\,dx,\ n = 8$

11. $\int_0^3 \dfrac{1}{1 + x^4}\,dx,\ n = 6$

12. $\int_1^4 \dfrac{e^x}{x}\,dx,\ n = 10$

13. a) Calculez les approximations T_{10} et M_{10} de l'intégrale $\int_0^2 e^{-x^2}dx$.
   b) Estimez les erreurs dont ces valeurs approximatives sont affectées.
   c) Quelle valeur de n faut-il choisir pour que les valeurs T_n et M_n soient précises à 0,00001 près ?

14. a) Calculez les approximations T_4, T_8, M_4 et M_8 de l'intégrale $\int_0^1 \cos(x^2)dx$.
   b) Estimez les erreurs dont ces valeurs approximatives sont affectées.

15. a) Calculez les approximations T_{10} et S_{10} de l'intégrale $\int_0^1 e^x\,dx$, ainsi que les erreurs E_T et E_S associées.
   b) Comparez les erreurs réelles de la partie a) avec les estimations qu'en donnent (3) et (4).
   c) Quelle valeur de n faut-il choisir pour que les valeurs approchées T_n, M_n et S_n de cette intégrale soient précises à 0,00001 près ?

16. Quelle valeur de n faut-il choisir pour que la valeur approchée de $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ que donne la Méthode de Simpson soit précise à 0,00001 près ?

17. L'ennui avec les formules d'erreur c'est qu'il est souvent difficile de calculer à la main la dérivée quatrième de la fonction à intégrer et d'en obtenir une borne supérieure de la valeur absolue. Par contre, vu que les logiciels de calcul symbolique n'ont aucune difficulté à calculer $f^{(4)}$ et à en produire le graphique, on peut alors assez aisément découvrir une valeur pour K. Cet exercice traite des approximations de l'intégrale $I = \int_0^{2\pi} f(x)dx$ où $f(x) = e^{\cos x}$.

a) Déterminez une borne supérieure de $|f''(x)|$ à partir de sa représentation graphique.

b) Calculez l'approximation M_{10} de I.

c) Estimez l'erreur de cette approximation en employant la borne de la partie a).

d) Quelle approximation de I fournit le logiciel d'intégration numérique incorporé dans votre calculatrice ?

e) Rapprochez l'erreur réelle de son estimation faite en c).

f) Déterminez une borne supérieure de $|f^{(4)}(x)|$ à partir de sa représentation graphique.

g) Calculez l'approximation S_{10} de I.

h) Estimez l'erreur de cette approximation en employant la borne de la partie (f).

i) Rapprochez l'erreur réelle de son estimation faite en (h).

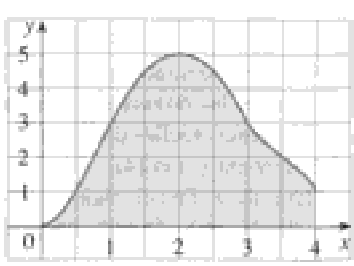
j) Quelle valeur de n faut-il choisir pour que la valeur approchée S_n de cette intégrale soit précise à 0,0001 près ?

18. Répétez l'exercice 17 à propos de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

19. Calculez les valeurs approchées G_n, D_n, T_n et M_n de l'intégrale $\int_0^1 x^3 dx$ pour $n = 4$, 8 et 16. Calculez ensuite les erreurs correspondantes E_G, E_D, E_T et E_M. (Arrondissez les résultats à la sixième décimale.) Quelles observations pouvez-vous faire ? En particulier, que se passe-t-il lorsque n double ?

20. Calculez les valeurs approchées T_n, M_n et S_n de l'intégrale $\int_{-1}^{2} xe^x\,dx$ pour $n = 6$ et 12. Calculez ensuite les erreurs correspondantes E_T, E_M, et E_S. (Arrondissez les résultats à la sixième décimale.) Que pouvez-vous observer ? En particulier, que se passe-t-il lorsque n double ?

21. Évaluez l'aire sous la courbe de la figure a) par la Méthode des trapèzes, b) par la Méthode du point médian et c) par la Méthode de Simpson, avec $n = 4$ dans chaque cas.



22. a) À partir du tableau des valeurs de $f(x)$ et par la Méthode de Simpson, estimez $\int_2^6 f(x)dx$.

x	$f(x)$
2	9,22
2,5	9,01
3	8,76
3,5	8,30
4	7,52
4,5	6,83
5	7,32
5,5	7,69
6	7,91

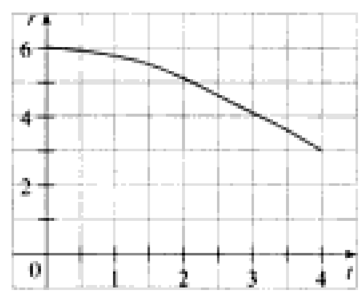
b) Sachant que $-2 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant 5$ quel que soit x, faites-vous une idée de l'erreur commise dans la partie a).

23. La lecture, chaque minute, du tachymètre d'une voiture a conduit au tableau de valeurs de la vitesse v que voici.

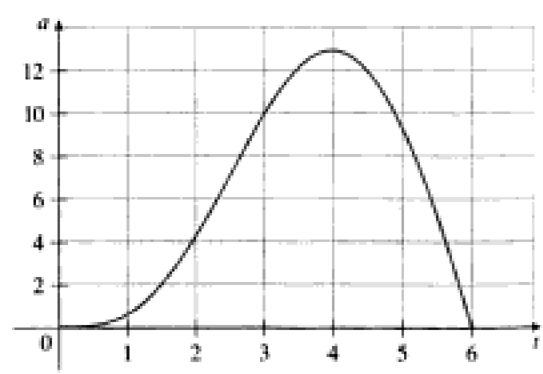
t (min)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v (km/h)	40	42	45	49	52	54	56	57	57	55	56

Quelle distance la voiture a-t-elle parcourue selon la Méthode de Simpson ?

24. Voici le graphique de la vitesse $r(t)$ à laquelle de l'eau s'échappe d'une citerne en nombre de litres par heure. Au vu du graphique et selon la Méthode de Simpson, combien de litres se sont-ils écoulés durant les quatre premières heures ?



25. Voici le graphique de l'accélération $a(t)$ d'une voiture, mesurée en dm/s^2 pendant 6 secondes. Appréciez l'augmentation de vitesse de cette voiture durant cet intervalle de temps, que donne la Méthode de Simpson.



26. La compagnie du gaz et de l'électricité distributrice de l'énergie électrique dans la baie de San Francisco a relevé la puissance consommée entre minuit et midi le 19 septembre 1996. Évaluer la quantité d'énergie consommée pendant ce temps, en employant la Méthode de Simpson (rappelez-vous que la puissance est la dérivée de l'énergie).

t	12	1	2	3	4	5	6
P	4182	3856	3640	3558	3547	3679	4112

t	7	8	9	10	11	12
P	4699	5151	5514	5751	6044	6206

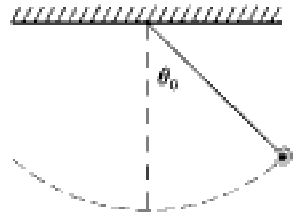
27. À côté du taux général d'inflation (exemple 5), le Bureau américain des statistiques du travail publie aussi les taux de croissance des prix de certaines catégories de biens. La table donne la vitesse à laquelle varie le prix de l'alimentation (en pour cent). Utilisez la Méthode de Simpson pour estimer le pourcentage total d'augmentation du coût de l'alimentation entre 1986 et 1994.

t	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
r	3,2	4,1	4,1	5,8	5,8	2,9	1,2	2,2	2,4

28. La figure montre un pendule de longueur L qui fait un angle maximum θ_0 avec la verticale. Selon la deuxième loi de Newton, la période T (durée d'une oscillation complète) est donnée par

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

où $k = \sin(\frac{1}{2}\theta_0)$ et où g est l'accélération due à la pesanteur. Si $L = 1$ m et $\theta_0 = 42°$, évaluez la période en utilisant la Méthode de Simpson avec $n = 10$.



29. On suppose que f est une fonction positive et que $f''(x) < 0$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Montrez que

$$T_n < \int_a^b f(x)\,dx < M_n.$$

30. Démontrez que la Méthode de Simpson donne la valeur exacte de $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque f est une fonction polynomiale de degré 3 ou moins.

31. Démontrez que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

32. Démontrez que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

5.9 Les intégrales impropres

Lors de la définition de $\int_a^b f(x)\,dx$ il était supposé avoir affaire à une fonction f définie sur un intervalle fini $[a, b]$ et ne présentant pas de discontinuité infinie (voyez la section 5.2). On va étendre, dans cette section, le concept d'intégrale définie au cas où l'intervalle est infini ainsi qu'au cas où f présente une discontinuité infinie sur $[a, b]$. Dans les deux cas, on parle d'intégrale *impropre*. Ce sont les distributions de probabilité, étudiées dans la section 6.7, qui constituent la principale application de ces nouvelles définitions.

■ Type 1 : Intervalles infinis

Considérons la région infinie S située sous la courbe $y = 1/x^2$, au-dessus de l'axe Ox et à droite de la verticale $x = 1$. Il serait naturel de penser que l'aire de cette région est infinie puisque la région elle-même s'étend sans limite, mais regardons-y de plus près. L'aire de la partie de S située à gauche de $x = t$ (ombrée dans la figure 1) mesure

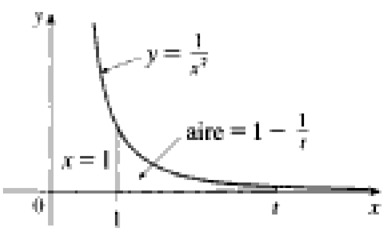


FIGURE 1

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Notez que la mesure de cette aire est strictement inférieure à 1, quel que soit t, même très grand.

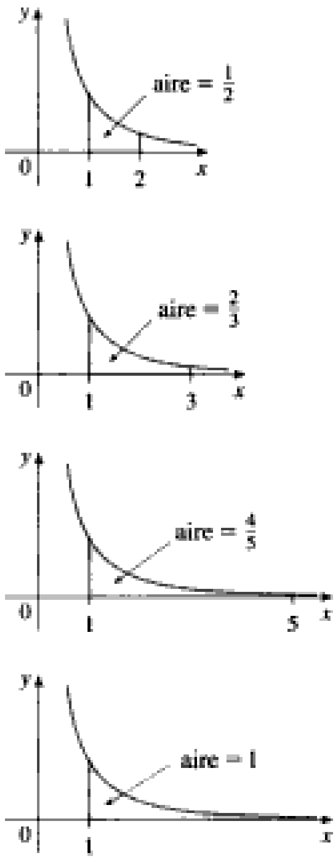


FIGURE 2

On observe aussi que

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

L'aire de la région ombrée tend vers 1 lorsque $t \to \infty$ (voyez la figure 2). Voilà pourquoi on dit que l'aire de la région infinie S mesure 1 et on écrit

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = 1.$$

En s'inspirant de cet exemple, on définit l'intégrale de f (non nécessairement positive) sur un intervalle infini comme la limite des intégrales sur des intervalles finis.

1 Définition d'une intégrale impropre de type 1

a) Si $\int_a^t f(x)\, dx$ existe pour tout nombre $t \geqslant a$, alors

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

b) Si $\int_t^b f(x)\, dx$ existe pour tout nombre $t \leqslant b$, alors

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\, dx$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

Les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ sont dites **convergentes** si la limite qui les définit existe et **divergentes** dans le cas contraire.

c) Si à la fois $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ sont convergentes, alors on définit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_a^{\infty} f(x)\, dx.$$

Dans cette définition, n'importe quel nombre réel a convient (voyez l'exercice 52).

Lorsque f est une fonction positive, chacune des intégrales de la définition 1 correspond à l'aire d'une région. Dans le premier cas par exemple, si $f(x) \geqslant 0$ et si $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente, on définit l'aire de la région $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ dans la figure 3 par

$$A(S) = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

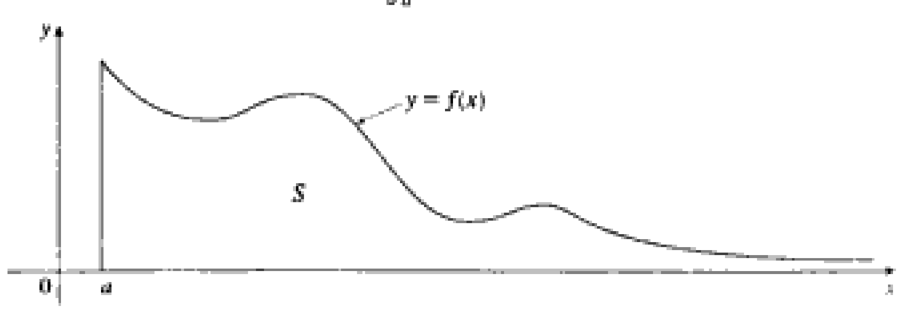


FIGURE 3

Cette définition est tout à fait acceptable vu que $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est la limite lorsque $t \to \infty$ de l'aire sous le graphique de f depuis a jusqu'à t.

EXEMPLE 1 ■ L'intégrale $\int_1^{+\infty}(1/x)\,dx$ est-elle convergente ou divergente?

SOLUTION Selon la première partie de la définition 1, on a

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty}\ln t = \infty.\end{aligned}$$

Comme la limite, en tant que nombre fini, n'existe pas, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}(1/x)\,dx$ est divergente.

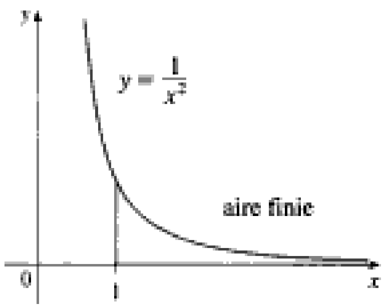


FIGURE 4

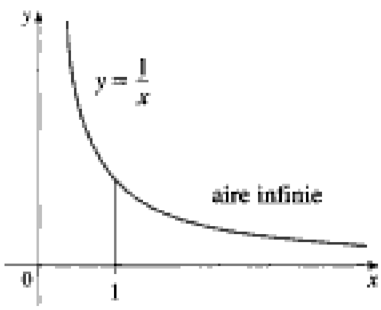


FIGURE 5

Mettons côte à côte le résultat de l'exemple 1 et l'exemple du début de cette section:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx \text{ diverge.}$$

Géométriquement, cela veut dire que, malgré que les courbes $y = 1/x^2$ et $y = 1/x$ se ressemblent beaucoup pour $x > 0$, la région sous $y = 1/x^2$ à droite de $x = 1$ (la région ombrée de la figure 4) a une aire finie tandis que la même région sous $y = 1/x$ (dans la figure 5) a une aire infinie. Il est vrai que, même si $1/x^2$ et $1/x$ s'approchent toutes les deux de 0 lorsque $x \to \infty$, $1/x^2$ s'en approche plus rapidement que $1/x$. Les valeurs de $1/x$ ne décroissent pas assez vite pour que l'intégrale ait une valeur finie.

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

SOLUTION Grâce à la deuxième partie de la définition 1, on a

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx.$$

On choisit d'intégrer par parties avec $u = x$ et $dv = e^x\,dx$. D'où $du = dx$ et $v = e^x$:

$$\begin{aligned}\int_t^0 xe^x\,dx &= xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx \\ &= -te^t - 1 + e^t.\end{aligned}$$

Sachant que $e^t \to 0$ lorsque $t \to -\infty$ et par application de la Règle de l'Hospital, on arrive à

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty} te^t &= \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}} \\ &= \lim_{t\to-\infty}(-e^t) = 0.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx &= \lim_{t\to-\infty}(-te^t - 1 + e^t) \\ &= -0 - 1 + 0 = -1.\end{aligned}$$

EXEMPLE 3 ■ Calculez $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUTION Il est intéressant de choisir $a = 0$ dans la troisième partie de la définition 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Il reste maintenant à calculer séparément chacune des intégrales du membre de droite :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{Arctg} x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\operatorname{Arctg} t - \operatorname{Arctg} 0) = \lim_{t\to\infty} \operatorname{Arctg} t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{Arctg} x\Big]_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (\operatorname{Arctg} 0 - \operatorname{Arctg} t)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

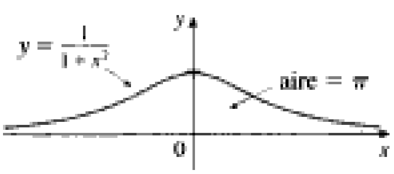


FIGURE 6

Comme chacune de ces intégrales est convergente, l'intégrale proposée l'est aussi et vaut

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Vu que $1/(1+x^2) > 0$, l'intégrale impropre proposée représente l'aire de la région comprise entre l'axe Ox et la courbe $y = 1/(1+x^2)$ (voyez la figure 6).

EXEMPLE 4 ■ Pour quelles valeurs de p l'intégrale

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

est-elle convergente ?

SOLUTION L'exemple 1 a montré que, dans le cas $p = 1$, cette intégrale est divergente. On suppose donc $p \neq 1$. On peut écrire

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right].$$

Au cas où $p > 1$, $p - 1 > 0$ et de là, lorsque $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ ou encore $1/t^{p-1} \to 0$. Par conséquent,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1,$$

ce qui montre que l'intégrale est convergente. Par contre, au cas où $p < 1$, $p - 1 < 0$ et donc

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{lorsque } t \to \infty$$

ce qui signifie que l'intégrale diverge.

Nous reformulons le résultat de l'exemple 4 afin d'y faire référence ultérieurement :

2 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ est convergente si $p > 1$ et divergente si $p \leqslant 1$.

Type 2 : Intégrale d'une fonction discontinue

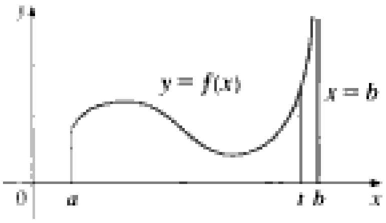


FIGURE 7

On suppose que f est une fonction continue définie sur un intervalle fini $[a, b[$ et qui présente une asymptote verticale en b. On désigne par S la région non bornée qui s'étend entre le graphique de f et l'axe Ox depuis a jusqu'à b. (Pour les intégrales de type 1, la région s'étendait indéfiniment dans une direction horizontale. Ici, c'est dans la direction verticale que les régions s'étendent indéfiniment). L'aire de la partie de S qui va de a jusqu'à t (la région ombrée de la figure 7) mesure

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

Au cas où $A(t)$ s'approche d'un nombre fini lorsque $t \to b^-$, on dit que la région S a une aire A et on écrit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Cette équation sert à définir une intégrale impropre de type 2, même lorsque f n'est pas une fonction positive et indépendemment du type de discontinuité que f présente en b.

3 **Définition d'une intégrale impropre de type 2**

a) Si f est continue sur $[a, b[$ et discontinue en b, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

b) Si f est continue sur $]a, b]$ et discontinue en a, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

à condition que cette limite existe (soit un nombre fini).

L'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ est dite **convergente** si la limite qui la définit existe et **divergente** dans le cas contraire.

c) Si f a une discontinuité en c, où $a < c < b$, et si à la fois $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ sont convergentes, alors on définit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Les figures 8 et 9 illustrent les deuxième et troisième parties de la définition 3 dans le cas où $f(x) \geqslant 0$ et où f présente une discontinuité infinie en a et en c respectivement.

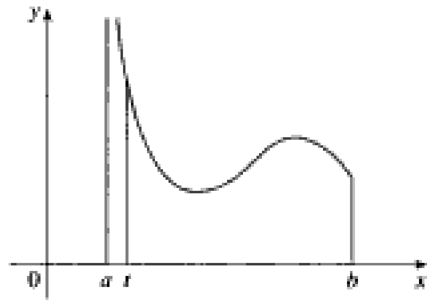


FIGURE 8

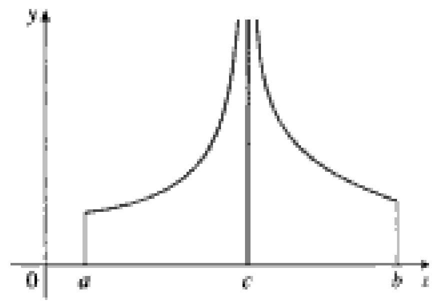


FIGURE 9

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUTION Il faut noter avant tout que cette intégrale est impropre car la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ a une asymptote verticale en $x = 2$. Comme cette discontinuité infinie se produit en l'extrémité gauche de $[2, 5]$, on emploie la deuxième partie de la définition 3 :

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t \to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t \to 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\,) \\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

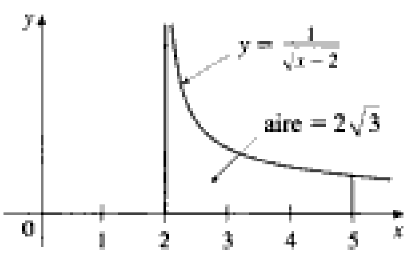


FIGURE 10

L'intégrale impropre proposée est donc convergente et, puisque la fonction sous le signe d'intégration est positive, elle représente l'aire de la région ombrée dans la figure 10.

EXEMPLE 6 ■ Dites si $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ est convergente ou divergente ?

SOLUTION On note que cette intégrale est impropre parce que $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Grâce à la première partie de la définition 3 et à la formule 14 de la table d'intégrales, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx &= \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx \\ &= \lim_{t \to (\pi/2)^-} \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\,\Big]_0^t \\ &= \lim_{t \to (\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) - \ln 1] \\ &= \infty,\end{aligned}$$

parce que $\sec t \to \infty$ et $\operatorname{tg} t \to \infty$ lorsque $t \to (\pi/2)^-$. L'intégrale proposée est donc divergente. ■

EXEMPLE 7 ■ Calculez si possible $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$.

SOLUTION Observez que $x = 1$ est une asymptote verticale de la fonction sous le signe d'intégration. Puisque cette asymptote se situe à l'intérieur de l'intervalle $[0, 3]$, on doit faire appel à la troisième partie de la définition 3 avec $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

où

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left(\ln|t-1| - \ln|-1|\right)$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

parce que $1 - t \to 0^+$ lorsque $t \to 1^-$. Il en résulte que $\int_0^1 dx/(x-1)$ est divergente et de là que $\int_0^3 dx/(x-1)$ l'est aussi (il n'est même pas nécessaire de calculer $\int_1^3 dx/(x-1)$).

Attention : À défaut d'avoir remarqué que la droite $x = 1$ est une asymptote verticale dans l'exemple 7, on prend l'intégrale proposée pour une intégrale ordinaire et on conduit alors erronément les calculs comme suit

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ce résultat est faux parce que l'intégrale est impropre et doit donc impérativement être calculée avec des limites.

Dorénavant, chaque fois que vous rencontrez le symbole $\int_a^b f(x)\,dx$, vous devez décider, en examinant la fonction f sur $[a, b]$, s'il s'agit d'une intégrale définie ordinaire ou d'une intégrale impropre.

EXEMPLE 8 ■ Calculez $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

SOLUTION On sait que la fonction $f(x) = \ln x$ a une asymptote verticale en 0 car $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. L'intégrale proposée est donc impropre et on a

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\,dx.$$

On procède par parties avec $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$ et $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\,dx = x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$

$$= 1\ln 1 - t\ln t - (1-t)$$

$$= -t\ln t - 1 + t.$$

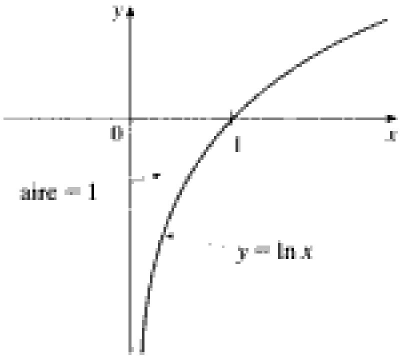


FIGURE 11

Pour calculer la limite du premier terme, on fait appel à la Règle de l'Hospital :

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0.$$

De là,

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t)$$
$$= -0 - 1 + 0 = -1.$$

La figure 11 montre l'interprétation géométrique de ce résultat. L'aire de la région ombrée au-dessus de la courbe $y = \ln x$ et sous l'axe Ox vaut 1.

■ Un test de comparaison pour les intégrales impropres

Il est parfois impossible de trouver la valeur exacte d'une intégrale impropre et cependant, il reste important de savoir si elle est convergente ou non. Le théorème que voici s'avère utile dans ce cas. Bien qu'il soit énoncé pour les intégrales impropres de type 1, il en existe un semblable pour celles de type 2.

Théorème de comparaison On suppose que f et g sont des fonctions continues telles que $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant a$.

a) Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente, alors $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ est convergente.

b) Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ est divergente, alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

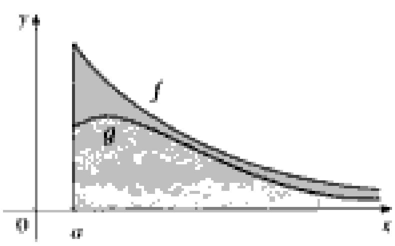


FIGURE 12

Nous omettons la démonstration du Théorème de comparaison, mais la figure 12 montre que cette propriété est acceptable : si la région délimitée par la courbe supérieure $y = f(x)$ a une aire finie, il en est a fortiori de même pour la région délimitée par la courbe inférieure $y = g(x)$; et si la région sous la courbe $y = g(x)$ a une aire infinie, il en est a fortiori de même pour la région sous la courbe $y = f(x)$.

EXEMPLE 9 ■ Démontrez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

SOLUTION Il n'est pas possible de calculer cette intégrale directement car la fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive élémentaire au sens donné dans la section 5.7. On écrit d'abord

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$$

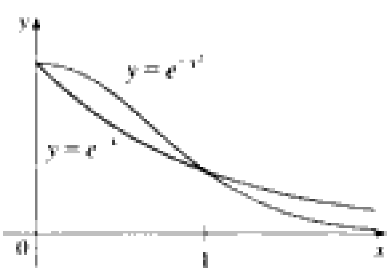


FIGURE 13

et on observe que la première des deux intégrales du membre de droite n'est qu'une intégrale définie ordinaire. Pour la deuxième, on exploite le fait que, pour $x \geqslant 1$, $x^2 \geqslant x$ et de là $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ (voyez la figure 13). Il n'est pas difficile de calculer l'intégrale de la fonction e^{-x} :

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.$$

Par conséquent, en choisissant $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x^2}$ dans le Théorème de comparaison, on peut conclure que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente. Par suite, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

TABLE 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0,7468241328
2	0,8820813908
3	0,8862073483
4	0,8862269118
5	0,8862269255
6	0,8862269255

Bien qu'on n'en connaisse pas la valeur, on sait par l'exemple 9 que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente. L'exercice 56 suggère une façon d'en trouver la valeur approchée 0,8862. Il est nécessaire en probabilités d'en connaître une valeur plus exacte : en passant par le calcul intégral à plusieurs variables, il y a moyen d'établir que cette intégrale vaut exactement $\sqrt{\pi}/2$.

La table ci-contre illustre la définition d'une intégrale impropre en reportant les valeurs (calculées par ordinateur) de $\int_0^t e^{-x^2}dx$ pour t de plus en plus grand. Ces dernières s'approchent de $\sqrt{\pi}/2$, assez vite d'ailleurs, parce que $e^{-x^2} \to 0$ très rapidement lorsque $x \to \infty$.

EXEMPLE 10 ■ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ est divergente en raison du Théorème de comparaison parce que

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

et que $\int_1^{\infty}(1/x)dx$ est divergente (voyez l'exemple 1 ou la formule (2) avec $p = 1$). □

La table 2 illustre la divergence de l'intégrale de l'exemple 10. On y constate que les valeurs de $\int_1^t[(1 + e^{-x})/x]dx$ ne se rapprochent pas d'un certain nombre.

TABLE 2

t	$\int_1^t[(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0,8636306042
5	1,8276735512
10	2,5219648704
100	4,8245541204
1000	7,1271392134
10000	9,4297243064

5.9 Exercices

1. Expliquez la raison pour laquelle les intégrales suivantes sont impropres.

   a) $\int_1^{\infty} x^4 e^{-x^4}\,dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

   c) $\int_0^{2} \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ d) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2 + 5}\,dx$

2. Lesquelles des intégrales suivantes sont impropres ? Pourquoi ?

   a) $\int_1^{2} \frac{1}{2x - 1}\,dx$ b) $\int_0^{1} \frac{1}{2x - 1}\,dx$

   c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1 + x^2}\,dx$ d) $\int_1^{2} \ln(x - 1)\,dx$

3. Déterminez une expression de l'aire sous la courbe $y = 1/x^3$ depuis $x = 1$ jusqu'à $x = t$ et calculez-la pour $t = 10$, 100 et 1000. Déterminez ensuite l'aire totale sous cette courbe à droite de $x = 1$.

4. a) Faites afficher le graphique des fonctions $f(x) = 1/x^{1,1}$ et $g(x) = 1/x^{0,9}$ dans les fenêtres $[0, 10]$ sur $[0, 1]$ et $[0, 100]$ sur $[0, 1]$.

   b) Déterminez les expressions des aires sous les graphiques de f et g depuis $x = 1$ jusqu'à $x = t$ et calculez-les pour $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10} et 10^{20}.

   c) Donnez la mesure de l'aire totale sous chacun de ces graphiques à droite de $x = 1$, si elle existe.

5-32 ■ Étudiez la convergence de chaque intégrale. Calculez celles qui sont convergentes.

5. $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$

6. $\int_2^{\infty} \frac{1}{(x + 3)^{3/2}}\,dx$

7. $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{(2x - 3)^2}\,dx$

8. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x + 3}}\,dx$

9. $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$

10. $\int_{-\infty}^{\infty} (2x^2 - x + 3)\,dx$

11. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

12. $\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$

13. $\int_0^\infty \cos x\,dx$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx$

15. $\int_0^\infty \frac{5}{2x+3}\,dx$

16. $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{x^2+9}\,dx$

17. $\int_{-\infty}^{1} xe^{2x}\,dx$

18. $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

19. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

20. $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

21. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

22. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

23. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

24. $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$

25. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx$

26. $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-9}}\,dx$

27. $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\,dx$

28. $\int_0^2 \frac{1}{4x-5}\,dx$

29. $\int_4^5 \frac{1}{(5-x)^{2/5}}\,dx$

30. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec^2 x\,dx$

31. $\int_0^1 x\ln x\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

33-38 ■ Représentez chaque région et calculez son aire (si celle-ci a une mesure finie).

33. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$

34. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant -2,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x/2}\}$

35. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant (\ln x)/x^2\}$

. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+1}\}$

. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{tg} x \sec x\}$

. $S = \{(x, y) \mid 3 < x \leqslant 7,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x-3}\}$

39. a) Soit $g(x) = (\sin^2 x)/x^2$. Établissez à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur une table des valeurs approchées de $\int_1^t g(x)dx$ pour $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ et 10000. Pensez-vous que l'intégrale $\int_1^\infty g(x)dx$ soit convergente ?
   b) Démontrez par le Théorème de comparaison avec $f(x) = 1/x^2$ que $\int_1^\infty g(x)dx$ est convergente.
   c) Illustrez la démonstration de la partie b) en affichant f et g dans une même fenêtre pour $1 \leqslant x \leqslant 10$. Au vu de la figure, expliquez intuitivement pourquoi $\int_1^\infty g(x)dx$ est convergente.

40. a) Soit $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$. Établissez à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur une table des valeurs approchées de $\int_2^t g(x)dx$ pour $t = 5, 10, 100, 1000$ et 10000. Pensez-vous que l'intégrale $\int_2^\infty g(x)dx$ soit convergente ?
   b) Démontrez par le Théorème de comparaison avec $f(x) = 1/\sqrt{x}$ que $\int_2^\infty g(x)dx$ est divergente.
   c) Illustrez la démonstration de la partie b) en affichant f et g dans une même fenêtre pour $2 \leqslant x \leqslant 20$. Au vu de la figure, expliquez intuitivement pourquoi $\int_2^\infty g(x)dx$ est divergente.

41-46 ■ Déterminez à l'aide du Théorème de comparaison si les intégrales suivantes sont convergentes ou divergentes.

41. $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{1+x^2}\,dx$

42. $\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

43. $\int_1^\infty \frac{dx}{x+e^{2x}}$

44. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

45. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x\sin x}$

46. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$

47. L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

est impropre pour deux raisons : l'intervalle $[0, \infty[$ est non borné et la fonction sous le signe d'intégration présente une discontinuité infinie en 0. Calculez-la en la décomposant en une somme de deux intégrales impropres, l'une de type 1 et l'autre de type 2 :

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

48. Calculez

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

en procédant de la même manière qu'à l'exercice 47.

49. Déterminez les valeurs de p pour lesquelles l'intégrale $\int_0^1 (1/x^p)dx$ converge et donnez-en la valeur dans ces cas-là.

50. a) Calculez $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3.
   b) Conjecturez la valeur de $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ pour n entier positif quelconque.
   c) Démontrez par récurrence que votre formule est correcte.

51. a) Démontrez que $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ est divergente.
   b) Démontrez que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x\,dx = 0$$

Ceci montre qu'on ne peut pas définir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

52. Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est convergente, montrez que, quels que soient les nombres a et b,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx$$

53. Un fabricant d'ampoules électriques veut produire des ampoules qui durent environ 700 heures, mais certaines ampoules sautent plus rapidement que d'autres. On désigne par $F(t)$ la fraction d'ampoules qui s'usent avant t heures. De ce fait, $F(t)$ est toujours compris entre 0 et 1.

a) Esquissez grossièrement l'allure que le graphique de F doit avoir à votre avis.

b) Quelle est la signification de la dérivée $r(t) = F'(t)$?

c) Quelle est la valeur de $\int_0^{\infty} r(t)dt$? Pourquoi ?

54. La *vitesse moyenne* des molécules dans un gaz parfait est donnée par

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2}\int_0^{\infty} v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

où M est le poids moléculaire du gaz, R est la constante du gaz, T la température du gaz et v la vitesse moléculaire. Montrez que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

55. Nous le verrons dans la section 7.5, une substance radioactive se désintègre selon une loi exponentielle : la masse au temps t est donnée par $m(t) = m(0)e^{kt}$, où $m(0)$ est la masse initiale et k une constante négative. La *durée de vie moyenne* M d'un atome de la substance est égale à

$$M = -k\int_0^{\infty} te^{kt}\,dt$$

Le carbone 14, ^{14}C, substance radioactive que l'on emploie pour dater, a une constante de désintégration k de $-0{,}000121$. Calculez la durée de vie moyenne d'un atome de ^{14}C.

56. Afin de calculer approximativement la valeur de l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$, écrivez-la d'abord comme la somme de $\int_0^4 e^{-x^2}dx$ et de $\int_4^{\infty} e^{-x^2}dx$. Calculez la première intégrale par la Méthode de Simpson avec $n = 8$ et démontrez que la seconde est inférieure à $\int_4^{\infty} e^{-4x}dx$, elle-même inférieure à 0,0000001.

57. Montrez que $\int_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$.

58. En comparant les aires que ces intégrales représentent, montrez que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\,dy$.

59. Quelle valeur de a est suffisamment grande pour que

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx < 0{,}001$$

60. Déterminez la valeur de la constante C pour laquelle l'intégrale

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)dx$$

est convergente. Que vaut l'intégrale pour cette valeur de C ?

Chapitre 5 Révision

• CONTRÔLE DES CONCEPTS •

1. a) Écrivez l'expression d'une somme de Riemann d'une fonction f. Expliquez la signification de la notation que vous employez.
   b) Quelle est l'interprétation géométrique d'une somme de Riemann lorsque $f(x) \geqslant 0$?
   c) Quelle est l'interprétation géométrique d'une somme de Riemann lorsque $f(x)$ prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives ? Faites un dessin pour illustrer.

2. a) Écrivez la définition de l'intégrale définie d'une fonction continue depuis a jusqu'à b.
   b) Quelle est l'interprétation géométrique de $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque $f(x) \geqslant 0$?
   c) Quelle est l'interprétation géométrique de $\int_a^b f(x)\,dx$ lorsque $f(x)$ prend des valeurs tantôt positives, tantôt négatives ? Faites un dessin pour illustrer.

3. a) Énoncez le Théorème de calcul de l'intégrale définie.
   b) Énoncez le Théorème de variation totale.

4. Que représente $\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt$, si $r(t)$ est le débit avec lequel de l'eau est versée dans un réservoir ?

5. Un mobile se déplace en avant et en arrière sur une trajectoire rectiligne avec une vitese $v(t)$, mesurée en m/s, et une accélération désignée par $a(t)$.
   a) Que représente $\int_{60}^{120} v(t)dt$?
   b) Que représente $\int_{60}^{120} |v(t)|dt$?
   c) Que représente $\int_{60}^{120} a(t)dt$?

6. a) Expliquez ce que signifie l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$.
   b) Quelle relation lie l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ et l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$?

7. Citez les deux parties du Théorème fondamental du calcul intégral.

8. a) Énoncez la méthode d'intégration par substitution. Comment s'emploie-t-elle ?
   b) Énoncez la règle d'intégration par parties. Comment la met-on en œuvre ?

9. Écrivez les règles suivantes de calcul approché de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$
   a) la Méthode du point médian
   b) la Méthode des trapèzes
   c) la Méthode de Simpson

10. Donnez la définiton des intégrales impropres suivantes
    a) $\int_a^\infty f(x)\,dx$ b) $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$

11. Comment est définie l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$ dans chacun des cas suivants :
    a) f a une discontinuité infinie en a ?
    b) f a une discontinuité infinie en b ?
    c) f a une discontinuité en c, où $a < c < b$?

12. Énoncez le Théorème de comparaison relatif aux intégrales impropres.

▲ VRAI-FAUX ▲

Dites si la proposition est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquez pourquoi. Si elle est fausse, expliquez pourquoi et donnez un exemple qui contredit la proposition.

1. Si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f et g sont continues sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(x) \geqslant 0$, alors

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\;dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

4. Si f' est continue sur $[1, 3]$, alors

$$\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$$

5. Si f et g sont continues et $f(x) \geqslant g(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

6. Si f et g sont dérivables et $f(x) \geqslant g(x)$ pour $a < x < b$, alors $f'(x) \geqslant g'(x)$ pour $a < x < b$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\sin x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

8. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2 - 1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln 15$

9. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\,dx$ est convergente.

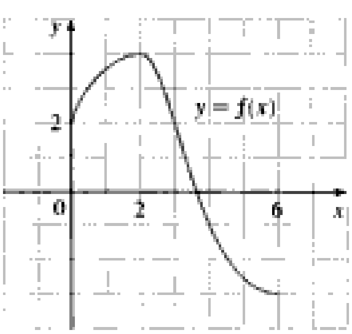
10. $\displaystyle\int_0^2 (x - x^3)dx$ représente l'aire sous la courbe $y = x - x^3$ depuis 0 jusqu'à 2.

11. Toutes les fonctions continues ont des dérivées.

12. Toutes les fonctions continues ont des primitives.

◆ EXERCICES ◆

1. Écrivez la somme de Riemann basée sur 6 sous-intervalles pour la fonction f dont le graphique est dessiné ci-dessous. Choisissez a) les extrémités gauches b) les points médians. Dans chaque cas, faites un dessin et expliquez ce que la somme de Riemann représente.



2. a) Calculez la somme de Riemann pour la fonction

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

   pour un découpage en quatre sous-intervalles et en choisissant les extrémités droites. Expliquez sur un dessin ce que la somme de Riemann représente.

   b) Calculez l'intégrale

$$\int_0^2 (x^2 - x)dx$$

   à partir de la définition de l'intégrale définie (en prenant les x_i^* égaux aux extrémités droites).

   c) Vérifiez votre réponse en calculant cette intégrale par le Théorème de calcul de l'intégrale définie.

   d) Faites un croquis qui explique l'interprétation géométrique de cette intégrale.

3. Calculez
$$\int_0^1 (x + \sqrt{1 - x^2})dx$$
et donnez-en l'interprétation en termes d'aires.

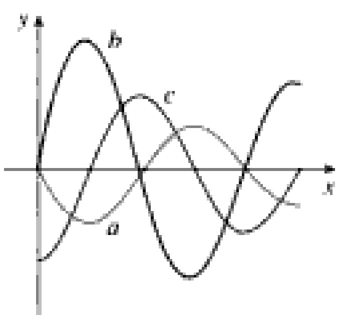
4. Écrivez
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \, \Delta x$$
sous forme d'une intégrale définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ et calculez-la.

5. Si $\int_0^6 f(x)dx = 10$ et $\int_0^4 f(x)dx = 7$, que vaut $\int_4^6 f(x)dx$?

6. a) Écrivez $\int_0^2 e^{3x}\,dx$ comme une limite de sommes de Riemann, en prenant les x_i^* aux extrémités droites. Calculez la somme à l'aide d'un logiciel de calcul algébrique et calculez la limite.

b) Vérifiez votre réponse en calculant cette intégrale par le Théorème de calcul de l'intégrale définie.

7. La figure montre les courbes représentatives de f, f' et $\int_0^x f(t)dt$. Associez la bonne étiquette à chaque courbe et justifiez votre choix.



8. Calculez

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}(e^{\text{Arctg}\,x})\,dx$ b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\text{Arctg}\,x}\,dx$

c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\text{Arctg}\,t}\,dt$

9-26 ■ Calculez l'intégrale.

9. $\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$ **10.** $\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\,dx$

13. $\int_1^8 \sqrt[3]{x}(x - 1)\,dx$ **14.** $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^{11} \frac{dx}{\sqrt{2x + 3}}$ **16.** $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$

17. $\int_0^1 e^{\pi t}\,dt$ **18.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2 - 3x}\,dx$

19. $\int x \sec x \operatorname{tg} x\,dx$ **20.** $\int \sin x \cos(\cos x)\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$ **22.** $\int x^2 e^{-3x}\,dx$

23. $\int e^x \cos x\,dx$ **24.** $\int \text{Arctg}\,x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

27-28 ■ Effectuez l'intégration. Illustrez et vérifiez si votre résultat est vraisemblable en faisant afficher la fonction et sa primitive (prenez $C = 0$).

27. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

29. Esquissez un graphique qui représente l'aire sous la courbe $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Calculez ensuite la valeur exacte de l'aire.

30. Faites dessiner le graphique de la fonction $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$ et sur la base de ce graphique, conjecturez la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(x)dx$. Calculez cette intégrale pour confirmer votre conjecture.

31-34 ■ Calculez la dérivée de la fonction.

31. $F(x) = \int_1^x \sqrt{1 + t^4}\,dt$ **32.** $g(x) = \int_1^{\cos x} \sqrt[3]{1 - t^2}\,dt$

33. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^3} \frac{t}{\sqrt{1 + t^3}}\,dt$ **34.** $y = \int_{2x}^{3x+1} \sin(t^4)\,dt$

35-38 ■ À l'aide de la table de primitives de la fin du livre, effectuez l'intégration.

35. $\int e^x \sqrt{1 - e^{2x}}\,dx$ **36.** $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$

37. $\int \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1 + 2\sin x}}\,dx$

39-40 ■ Calculez une valeur approchée de l'intégrale proposée a) par la Méthode des trapèzes, b) par la Méthode du point médian et c) par la Méthode de Simpson avec $n = 10$. Arrondissez vos réponses à la sixième décimale. Pouvez-vous dire si vos réponses sont des surestimations ou des sous-estimations.

39. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$ **40.** $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,dx$

41. Estimez les erreurs des valeurs approchées de l'exercice 39, partie a) et b).

42. Mesurez approximativement l'aire sous la courbe $y = e^x/x$ depuis $x = 1$ jusqu'à $x = 4$ en recourant à la Méthode de Simpson avec $n = 6$.

43. a) Déterminez graphiquement une borne supérieure de $|f^{(4)}(x)|$ si $f(x) = \sin(\sin x)$.

b) Calculez une valeur approchée de $\int_0^{\pi} f(x)dx$ par la Méthode de Simpson avec $n = 10$ et jugez de l'erreur grâce à la borne supérieure de la partie a).

c) Quelle est une valeur de n suffisamment grande pour s'assurer que l'erreur ne dépasse pas 0,00001 ?

44. a) Comment calculeriez-vous $\int x^5 e^{-2x} dx$ à la main ? (N'effectuez pas ce calcul).

b) Comment calculeriez-vous $\int x^5 e^{-2x} dx$ à l'aide de tables ? (N'effectuez pas ce calcul).

c) Calculez $\int x^5 e^{-2x} dx$ avec un logiciel de calcul symbolique.

d) Faites afficher les graphiques de l'intégrande et de la primitive sur le même écran. La réponse que vous avez obtenue en c) vous paraît-elle acceptable ?

49-50 ■ Calculez l'intégrale impropre ou démontrez qu'elle est divergente.

45. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)^4}\, dx$

46. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

47. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-2x}\, dx$

48. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2x+1}\, dx$

49. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

50. $\displaystyle\int_2^{6} \frac{y}{\sqrt{y-2}}\, dy$

51. Faites appel au Théorème de comparaison pour savoir si l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^5+2}\, dx$$

est convergente ou non.

52. Pour quelles valeurs de a l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{ax} \cos x\, dx$ est-elle convergente ? Calculez-la pour ces valeurs de a.

53. Un mobile se déplace en ligne droite et sa vitesse en fonction du temps est donnée par $v(t) = t^2 - t$. Déterminez a) le déplacement et b) la distance parcourue par ce mobile pendant l'intervalle de temps $[0, 5]$.

54. L'enregistrement au pistolet radar de la vitesse d'un coureur a produit la table ci-après. Estimez par la Règle de Simpson la distance couverte durant ces 5 secondes.

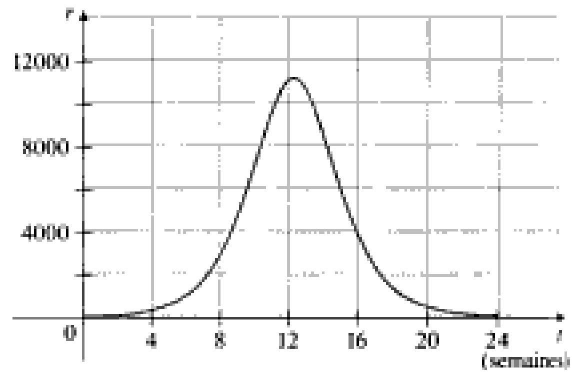
t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
v (m/s)	0	4,67	7,34	8,86	9,73	10,22

t (s)	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
v (m/s)	10,51	10,67	10,76	10,81	10,81

55. Voici un relevé du taux d'accroissement des dépenses en soins médicaux aux États-Unis (en pourcentage). Évaluez (en pourcentage) l'accroissement total des dépenses en soins médicaux entre 1988 et 1994.

t	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
r	6,5	7,7	9,0	8,7	7,4	5,9	4,8

56. Une population d'abeilles s'est accrue à la vitesse de $r(t)$ abeilles par semaine, cette vitesse r étant donnée par son graphique. Évaluez l'accroissement de la population d'abeilles durant les 24 semaines à l'aide de la Méthode de Simpson pour un découpage en 6 sous-intervalles.



57. On suppose que la température d'une longue et fine tige, placée le long de l'axe des abscisses, est au temps initial donnée par $C/(2a)$ si $|x| \leqslant a$ et 0 si $|x| > a$. On démontre que la température en un point x au moment t est donnée par

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi k t}} \int_0^{a} e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du,$$

où k est un coefficient de conductivité thermique de la tige. Pour déterminer la distribution de température qui résulte d'une source initiale de chaleur concentrée à l'origine, on a besoin de calculer

$$\lim_{a \to 0} T(x, t).$$

Calculez cette limite par la Règle de l'Hospital.

58. On a rencontré la fonction de Fresnel $S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\, dt$ dans la section 5.4. Fresnel a aussi employé la fonction $C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt$ dans la théorie de la diffraction des ondes lumineuses.

a) Quels sont les intervalles de croissance de C ?

b) Déterminez les intervalles sur lesquels C est convexe ?

c) Résolvez graphiquement avec une décimale correcte l'équation

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt = 0,7.$$

d) Affichez les graphiques de C et S sur un même écran. Quelle relation lie ces deux graphiques ?

59. Déterminez une expression explicite de $f(x)$ si f est une fonction continue qui, pour tout x, satisfait à

$$\int_0^x f(t)\, dt = x e^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt.$$

60. Déterminez une fonction f et une valeur de la constante a telle que

$$2\int_a^x f(t)\, dt = 2\sin x - 1.$$

61. Montrez que, si f' est continue sur $[a, b]$,

$$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

62. Démontrez que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$$

quel que soit n entier positif.

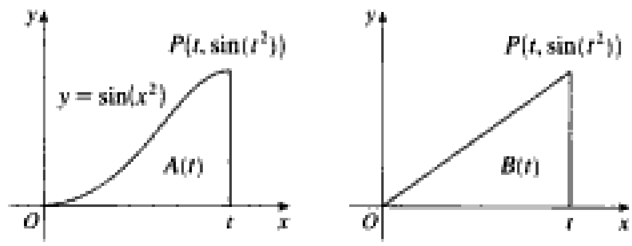
63. Démontrez que

$$\int_0^\infty f'(x)\,dx = -f(0),$$

si f' est une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

64. La figure montre deux régions du premier quadrant : $A(t)$ désigne l'aire sous la courbe $\sin(x^2)$ depuis 0 jusqu'à t, et $B(t)$, l'aire du triangle de sommets O, P et $(t, 0)$. Calculez

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{A(t)}{B(t)}.$$



Pleins feux sur la résolution de problèmes

Cachez la solution et essayez d'abord de résoudre vous-même le problème.

EXEMPLE 1 ■ Calculez $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{x-3}\displaystyle\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right)$.

SOLUTION Commençons par jeter un coup d'oeil aux divers composants de la fonction. Que se passe-t-il pour le facteur $x/(x-3)$ lorsque x s'approche de 3 ? Comme le numérateur s'approche de 3 et le dénominateur de 0,

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \text{ lorsque } x \to 3^+$$

et

$$\frac{x}{x-3} \to -\infty \text{ lorsque } x \to 3^-.$$

Le deuxième facteur s'approche de $\int_3^3 (\sin t)/t\,dt$, qui vaut 0. Qu'advient-il alors de toute la fonction ? (Ce n'est pas clair puisque l'un des facteurs devient grand tandis que l'autre devient petit.) Comment procéder ?

Les principes de la résolution de problèmes sont énoncés à la page 87.

Un des principes de la résolution de problèmes suggère de *reconnaître quelque chose de familier*. Y a-t-il tout ou partie de la fonction qui nous rappelle quelque chose que nous avons rencontré précédemment ? Oui. L'intégrale

$$\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

qui porte la variable x comme borne supérieure d'intégration nous rappelle la première partie du Théorème fondamental du calcul intégral :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Voilà qui suggère que la dérivation pourrait être une voie de solution.

Ayant l'idée de la dérivation en tête, le dénominateur $(x-3)$ pourrait être celui d'une des formes de la définition de la dérivée au chapitre 2 :

$$F'(a) = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}.$$

Lorsque $a = 3$, cette définition devient

$$F'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}.$$

Quelle serait alors la fonction F dans notre cas ? Si nous définissons

$$F(x) = \int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

alors $F(3) = 0$. Et que faire du facteur x au numérateur ? Il est là seulement pour brouiller la piste. Mettons-le en évidence et poussons plus loin le calcul :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right) &= \left(\lim_{x\to 3} x\right)\cdot \lim_{x\to 3}\frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\sin t}{t}\,dt}{x-3} \\
&= 3\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3} \\
&= 3F'(3) \\
&= 3\,\frac{\sin 3}{3} \qquad \text{(TFC1)} \\
&= \sin 3.
\end{aligned}$$

EXEMPLE 2 ■

a) Démontrez que si f est une fonction continue, alors

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx.$$

b) Employez la partie a) pour démontrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

quel que soit n positif.

SOLUTION

a) À première vue, l'équation donnée semble quelque peu déroutante. Quel lien y a-t-il entre le membre de gauche et le membre de droite ? Les connexions s'établissent souvent grâce au principe de la résolution de problèmes : *Introduire quelque chose de nouveau*. Ici, l'élément nouveau est une nouvelle variable. Il est habituel d'introduire une nouvelle variable lors de la mise en œuvre de la méthode d'intrégration par substitution. Cette technique peut aussi être efficace dans le cas présent où nous avons une fonction générale $f(x)$ à intégrer.

C'est la forme du membre de droite qui suggère quelle est la bonne substitution, à savoir $u = a - x$. Alors, $du = -dx$. Quand $x = 0$, $u = a$ et quand $x = a$, $u = 0$. Aussi,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

Mais l'intégrale du membre de droite n'est qu'une autre façon d'écrire $\int_0^a f(x)dx$. Donc l'équation est démontrée.

b) On appelle I l'intégrale à calculer et on applique la formule de la partie a) :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(\pi/2 - x)}{\sin^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Il est évident maintenant qu'il faut employer les identités trigonométriques relatives aux angles complémentaires, à savoir $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ et

Le graphique de la figure 1 montre qu'il est plausible que toutes les intégrales de l'exemple 2 aient la même valeur. Le graphique de chaque intégrande porte la valeur de n à laquelle il correspond.

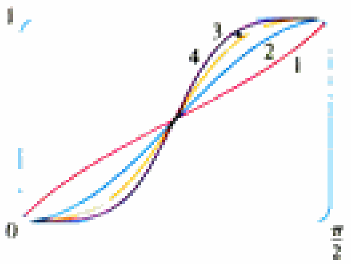


Figure 1

$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$. Il vient

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\, dx$$

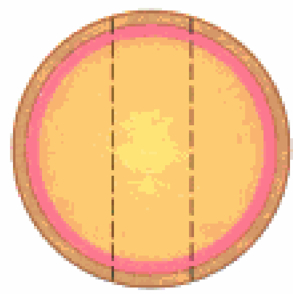
Les deux expressions de I sont fort semblables. Comme les deux intégrandes ont le même dénominateur, il est naturel de penser à les additionner, ce qui donne

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\, dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$$

D'où, $I = \pi/4$.

Problèmes

1. Trois étudiants en mathématiques ont commandé une pizza de 30 cm de diamètre. Au lieu de la couper de façon traditionnelle, ils décident d'en faire trois tranches, comme sur la figure. En mathématiciens chevronnés, ils sont capables de déterminer où il faut trancher pour que chacun ait la même part de pizza. Où ont-ils coupé ?



2. Dans ce problème, nous comptons approcher la fonction sinus sur l'intervalle $[0, \pi]$ par trois fonctions du second degré qui ont les mêmes racines que la fonction sinus sur cet intervalle.

a) Déterminez une fonction du second degré f telle que $f(0) = f(\pi) = 0$ et qui passe par le maximum de la fonction sinus sur $[0, \pi]$.

b) Déterminez une fonction du second degré g telle que $g(0) = g(\pi) = 0$ et qui ait le même taux de variation que la fonction sinus en 0 et en π.

c) Déterminez une fonction du second degré h telle que $h(0) = h(\pi) = 0$ et telle que l'aire sous h depuis 0 jusqu'à π soit la même que celle sous la fonction sinus.

d) Faites dessiner les graphiques des fonctions f, g, h et sinus dans la même fenêtre $[0, \pi]$ sur $[0, 1]$. Associez chaque courbe à sa fonction.

3. Calculez $f(4)$, sachant que f est une fonction continue et que $x \sin \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$.

4. a) Dessinez les graphiques de quelques-uns des membres de la famille des fonctions $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$, pour $c > 0$, et observez les régions que ces courbes forment avec l'axe Ox. Faites une conjecture qui lie ces régions entre elles.

b) Démontrez votre conjecture de la partie a).

c) Jetez un autre coup d'oeil sur les courbes de la partie a) : repérez le sommet (le point le plus haut) de chacune et tracez une courbe qui passe par ces sommets. Voyez-vous de quel genre de courbe il s'agit ?

d) Déterminez l'équation de la courbe que vous avez tracée à la partie c).

5. On suppose que la courbe $y = f(x)$ passe par l'origine et le point $(1, 1)$. Déterminez la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f'(x)dx$.

6. On emploie un disque circulaire de rayon r dans un évaporateur où il tourne dans un plan vertical. S'il est partiellement immergé dans le liquide de façon à maximiser l'aire de la partie mouillée exposée du disque, montrer que son centre doit être fixé à une distance $r/\sqrt{1+\pi^2}$ de la surface du liquide.

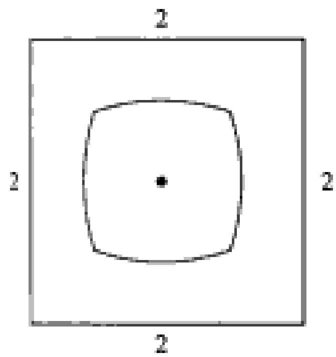


Figure relative au problème 10

7. Calculez $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1 - \operatorname{tg} 2t)^{1/t}dt$.

8. Calculez $f'(\pi/2)$ si $f(x) = \displaystyle\int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}dt$ et si $g(x) = \displaystyle\int_0^{\cos x} [1 + \sin(t^2)]dt$.

9. Déterminez une fonction f telle que $f(1) = -1$, $f(4) = 7$ et $f'(x) > 3$ pour tout x ou démontrez qu'une telle fonction ne peut pas exister.

10. La figure montre une région constituée de tous les points situés à l'intérieur d'un carré qui sont plus proches du centre que des bords du carré. Déterminez l'aire de cette région.

11. Déterminez l'intervalle $[a, b]$ sur lequel la valeur de l'intégrale $\int_a^b (2 + x - x^2)dx$ est maximale.

12. On suppose que f est continue, que $f(0) = 0$, que $f(1) = 1$, que $f'(x) > 0$ et que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Calculez la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f^{-1}(y)dy$.

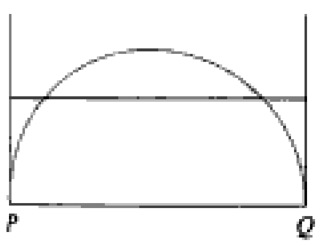


Figure relative au problème 16

13. Calculez $\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x \left(\int_1^{\sin t} \sqrt{1+u^4}\,du\right)dt$.

14. Servez-vous d'une intégrale pour estimer la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i}$.

15. Calculez $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[3]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^3})dx$.

16. Vous voyez sur la figure un demi-cercle de rayon 1, de diamètre horizontal PQ ainsi que les tangentes en P et Q. À quelle hauteur au-dessus du diamètre faut-il placer la droite horizontale pour rendre minimale l'aire de la région ombrée ?

17. Démontrez que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Suggestion : Commencez par démontrez que, si I_n désigne cette intégrale,

$$I_{k+1} = \frac{2k+2}{2k+3} I_k.$$

18. On définit $f_c(x)$ comme étant le plus petit des nombres $(x - c)^2$ et $(x - c - 2)^2$, ce quel que soit c. Ensuite, on définit

$$g(c) = \int_0^1 f_c(x)dx.$$

Déterminez les valeurs maximale et minimale de $g(c)$ si $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

6

Les applications des intégrales

Voici quelques applications des intégrales qui seront envisagées dans ce chapitre : calculer la force exercée par l'eau d'un barrage sur la digue, décider où est la meilleure place au théâtre, déterminer le point sur lequel appuyer un objet plat pour qu'il tienne en équilibre.

Dans ce chapitre, nous allons explorer quelques-unes des applications de l'intégrale définie en l'utilisant pour calculer des aires comprises entre des courbes, des volumes de solides, des longueurs d'arcs, la valeur moyenne d'une fonction, le travail effectué par une force qui varie, le centre de gravité d'une plaque, la pression exercée contre une digue ainsi que des grandeurs qui intéressent les biologistes, les économistes et les statisticiens. Toutes ces applications ont en commun la méthode générale brièvement rappelée ci-après, et qui est d'ailleurs celle qui a été mise en œuvre pour déterminer l'aire sous les courbes. On divise une quantité Q en un très grand nombre de petits morceaux. Ensuite, on évalue approximativement chaque petit morceau par une expression de la forme $f(x_i^*)\Delta x$ et on obtient ainsi de Q une valeur approchée qui se présente sous la forme d'une somme de Riemann. On en prend alors la limite, ce qui conduit à exprimer Q par une intégrale. Finalement, on procède à l'évaluation de l'intégrale par le Théorème de calcul de l'intégrale définie ou par la Méthode de Simpson.

6.1 Du nouveau sur les aires

Les aires définies et calculées au chapitre 5 étaient celles de régions situées sous des graphiques de fonctions. Ici, nous allons nous occuper de régions de forme plus générale. Celles-ci seront d'abord situées entre les courbes représentatives de deux fonctions. Ensuite, elles seront délimitées par des courbes décrites paramétriquement.

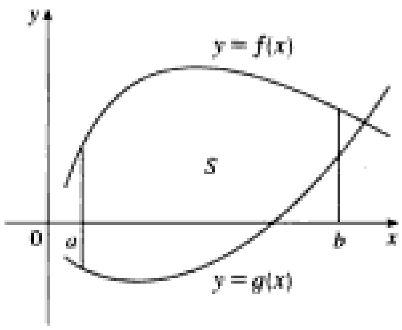


FIGURE 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

■ Des aires entre des courbes

On considère la surface S située entre les graphes de $y = f(x)$ et $y = g(x)$ et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. Il est supposé que f et g sont des fonctions continues et que $f(x) \geqslant g(x)$ quel que soit x dans $[a, b]$ (voyez la figure 1).

Tout comme dans la section 5.1, on découpe S en n bandes de même largeur et on approxime la $i^{\text{ème}}$ bande par un rectangle de base Δx et de hauteur $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ (voyez la figure 2). Si on veut, on peut prendre les points aux choix en les extrémités droites, c'est-à-dire $x_i^* = x_i$. La somme de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

est une approximation de ce qui, intuitivement, est perçu comme l'aire de la surface S.

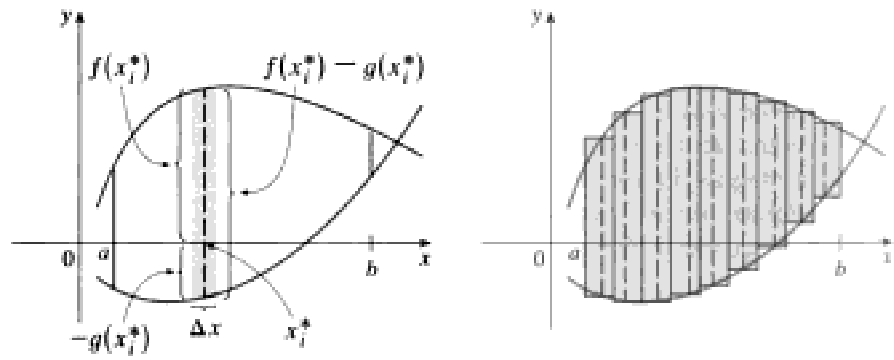


FIGURE 2 (a) Rectangle représentatif (b) Ensemble des rectangles d'approximation

Cette approximation semble s'améliorer à mesure que n devient grand. Par conséquent, on **définit** l'aire A de S comme la valeur limite de la somme des aires de ces rectangles d'approximation.

1
$$\boxed{A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x}$$

On reconnaît que cette limite n'est autre que l'intégrale définie de la fonction $f - g$. Dès lors,

> **2** L'aire A de la région délimitée par les courbes $y = f(x)$, $y = g(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$, où f et g sont des fonctions continues et $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout x dans $[a, b]$, est égale à
>
> $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$$

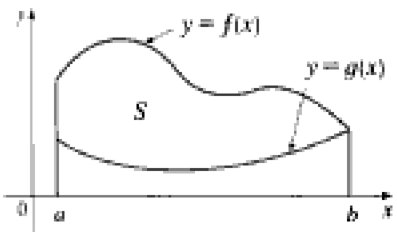


FIGURE 3
$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Remarquez que, dans le cas particulier où $g(x) = 0$, la région S est située tout simplement sous le graphe de f et la définition générale de l'aire (1) se ramène alors à la définition (4) de la section 5.1.

Au cas où les deux fonctions f et g sont positives (voyez la figure 3), il est facile de « lire » graphiquement la formule (2) :

$$\begin{aligned} A &= [\text{aire sous } y = f(x)] - [\text{aire sous } y = g(x)] \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \end{aligned}$$

EXEMPLE 1 ■ Déterminer l'aire de la surface bornée supérieurement par $y = e^x$, inférieurement par $y = x$ et terminée latéralement par les droites $x = 0$ et $x = 1$.

SOLUTION Vous voyez la surface dans la figure 4. La frontière supérieure est la courbe $y = e^x$ et la frontière inférieure, la courbe $y = x$. On applique donc la formule (2) avec $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1 \\ &= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1{,}5. \end{aligned}$$

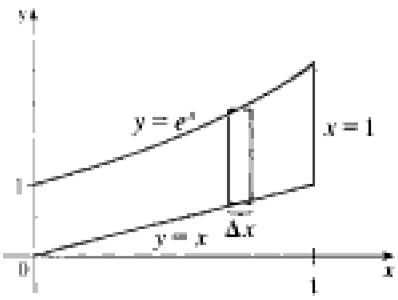


FIGURE 4

Pour rappeler la procédure qui a conduit à la définition (1) de l'aire, la figure 4 comporte un rectangle représentatif de largeur Δx. De façon générale, lors de l'établissement de l'intégrale qui correspond à une aire, il est utile de dessiner la région afin d'y repérer la courbe y_S qui la délimite supérieurement, la courbe y_I qui la délimite inférieurement ainsi qu'un rectangle d'approximation représentatif, comme dans la figure 5. L'aire d'un tel rectangle est alors donnée par $(y_S - y_I)\Delta x$ et l'équation

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (y_S - y_I)\Delta x = \int_a^b (y_S - y_I)\,dx$$

résume la procédure d'addition (avec passage à la limite) des aires de tous les rectangles représentatifs.

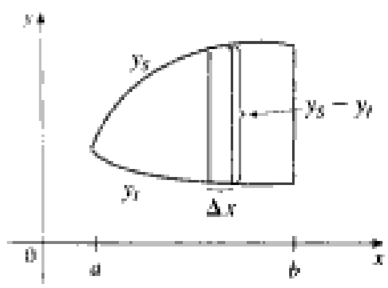


FIGURE 5

On peut remarquer que, dans la figure 5, la frontière gauche est réduite à un point et, dans la figure 3, c'est la frontière droite. Dans l'exemple suivant, les deux frontières latérales sont réduites à un point, ce qui entraîne qu'il faut avant tout déterminer a et b.

EXEMPLE 2 ■ Déterminer l'aire de la région entourée par les paraboles $y = x^2$ et $y = 2x - x^2$.

SOLUTION Les points d'intersection des deux paraboles s'obtiennent en résolvant le système formé par les deux équations. Cela donne $x^2 = 2x - x^2$, ou $2x^2 = 2x$. D'où $x(x - 1) = 0$ et $x = 0$ ou $x = 1$. Les deux paraboles se coupent en $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

La figure 6 montre que les frontières supérieure et inférieure sont

$$y_S = 2x - x^2 \qquad y_I = x^2.$$

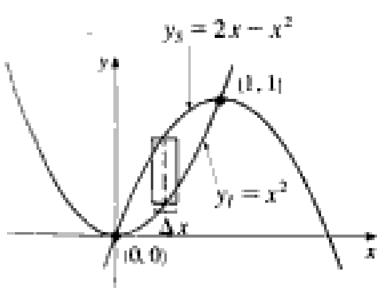


FIGURE 6

L'aire d'un rectangle représentatif est égale à

$$(y_S - y_I)\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\Delta x$$

et la région s'étend de $x = 0$ à $x = 1$. L'aire totale est donnée par

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Il est parfois difficile, voire impossible, de déterminer avec précision les points d'intersection de deux courbes. Comme le suggère l'exemple suivant, on peut recourir à une calculatrice graphique ou à un ordinateur pour situer, ne fut-ce qu'approximativement, ces points d'intersection. La suite se déroule comme précédemment.

EXEMPLE 3 ■ Déterminer de façon approximative l'aire de la surface délimitée par les courbes $y = x/\sqrt{x^2+1}$ et $y = x^4 - x$.

SOLUTION Pour trouver exactement les points d'intersection il faudrait résoudre l'équation

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x.$$

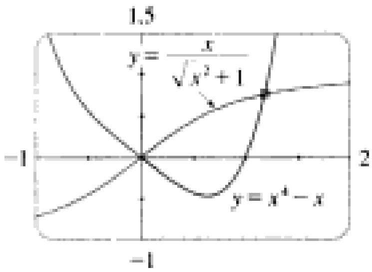


FIGURE 7

Comme cette équation n'est vraiment pas facile, voire impossible à résoudre de façon précise, on préfère faire afficher les graphiques des deux courbes, c'est la figure 7. On voit qu'un point d'intersection est l'origine, tandis que l'autre est, en zoomant suffisamment, $x \approx 1{,}18$. Pour plus de précision, il faudrait employer la méthode de Newton ou l'outil racine d'une calculatrice, s'il est disponible. À ce stade, l'aire entre les deux courbes vaut à peu près

$$A \approx \int_0^{1{,}18}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x)\right]dx.$$

L'intégration du premier terme s'effectue par la subtitution $u = x^2 + 1$. Dès lors, $du = 2x\,dx$ et quand $x \approx 1{,}18$, $u \approx 2{,}39$, ce qui donne

$$A \approx \frac{1}{2}\int_1^{2{,}39}\frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1{,}18}(x^4 - x)\,dx$$

$$= \sqrt{u}\,\Big]_1^{2{,}39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1{,}18}$$

$$= \sqrt{2{,}39} - 1 - \frac{(1{,}18)^5}{5} + \frac{(1{,}18)^2}{2} \approx 0{,}785.$$

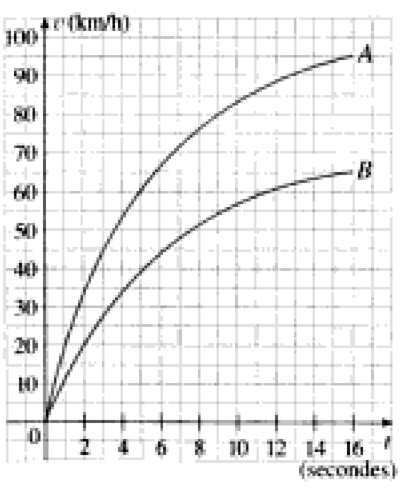


FIGURE 8

EXEMPLE 4 ■ La figure 8 montre les courbes de vitesse de deux voitures qui démarrent côte à côte et roulent sur la même route. Quelle est l'interprétation de l'aire entre les deux courbes ? Calculez-la approximativement à l'aide de la Méthode de Simpson.

SOLUTION Depuis la section 5.3, on sait que l'aire sous la courbe vitesse A représente la distance parcourue par la voiture A durant les 16 premières secondes. De même, l'aire sous la courbe B est la distance parcourue par la voiture B pendant le même intervalle de temps. Par conséquent, l'aire entre les deux courbes ou différence des aires sous les courbes, représente l'écart entre les deux voitures après 16 secondes. On lit les vitesses en km/h sur le graphique et on les transforme en m/s (1 km/h = 0,2778 m/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Ces données sont traitées par la Méthode de Simpson avec $n = 8$ et $\Delta t = 2$ en vue de calculer la distance entre les deux voitures après 16 secondes :

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\,dt$$
$$\approx \tfrac{2}{3}[0 + 4(13) + 2(20) + 4(23) + 2(25) + 4(28) + 2(29) + 4(29) + 30]$$
$$\approx 367 \text{ m.}$$

Il est préférable de traiter certaines régions en considérant x comme une fonction de y. Lorsqu'une région est délimitée par les courbes d'équations $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ et $y = d$, où f et g sont des fonctions continues telles que $f(y) \geqslant g(y)$, quel que soit y compris entre c et d (voyez la figure 9), alors son aire est donnée par l'intégrale

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.$$

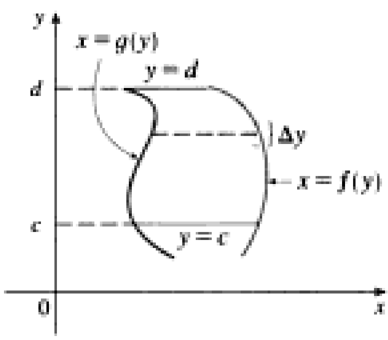


FIGURE 9

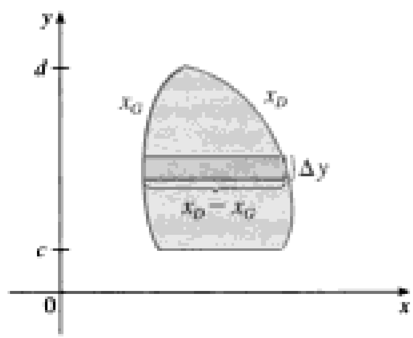


FIGURE 10

En écrivant x_D pour la frontière droite et x_G pour la frontière gauche, comme sur la figure 10, l'expression de l'aire devient

$$A = \int_c^d [x_D - x_G]dy.$$

Les dimensions d'un rectangle représentatif sont $x_D - x_R$ et Δy.

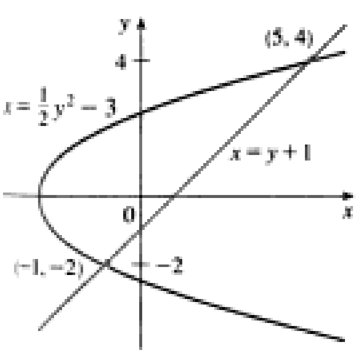


FIGURE 11

EXEMPLE 5 ■ Calculez l'aire de la surface enfermée entre la droite $y = x - 1$ et la parabole $y^2 = 2x + 6$.

SOLUTION Les points d'intersection de la droite avec la parabole s'obtiennent en résolvant le système formé par les deux équations. Ce sont $(-1, -2)$ et $(5, 4)$. L'équation de la parabole est résolue par rapport à x et, d'après la figure 11, les frontières gauche et droite sont les courbes d'équation

$$x_G = \frac{1}{2}y^2 - 3 \qquad x_D = y + 1.$$

Les valeurs de y concernées s'étalent de $y = -2$ à $y = 4$. Le calcul s'effectue comme suit :

$$A = \int_{-2}^{4} (x_D - x_G)\,dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\Big]_{-2}^{4}$$

$$= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18.$$

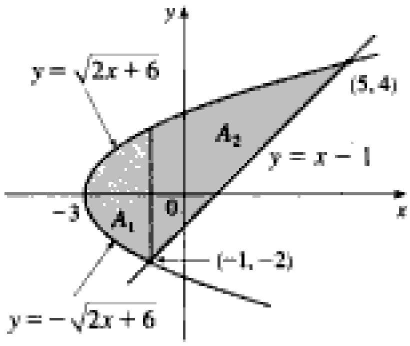


FIGURE 12

On aurait pu obtenir l'aire demandée à l'exemple 5 en intégrant par rapport à la variable x, mais les calculs auraient été plus lourds car il aurait fallu diviser la surface en deux parties et calculer séparément chacune des aires notées A_1 et A_2 dans la figure 12. La méthode adoptée dans l'exemple 5 est *beaucoup* plus facile.

Des régions fermées par des arcs paramétrés

On sait que l'aire sous une courbe $y = F(x)$ depuis a jusqu'à b est donnée par $A = \int_a^b F(x)dx$, lorsque $F(x) \geqslant 0$. Si la courbe est décrite par les équations paramétriques $x = f(t)$ et $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, alors, l'aire peut être obtenue en appliquant la méthode d'intégration par substitution pour une intégrale définie :

On trouve les limites d'intégration de t comme d'habitude lors d'une substitution, quand $x = a$, t est égal à l'une des valeurs α ou β, et quand $x = b$, t est égal à l'autre valeur.

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{ou } \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

EXEMPLE 6 ■ Combien mesure l'aire de la surface située sous une arche de la cycloïde

$$x = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta).$$

(Voyez la figure 13.)

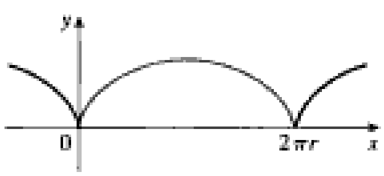


FIGURE 13

SOLUTION Une arche est parcourue lorsque θ prend les valeurs entre 0 et 2π. En employant la Règle de substitution avec $y = r(1 - \cos\theta)$ et $dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$, on arrive à

$$A = \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)r(1 - \cos\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\,d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= r^2\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= r^2\left(\tfrac{3}{2}\cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2.$$

D'après le résultat de l'exemple 6, l'aire sous l'arche de la cycloïde vaut trois fois celle du cercle roulant, générateur de la cycloïde (voyez l'exemple 6 dans la section 1.4). Ce résultat avait été conjecturé par Galilée mais il fut réellement démontré pour la première fois par le mathématicien français Roberval et l'italien Torricelli.

EXEMPLE 7 ■ Estimez l'aire de la région enfermée dans la boucle de la courbe paramétrée par les équations

$$x = t^2 + t + 1 \qquad y = 3t^4 - 8t^3 - 18t^2 + 25.$$

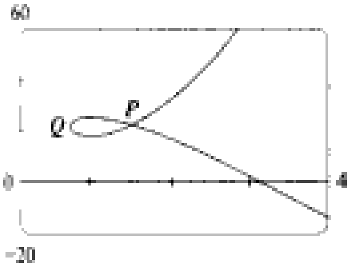


FIGURE 14

SOLUTION Vous pouvez voir la courbe dans la figure 14. Elle a déjà été présentée dans l'exemple 6 de la section 4.4. Pour déterminer la boucle, on a besoin de connaître la valeur du paramètre t à laquelle correspondent les coordonnées de P, extrémité droite de la boucle, là où la courbe se recoupe elle-même. En regardant de très près et suivant ce qu'indique le curseur, les coordonnées de P sont approximativement $(1{,}497; 22{,}2)$. Les valeurs correspondantes du paramètre sont les solutions de l'équation du deuxième degré

$$x(t) = t^2 + t + 1 = 1{,}497,$$

soit $t \approx -1{,}36$ et $t \approx 0{,}36$. L'extrémité gauche de la boucle est le point en lequel la tangente est verticale. Ses coordonnées sont l'image de $t = -0{,}5$. Pour obtenir l'aire de la boucle, il faut retrancher l'aire sous la frontière inférieure de la boucle de l'aire sous la frontière supérieure. Ainsi

$$A \approx \int_{-0,5}^{0,36} (3t^4 - 8t^3 - 18t^2 + 25)(2t + 1)\, dt$$

$$- \int_{-0,5}^{-1,36} (3t^4 - 8t^3 - 18t^2 + 25)(2t + 1)\, dt.$$

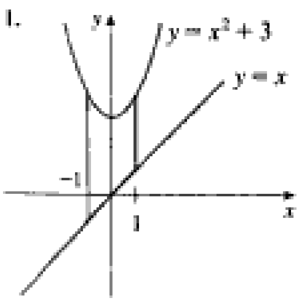
Ces deux intégrales se simplifient en

$$A \approx \int_{-1,36}^{0,36} (3t^4 - 8t^3 - 18t^2 + 25)(2t + 1)\, dt \approx 3{,}6.$$

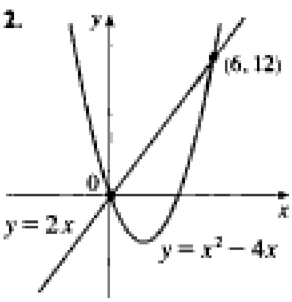
6.1 Exercices

1-4 ■ Calculez l'aire de la région ombrée.

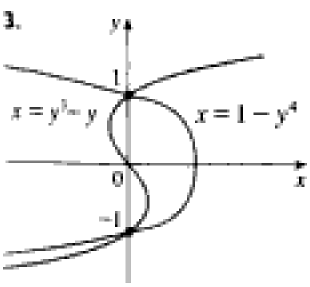
1.



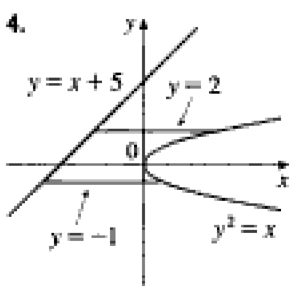
2.



3.



4.



5-16 ■ Faites un dessin de la région délimitée par les courbes données. Examinez s'il est préférable d'en calculer l'aire en intégrant par rapport à x ou à y. Dessinez un rectangle d'approximation représentatif et spécifiez sa hauteur et sa largeur. Calculez ensuite l'aire de la région.

5. $y = x, \quad y = x^2$

6. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 1, \quad x = 2$

7. $y = e^x, \quad y = e^{3x}, \quad x = 1$

8. $y = x^2, \quad y^2 = x$

9. $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$

10. $y = x^4 - x^2, \quad y = 1 - x^2$

11. $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$

12. $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$

13. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

14. $y = \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

15. $y = x^2, \quad y = 2/(x^2 + 1)$

16. $y = 1/x, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$

17-20 ■ Faites dessiner les courbes et déterminez ainsi approximativement leurs points d'intersection sur le graphique. Calculez (approximativement) l'aire de la région comprise entre ces courbes.

17. $y = x^2, \quad y = 2\cos x$

18. $y = x^4 - 1, \quad y = x\sin(x^2)$

19. $y = x^2, \quad y = xe^{-x/2}$

20. $y = x^2 - 5, \quad y = \ln x$

21. Christiane et Katia pilotent deux voitures de course qui, au départ, sont à la même hauteur. On relève les vitesses de chaque voiture (en km/h) pendant les 10 premières secondes de la compétition. La vitesse de Katia étant toujours supérieure à celle de Christiane, Katia effectuera davantage de kilomètres pendant ces 10 secondes. Estimez combien, à l'aide de la Méthode de Simpson.

t	v_C	v_K
0	0	0
1	20	22
2	32	37
3	46	52
4	54	61
5	62	71

t	v_C	v_K
6	69	80
7	75	86
8	81	93
9	86	98
10	90	102

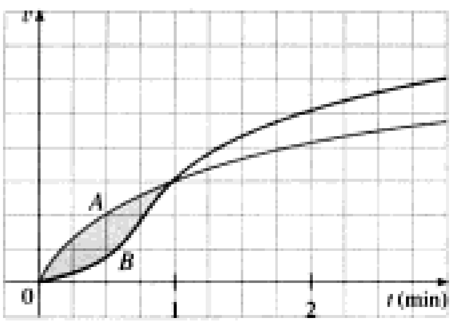
22. Deux voitures A et B sont côte à côte à l'arrêt et commencent à accélérer. La figure montre les courbes représentatives de leurs vitesses.

a) Laquelle des deux voitures est en tête après une minute ? Expliquez pourquoi.

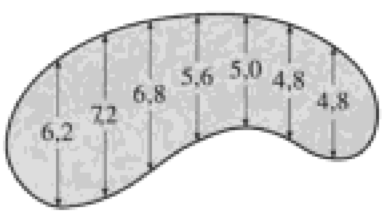
b) À quoi correspond l'aire de la figure ombrée ?

c) Laquelle des deux voitures est en tête après deux minutes ? Expliquez pourquoi.

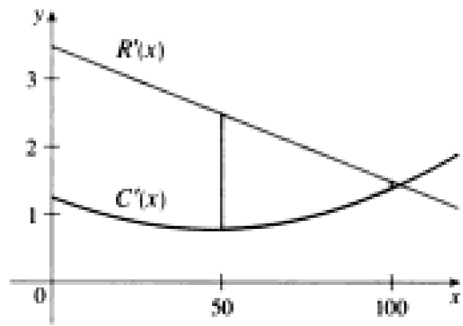
d) Après combien de temps les deux voitures sont-elles à nouveau à la même hauteur ?



23. Une piscine a plus ou moins la forme d'un haricot. En vue d'en obtenir l'aire, on mesure sa largeur tous les deux mètres. Estimez l'aire de cette piscine en employant la Méthode de Simpson.



24. La figure montre les graphiques de la fonction de recette marginale R' et de la fonction de coût marginal C' d'une entreprise de fabrication d'un produit. Pour rappel, $R(x)$ et $C(x)$ représentent la recette et le coût de fabrication lorsque x unités sont produites. Ces fonctions sont exprimées en milliers d'euros (voyez la section 4.7). Quelle interprétation donnez-vous à l'aire de la région ombrée ? Utilisez la Méthode du point médian pour évaluer cette aire.



25. Dessinez la région qui se trouve entre les courbes $y = \cos x$ et $y = \sin 2x$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi/2$. Vous remarquez que la figure se compose de deux morceaux. Calculez l'aire de cette région.

26. Faites afficher les courbes $y = x^2 - x$ et $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ sur un même écran et remarquez que la région qu'elles délimitent est scindée en deux. Calculez l'aire de ces régions.

27. Utilisez les équations paramétriques d'une ellipse, $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ pour calculer l'aire de la surface qu'elle détermine.

28. Faites tracer les courbes paramétriques $x = t - 1/t$, $y = t + 1/t$. Déterminez l'aire de la région comprise entre cette courbe et la droite $y = 2{,}5$.

29. Dessinez la surface délimitée par la courbe décrite paramétriquement par $x = \cos t$, $y = e^t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ et par les droites $y = 1$ et $x = 0$. Écrivez l'intégrale égale à la mesure de l'aire de cette région. Demandez ensuite à un logiciel de calcul symbolique de la calculer.

30. Dessinez l'astroïde $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ et écrivez l'intégrale égale à la mesure de l'aire qui se trouve à l'intérieur. Demandez ensuite à un logiciel de calcul symbolique de la calculer.

31. Déterminer l'aire de la boucle formée par la courbe d'équations paramétriques $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.

32. Estimez l'aire de la boucle que forme la courbe d'équations paramétriques $x = t^3 - 12t$, $y = 3t^2 + 2t + 5$.

33. Calculez la valeur de c telle que l'aire de la région comprise entre les deux paraboles $y = x^2 - c^2$ et $y = c^2 - x^2$ mesure 576 unités carrées.

34. La tangente en $(1, 1)$ à la parabole $y = x^2$ forme avec l'axe Ox une région bien délimitée. Calculez son aire.

35. Déterminez le nombre b tel que la droite $y = b$ divise la région bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = 4$ en deux régions de même aire.

36. a) Déterminez le nombre a tel que la droite $x = a$ coupe en deux l'aire située sous la courbe $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

b) Déterminez le nombre b tel que la droite $y = b$ coupe en deux l'aire dont il est question dans la partie a).

37. Définissez une fonction f positive et continue telle que l'aire sous le graphique de f depuis 0 jusqu'à t soit $A(t) = t^3$, quel que soit $t > 0$.

38. On suppose que $0 < c < \pi/2$. Pour quelle valeur de c l'aire de la région comprise entre les courbes $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$ et $x = 0$ est-elle égale à l'aire de la région comprise entre les courbes $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ et $y = 0$?

39. Pour quelles valeurs de m la droite $y = mx$ et la courbe $y = x/(x^2 + 1)$ délimitent-elles une région ? Calculez l'aire de la région.

6.2 Les volumes

Déterminer le volume d'un solide pose un problème de même type que déterminer l'aire d'une surface. Intuitivement, on sait ce qu'est un volume, mais il faut rendre cette notion plus précise par le biais du calcul intégral jusqu'à en obtenir une définition exacte.

On part du solide de forme simple appelé **cylindre** (ou plus précisément *cylindre droit*). Comme l'illustre la figure 1 (a), un cylindre est borné par un région plane B_1, appelée la **base** et une région congruente B_2 dans un plan parallèle. Le cylindre est constitué de tous les points des segments perpendiculaires à la base qui relient B_1 à B_2. Si A désigne l'aire de la base et h la hauteur du cylindre (la distance entre B_1 et B_2), alors le volume V du cylindre est défini par la formule

$$V = Ah.$$

En particulier, lorsque la base est un cercle de rayon r, le cylindre est un cylindre circulaire de volume $V = \pi r^2 h$ [voyez la figure 1 (b)] et lorsque la base est un rectangle de longueur L et de largeur l, le cylindre est une boîte rectangulaire (appelée aussi *parallélipipède rectangle*) de volume $V = Llh$ [voyez la figure 1 (c)].

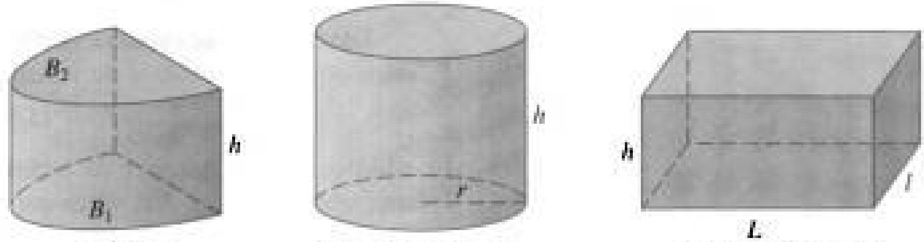


FIGURE 1

(a) Cylindre $V = Ah$

(b) Cylindre circulaire $V = \pi r^2 h$

(c) Boîte rectangulaire $V = Llh$

On considère maintenant un solide quelconque S. L'intersection de S avec un plan est une région plane appelée **section transversale** de S. On coupe le solide S par un plan P_x perpendiculaire à l'axe Ox et passant par une abscisse x comprise entre a et b

et on appelle $A(x)$ l'aire de cette section plane. (Voyez la figure 2. Pensez à la découpe de S avec un canif au niveau x et à l'aire de la tranche ainsi obtenue). L'aire de la section $A(x)$ varie lorsque x passe par toutes les valeurs depuis a jusqu'à b.

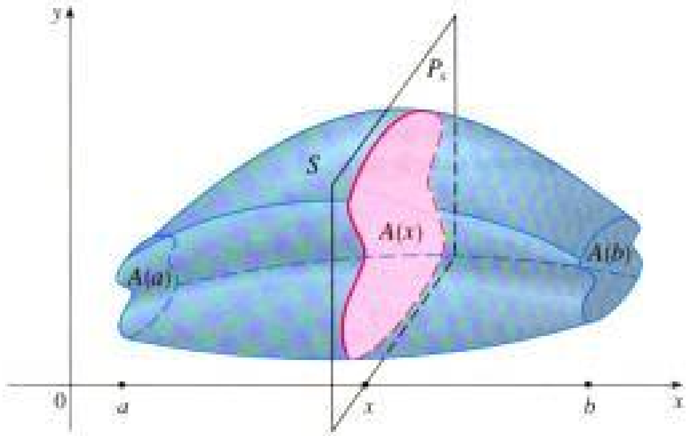


FIGURE 2

Coupé par les plans $P_{x_1}, P_{x_2}, \ldots$, le solide S est divisé en n « dalles » de même épaisseur Δx. (On peut penser aux tranches d'un pain.) La $i^{\text{ème}}$ dalle, celle qui est comprise entre les plans $P_{x_{i-1}}$ et P_{x_i}, peut être considérée comme un cylindre de hauteur Δx et de base $A(x_i^*)$, où x_i^* est un point arbitrairement choisi dans $[x_{i-1}, x_i]$ (voyez la figure 3).

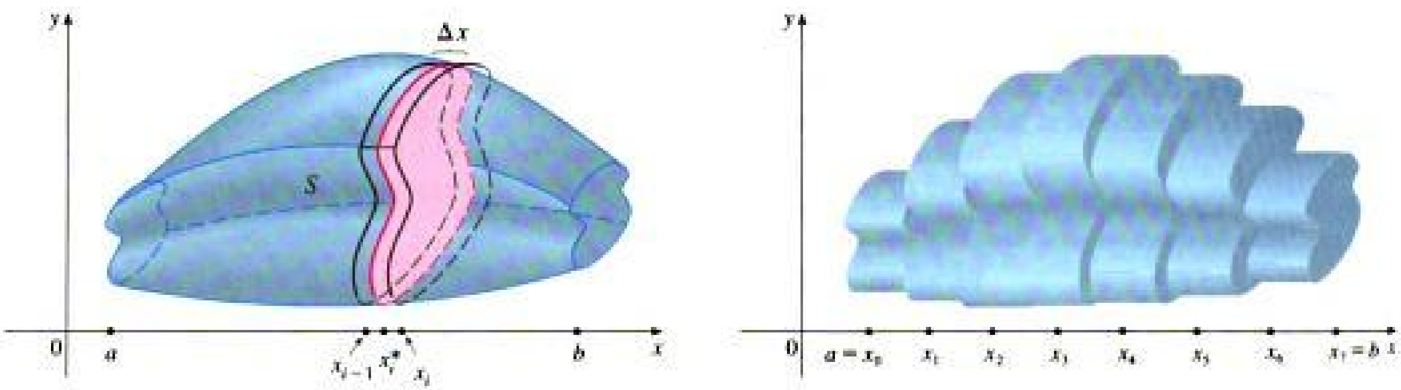


FIGURE 3

Le volume de ce cylindre vaut le produit $A(x_i^*)\Delta x$. Le volume de cette $i^{\text{ème}}$ dalle S_i, selon notre idée intuitive du volume, est approximativement donné par

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\Delta x.$$

En additionnant les volumes de toutes ces dalles, on obtient une approximation du volume total (tout au moins de ce qui semble intuitivement être le volume) :

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x.$$

Cette approximation s'améliore à mesure que n croît. (Imaginez que les tranches deviennent de plus en plus fines.) Par conséquent, on *définit* le volume comme la limite de ces sommes lorsque $n \to \infty$. Or, une telle limite de sommes de Riemann est reconnue comme une intégrale, ce qui mène à la définition suivante.

Définition du volume Soit S un solide compris entre $x = a$ et $x = b$. Si $A(x)$ est une fonction continue qui à x fait correspondre l'aire de la section de S par le plan P_x, perpendiculaire à l'axe Ox en x, alors le volume de S est

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx.$$

Lorsqu'on emploie la formule $V = \int_a^b A(x)dx$, il est bon d'avoir à l'esprit l'image d'une section transversale, perpendiculaire à l'axe Ox et d'aire $A(x)$, qui parcourt toutes les valeurs de x.

EXEMPLE 1 ■ Démontrer que le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

SOLUTION On place le centre de la sphère à l'origine comme dans la figure 4. Un plan P_x coupe la sphère selon un cercle dont le rayon est, selon la formule de Pythagore, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. L'aire de cette section circulaire a pour expression

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2).$$

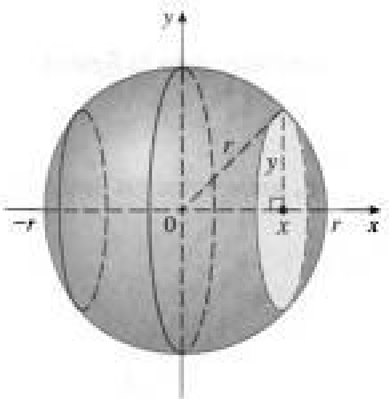


FIGURE 4

On emploie maintenant la Définition du volume avec $a = -r$ et $b = r$:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(L'intégrande est une fonction paire.)} \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

La figure 5 illustre la Définition du volume dans le cas de la sphère de rayon 1. D'après l'exemple 1, le volume de la sphère est égal à $\frac{4}{3}\pi \approx 4{,}18879$. Ici, les dalles sont des cylindres circulaires et les trois parties de la figure 5 illustrent géométrique-

(a) Avec 5 cylindres, $V = 4{,}2726$ (b) Avec 10 cylindres, $V = 4{,}2097$ (c) Avec 20 cylindres, $V = 4{,}1940$

FIGURE 5 Approximation du volume d'une sphère de rayon 1 ment différentes sommes de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} (1^2 - \bar{x}_i^2)\Delta x,$$

pour $n = 5$, 10 et 20, où les x_i^* sont choisis au milieu de chaque subdivision. D'un point de vue numérique, on peut observer que plus le nombre de cylindres est grand, plus la valeur correspondante de la somme de Riemann est proche de la valeur exacte du volume.

EXEMPLE 2 ■ Calculez le volume du solide obtenu en faisant tourner la surface délimitée par $y = x^3$, $y = 8$ et $x = 0$ autour de l'axe Oy.

SOLUTION La surface génératrice est celle de la figure 6 (a) et le solide de révolution est celui de la figure 6 (b). Vu que le solide est engendré par une rotation autour de l'axe Oy, cela a plus de sens de le découper par des plans perpendiculaires à l'axe Oy. Un plan passant par le niveau y donne une section circulaire de rayon $x = \sqrt[3]{y}$. L'aire de cette section est donnée par l'expression

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3},$$

et le volume de la tranche cylindrique d'approximation représentée dans la figure 6 (b) par

$$A(y)\Delta y = \pi y^{2/3}\Delta y.$$

Comme le solide est compris entre les plans $y = 0$ et $y = 8$, son volume est donné par

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy$$

$$= \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}.$$

La réponse de l'exemple 2 est-elle vraisemblable ? En guise de vérification, on remplace la surface génératrice par un rectangle de hauteur 8 qui repose sur l'intervalle $[0, 2]$. La rotation de ce rectangle autour de l'axe Oy engendre un cylindre circulaire dont le volume vaut $\pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi$. En comparaison, le solide de l'exemple 2 a un volume égal à $19{,}2\pi$, soit un peu plus de la moitié du volume du cylindre. Cela paraît correct.

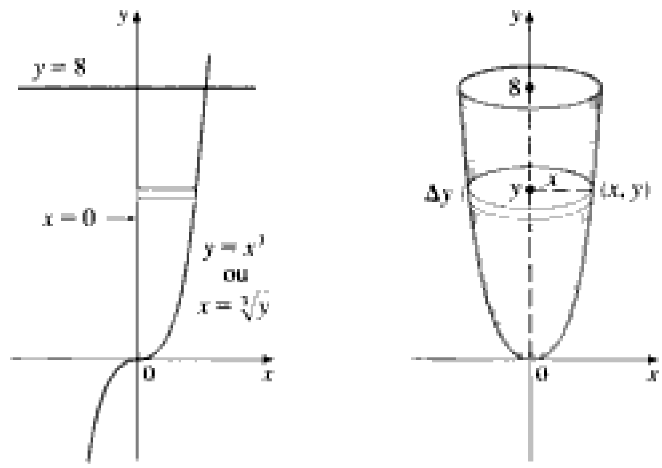


FIGURE 6

EXEMPLE 3 ■ La région $\mathcal{R}$ comprise entre les courbes $y = x$ et $y = x^2$ subit une rotation autour de l'axe Ox. Il en résulte un solide dont on demande de calculer le volume.

SOLUTION Les courbes $y = x$ et $y = x^2$ se coupent aux points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. La figure 7 montre la région comprise entre ces deux courbes, le solide de révolution et une section transversale créée par un plan perpendiculaire à l'axe Ox. Une telle section a la forme

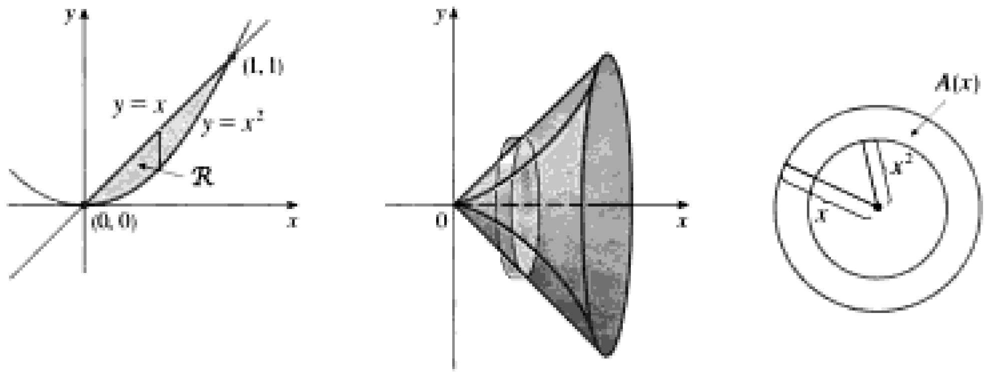


FIGURE 7 (a) (b) (c)

d'un anneau de rayon extérieur x et de rayon intérieur x^2. L'aire de cet anneau est égale à

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4).$$

De là,

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

EXEMPLE 4 ■ Déterminez le volume du solide engendré par la surface de l'exemple 3 lorqu'elle tourne autour de l'axe $y = 2$.

SOLUTION La figure 8 montre le solide et une section transversale. Cette section est annulaire, de rayon extérieur $2 - x^2$ et de rayon intérieur $2 - x$. Son aire s'obtient donc par la formule

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2,$$

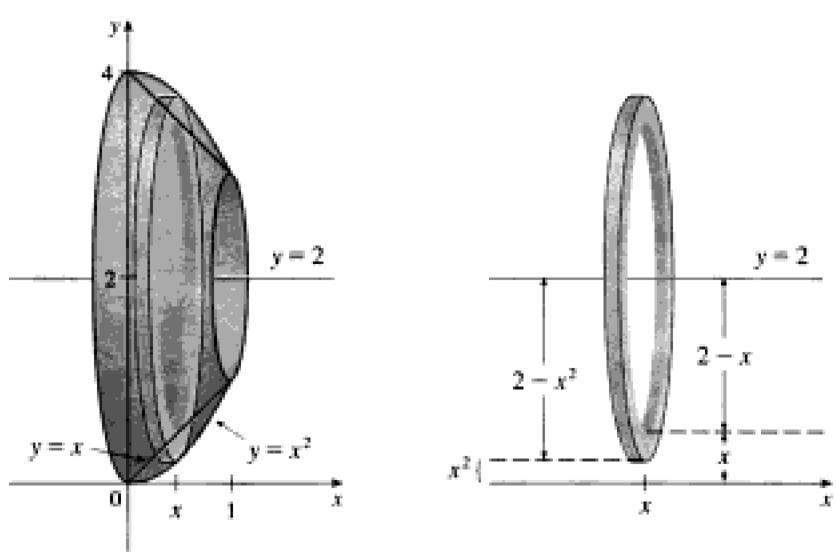


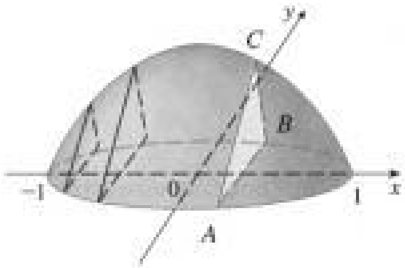
FIGURE 8

et le volume du solide est donné par

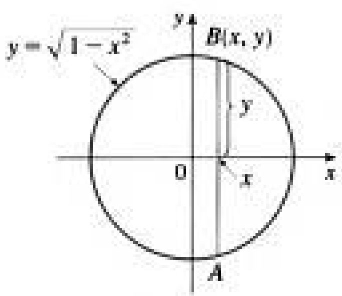
$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx$$

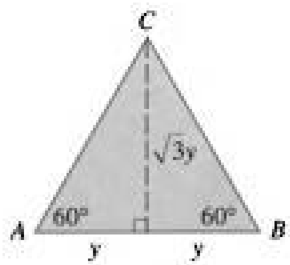
$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}.$$



(a) Le solide



(b) La base du solide



(c) Une section

FIGURE 9

EXEMPLE 5 ■ Un solide a une base circulaire de rayon 1 et chaque section par un plan perpendiculaire à la base est un triangle équilatéral. Déterminez le volume de ce solide.

SOLUTION Plaçons le centre du cercle à l'origine de sorte que son équation soit $x^2 + y^2 = 1$. La figure 9 montre successivement le solide en perspective, sa base et une section plane faite à une distance x de l'origine. Comme B est sur le cercle, son ordonnée est $y = \sqrt{1 - x^2}$ et la base du triangle ABC mesure $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Comme le triangle est équilatéral, sa hauteur mesure $\sqrt{3}y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$ [voyez la figure 9 (c)]. L'aire de la section triangulaire est donc égale à

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2),$$

et le volume du solide à

$$V = \int_{-1}^1 A(x)\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

EXEMPLE 6 ■ Calculez le volume d'une pyramide de hauteur h et à base carrée de côté L.

SOLUTION La pyramide a son sommet à l'origine et l'axe Ox est son axe central comme sur la figure 10. Chaque plan P_x perpendiculaire à l'axe Ox coupe la pyramide suivant une section carrée de côté s. La similitude des triangles dans la figure 11 permet de trouver comment s s'exprime en fonction de x :

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}.$$

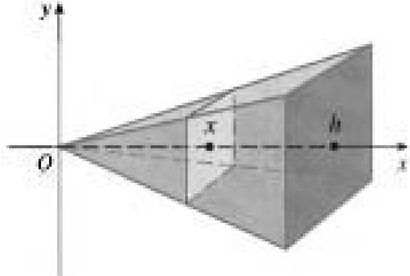


FIGURE 10

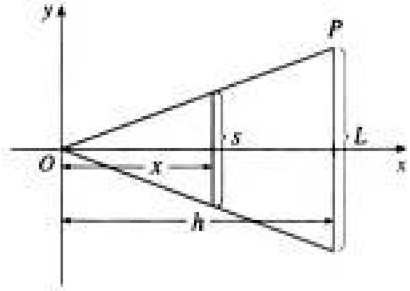


FIGURE 11

De là, $s = Lx/h$. [On pouvait arriver au même résultat en observant que la droite OP a pour pente $L/(2h)$ et donc pour équation $y = Lx/(2h)$]. L'aire de la section carrée vaut donc

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2.$$

Comme la pyramide est située entre $x = 0$ et $x = h$, son volume est donné par

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx$$
$$= \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big]_0^h = \frac{L^2h}{3}.$$

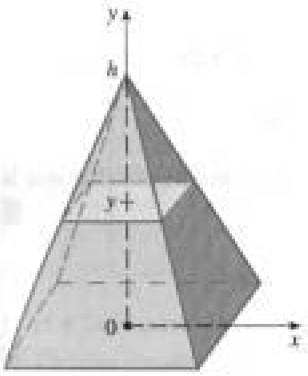


FIGURE 12

REMARQUE • Il n'était pas indispensable de placer le sommet de la pyramide à l'origine. Le seul but était de rendre les équations les plus simples possibles. Avec le centre de la base à l'origine et le sommet sur l'axe Oy, comme dans la figure 12, le volume aurait été donné par l'intégrale

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}.$$

EXEMPLE 7 ■ Déterminez le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Oy de la surface sous la courbe $y = 2x^2 - x^3$.

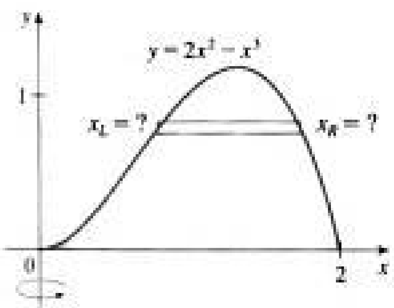


FIGURE 13

SOLUTION La surface génératrice est celle de la figure 13. En essayant d'appliquer la même méthode qu'à l'exemple 2, on tombe sur un épineux problème, celui de déterminer le rayon intérieur et le rayon extérieur d'une section. Cela demande en effet de résoudre, par rapport à x, l'équation du troisième degré $y = 2x^2 - x^3$ et ce n'est pas facile. Au lieu de découper en tranches, on va employer une autre méthode, appelée méthode des **tubes cylindriques**. La figure 14 met en évidence un rectangle d'approximation représentatif d'épaisseur Δx. Lorsque ce rectangle tourne autour de l'axe Oy, il engendre un tube cylindrique dont le rayon moyen est $\bar{x}_i$, point milieu du $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle.

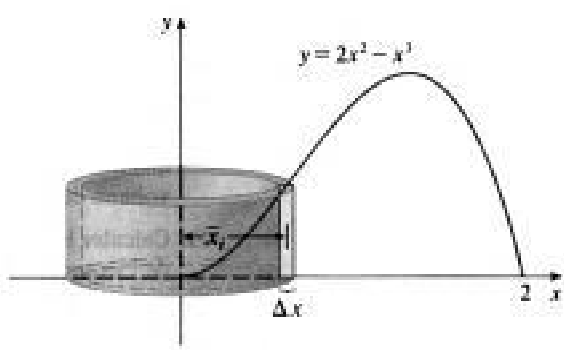


FIGURE 14 Un tube cylindrique

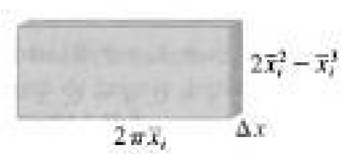


FIGURE 15 Le tube mis à plat

Si on entaille ce tube de manière à pouvoir le mettre à plat, comme dans la figure 15, la dalle rectangulaire qui en résulte a les dimensions $2\pi\bar{x}_i$, Δx et $2\bar{x}_i^2 - \bar{x}_i^3$. Le volume du tube est donné par

$$2\pi\bar{x}_i(2\bar{x}_i^2 - \bar{x}_i^3)\Delta x.$$

En effectuant ce calcul sur chaque sous-intervalle et en additionnant les résultats, on obtient une valeur approximative du volume du solide :

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i (2\bar{x}_i^2 - \bar{x}_i^3)\Delta x.$$

Comme cette approximation s'améliore lorsque n croît, il est acceptable de poursuivre les calculs comme suit :

Pour obtenir tous les tubes, il faut faire varier x de 0 à 2.

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i (2\bar{x}_i^2 - \bar{x}_i^3)\,\Delta x \\ &= \int_0^2 2\pi x(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx \\ &= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi. \end{aligned}$$

Il est possible de vérifier que la méthode des tubes conduit au même résultat que la méthodes des sections transversales.

La figure 16 montre une image infographique du solide dont le volume a été calculé à l'exemple 7.

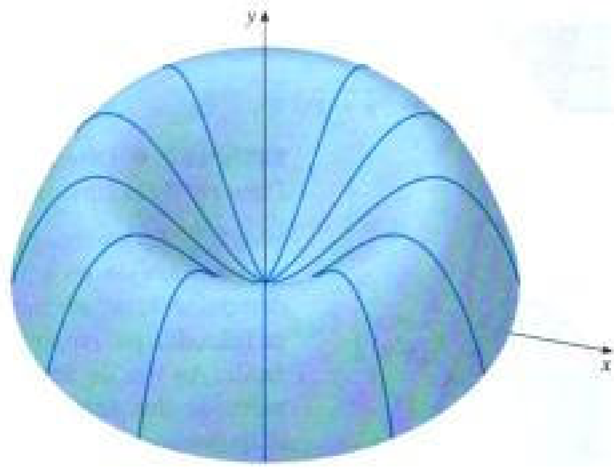


FIGURE 16

6.2 Exercices

1-10 ■ Déterminez le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe indiqué de la région délimitée par les courbes données. Dessinez la région, le solide et un cylindre d'approximation représentatif.

1. $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$; autour de l'axe Ox

2. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; autour de l'axe Ox

3. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$, $x = 2$; autour de l'axe Oy

4. $x = y - y^2$, $x = 0$; autour de l'axe Oy

5. $y = x^2$, $y^2 = x$; autour de l'axe Ox

6. $y = \cos x$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi/4$; autour de l'axe Ox

7. $y^2 = x$, $x = 2y$; autour de l'axe Oy

CAS **8.** $y = e^x$, $y = 1$, $x = 1$; autour de l'axe Oy

9. $y = x^4$, $y = 1$; autour de $y = 2$

10. $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; autour de $x = 1$

11. On fait tourner autour de la droite $x = 8$ la région du premier quadrant délimitée par les courbes $x = 4y$ et $y = \sqrt[3]{x}$. Calculez le volume du solide ainsi engendré.

12. Calculez le volume du solide obtenu en faisant tourner la région de l'exercice 11 autour de la droite $y = 2$.

LCS **13-14** ■ Servez-vous d'un graphique pour déterminer approximativement les abscisses des points d'intersection des courbes données. Calculez ensuite (approximativement) le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la région délimitée par ces courbes.

13. $y = x^2$, $y = \ln(x + 1)$

14. $y = 3\sin(x^2)$, $y = e^{x/2} + e^{-2x}$

15. Un scanner produit des images en coupe d'un organe, donnant ainsi une information que seule la chirurgie pourrait fournir. Un foie humain est passé au scanner et on en a des coupes régulièrement espacées de 1,5 cm. Ce foie fait 15 cm de long et les aires de ces coupes mesurent 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 et 0 cm^2. Estimez le volume de ce foie en employant la Méthode de Simpson.

16. Un tronc de 10 m de long est découpé en tronçon de 1 m et l'aire de chaque section à une distance x de l'extrémité est mesurée et notée dans la table. Utilisez la Méthode du point médian avec $n = 5$ pour estimer le volume de ce tronc.

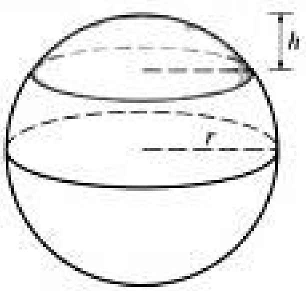
x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0,68	6	0,53
1	0,65	7	0,55
2	0,64	8	0,52
3	0,61	9	0,50
4	0,58	10	0,48
5	0,59		

17-29 ■ Déterminez le volume du solide décrit.

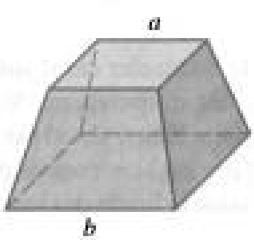
17. Un cône circulaire droit de rayon r et de hauteur h.

18. Un tronc de cône circulaire droit de hauteur h, dont le rayon de la base inférieure mesure R et celui de la base supérieure r.

19. La calotte d'une sphère de rayon r et de hauteur h.

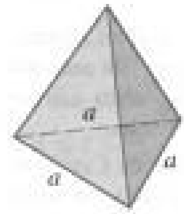


20. Un tronc de pyramide de hauteur h, de base inférieure carrée de côté b et de base supérieure carrée de côté a.



21. Une pyramide de hauteur h et de base rectangulaire de dimensions b et $2b$.

22. Une pyramide de hauteur h, dont la base est un triangle équilatéral de côté a (tétraèdre).



23. Un tétraèdre avec trois faces deux à deux perpendiculaires et trois arêtes deux à deux perpendiculaires de longueurs 3 cm, 4 cm et 5 cm.

24. La base du solide S est un disque de rayon r. Les sections parallèles, perpendiculaires à la base, sont des carrés.

25. La base du solide S est la région bornée par l'ellipse d'équation $9x^2 + 4y^2 = 36$. Les sections parallèles, perpendiculaires à l'axe Ox, sont des triangles rectangles isocèles dont l'hypoténuse appartient à la base.

26. La base du solide S est un segment de parabole constitué des points $\{(x, y) \mid x^2 \leqslant y \leqslant 1\}$. Les sections parallèles, perpendiculaires à l'axe Oy, sont des triangles équilatéraux.

27. S a la même base que celle décrite dans l'exercice 26, mais les sections perpendiculaires à l'axe Oy sont des carrés.

28. La base de S est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $(0, 1)$. Les sections parallèles, perpendiculaires à l'axe Ox, sont des demi-cercles.

29. S a la même base que celle décrite dans l'exercice 28, mais les sections perpendiculaires à l'axe Ox sont des triangles isocèles de hauteur égale à la base.

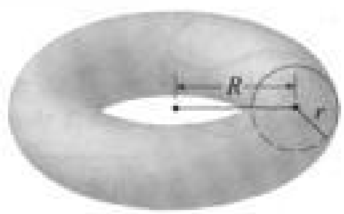
30. La base de S est un disque de rayon r. Les sections parallèles perpendiculaires à la base sont des triangles isocèles de même hauteur h mais de côté inégal dans la base.

a) Établissez une intégrale qui correspond au volume de S.

b) En reconnaissant cette intégrale comme la mesure d'une aire, calculez le volume de S.

31. a) Établissez une intégrale qui fournit le volume d'un tore de révolution (le solide en forme de beignet dessiné dans la figure) caractérisé par les rayons r et R.

b) En reconnaissant cette intégrale comme la mesure d'une aire, calculez le volume du tore.

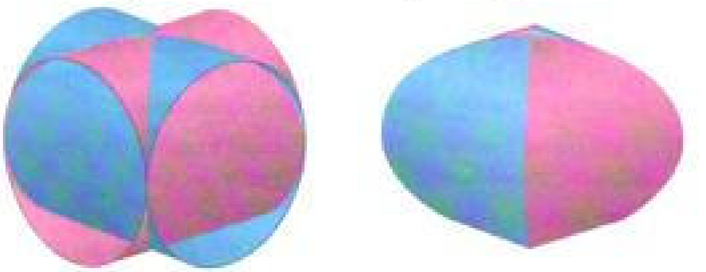


32. Un coin est détaché d'un cylindre circulaire de rayon 4 par deux coupes. Une des coupes est effectuée selon un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. L'autre fait avec la première un angle de 30° le long d'un diamètre du cylindre. Calculez le volume de ce coin.

33. a) Le principe de Cavalieri affirme que si une famille de plans parallèles découpe des sections d'aires égales dans deux solides S_1 et S_2, alors ces solides ont même volume. Démontrez ce principe.

b) Grâce au principe de Cavalieri, déterminez le volume du cylindre oblique que vous voyez dans la figure.

34. Déterminez le volume commun à deux cylindres circulaires de même rayon r dont les axes se coupent à angle droit.



35. Déterminez le volume commun à deux sphères de même rayon r si le centre de chaque sphère se trouve sur la surface de l'autre.

36. Un saladier a la forme d'une demi-sphère de 30 cm de diamètre. On y dépose une balle de 10 cm de diamètre et on remplit le bol d'eau jusqu'à une hauteur de h cm. Quel volume occupe l'eau dans le bol ?

37. On fore, perpendiculairement à l'axe d'un cylindre circulaire de rayon R, un trou circulaire de rayon r ($R > r$). Établissez, mais sans la calculer, l'intégrale du volume ainsi découpé.

38. On fore dans une sphère de rayon R un trou de rayon r ($r < R$) en passant par le centre de la sphère. Calculez le volume de la sphère ainsi amputée.

39. Soit S le solide obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oy la surface délimitée par $y = x(x-1)^2$ et $y = 0$. Expliquez pourquoi il n'est pas approprié de choisir la méthode des sections transversales pour calculer le volume de ce solide. Calculez le volume V de S par la méthode des tubes cylindriques.

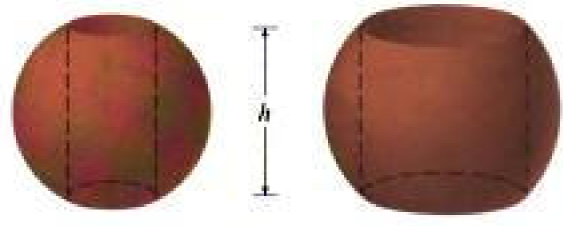
40. Soit V le volume du solide obtenu en faisant tourner autour de l'axe Oy la surface délimitée par $y = x$ et $y = x^2$. Calculez V par la méthode des sections transversales et par la méthode des tubes cylindriques. Dans chaque cas, faites un dessin qui explique la méthode employée.

41. Utilisez la méthode des tubes cylindriques pour calculer le volume de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $x = 2$ de la surface comprise entre les courbes $y = x - x^2$ et $y = 0$. Dessinez la surface génératrice et un tube représentatif. Expliquez pourquoi cette méthode est préférable à celle des sections transversales.

42. Vous avez fabriqué des ronds de serviette en perçant des trous de diamètres différents dans deux boules en bois, elles-mêmes de diamètres différents, et vous découvrez que les deux anneaux ont même hauteur h, comme sur la figure.

a) À votre avis, quel est l'anneau qui comporte le plus de bois.

b) Vérifiez votre conjecture : Par la méthode des tubes cylindriques, calculez le volume d'un rond de serviette obtenu en perçant au centre d'une sphère de rayon R un trou de rayon r et en exprimant le résultat en fonction de h.



6.3 La longueur d'un arc de courbe

FIGURE 1

Qu'entend-on par la longueur d'un arc de courbe ? On pourrait penser à ajuster une ficelle au tracé de la courbe de la figure 1, puis à la poser, tendue, le long d'un mètre pour la mesurer. Mais comment faire cela avec précision, surtout si on a affaire à une courbe compliquée ?

La longueur d'un polygone est facile à calculer car il suffit d'additionner les longueurs des segments qui forment les côtés du polygone. Voilà pourquoi on va définir la longueur d'un arc de courbe en l'approchant d'abord par celle d'un polygone, puis en passant à la limite. Cette façon de faire est bien connue pour le cercle dont la longueur de la circonférence est obtenue comme la limite des longueurs des polygones inscrits (voyez la figure 2).

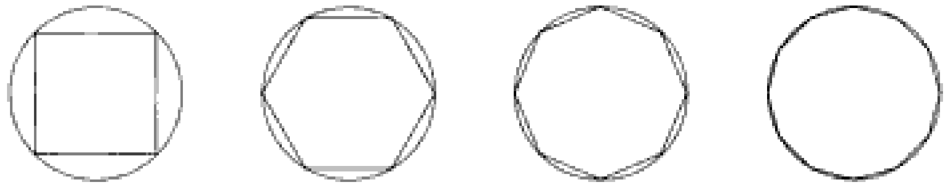


FIGURE 2

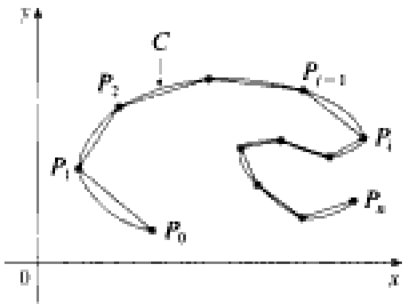


FIGURE 3

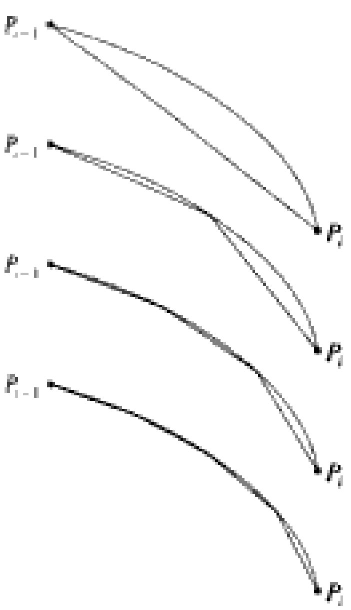


FIGURE 4

On suppose qu'une courbe C est décrite par les équations paramétriques

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

On suppose aussi que la courbe est **lisse** au sens où les dérivées $f'(t)$ et $g'(t)$ sont continues et non nulles simultanément pour $a < t < b$. (Cela assure que C ne change pas brusquement de direction.) On divise l'intervalle de variation de t en n sous-intervalles égaux de longueur Δt. Si $t_0, t_1, \ldots, t_n$ désignent les points de division, alors $x_i = f(t_i)$ et $y_i = g(t_i)$ sont les coordonnées des points $P_i(x_i, y_i)$ qui se trouvent sur C et le polygone de sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n$ constitue une approximation de C (voyez la figure 3). La longueur L de C est à peu près la même que celle du polygone et ces deux longueurs deviennent de plus en plus proches à mesure que n augmente (voyez la figure 4). Par conséquent, on définit la **longueur** de C comme la limite des longueurs de ces polygones inscrits :

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|.$$

Vous aurez certainement noté que la procédure suivie pour définir la longueur d'un arc de courbe est très semblable à celle qui a été adoptée pour définir des aires et des volumes : diviser la courbe en un grand nombre de petits morceaux, ensuite calculer approximativement les longueurs de ces morceaux et les additionner ; enfin, passer à la limite pour n tendant vers l'infini.

En vue du calcul, il faut disposer d'une autre expression de L. Si on pose $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ et $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, alors la longueur du $i^{\text{ème}}$ segment du polygone est égale à

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}.$$

Or, par la définition de la dérivée, on sait que

$$f'(t_i) \approx \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$$

lorsque Δt est petit. (On peut même mettre n'importe quel t_i^* à la place de t_i.) Par conséquent,

$$\Delta x_i \approx f'(t_i)\Delta t \qquad \Delta y_i \approx g'(t_i)\Delta t$$

et

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &\approx \sqrt{[f'(t_i)\Delta t]^2 + [g'(t_i)\Delta t]^2} \\ &= \sqrt{[f'(t_i)]^2 + [g'(t_i)]^2}\,\Delta t. \end{aligned}$$

De là,

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i)]^2 + [g'(t_i)]^2}\,\Delta t.$$

Comme il s'agit d'une somme de Riemann de la fonction $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$, le passage à la limite conduit à une expression de L sous forme d'une intégrale

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt.$$

De fait, le raisonnement tenu peut devenir tout à fait rigoureux ; cette formule est correcte à condition d'exclure les situations où l'arc de courbe est parcouru plus d'une fois.

1 Formule de la longueur d'un arc Lorsqu'une courbe lisse décrite par les équations paramétriques $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, est parcourue exactement une fois lorsque t passe par toutes les valeurs depuis a jusqu'à b, alors sa longueur est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

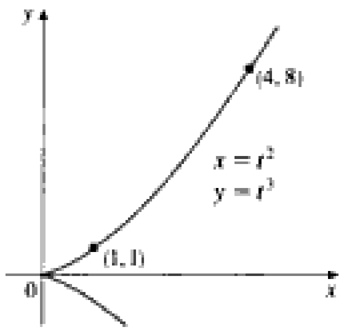


FIGURE 5

En guise de vérification de la réponse à l'exemple 1, on peut observer dans la figure 5 que l'arc est à peine plus long que le segment qui joindrait les points $(1, 1)$ et $(4, 8)$, à savoir

$$\sqrt{58} \approx 7{,}615773.$$

Le calcul de l'exemple 1 conduit à

$$L = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \approx 7{,}633705.$$

Effectivement, c'est un rien supérieur à la longueur du segment.

EXEMPLE 1 ■ Combien mesure l'arc de la courbe $x = t^2$, $y = t^3$ compris entre les points $(1, 1)$ et $(4, 8)$ (voyez la figure 5) ?

SOLUTION On constate d'abord que les extrémités de l'arc sont atteintes lorsque le paramètre t prend respectivement les valeurs 1 et 2 et que l'arc est parcouru lorsque t parcourt l'intervalle $[1, 2]$. La formule (1) de la longueur d'un arc conduit à l'intégrale

$$L = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^2 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt$$
$$= \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 9t^4}\, dt = \int_1^2 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt.$$

On fait la substitution $u = 4 + 9t^2$, d'où $du = 18t\,dt$. Quand $t = 1$, $u = 13$ et quand $t = 2$, $u = 40$. Donc

$$L = \frac{1}{18}\int_{13}^{40} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}\Big]_{13}^{40}$$
$$= \frac{1}{27}[40^{3/2} - 13^{3/2}] = \frac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}).$$

Si la courbe était donnée par l'équation $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, on pourrait considérer x comme paramètre. Les équations paramétriques seraient alors $x = x$, $y = f(x)$ et la formule (1) s'écrirait

2
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

De même, si la courbe était donnée par l'équation $x = f(y)$, $a \leqslant y \leqslant b$, on regarderait y comme le paramètre et la longueur de l'arc serait donnée par

3
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy.$$

À cause de la racine carrée présente dans les formules 1, 2 et 3, il est souvent difficile, voire impossible, de calculer exactement l'intégrale qui fournit la longueur d'un arc de courbe. On est donc souvent amené à se contenter d'une valeur approximative, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE 2 ■ Estimez la longueur de l'arc de l'hyperbole $xy = 1$ d'extrémités $(1, 1)$, $(2, 1/2)$.

SOLUTION On a

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},$$

et donc, selon la formule 2,

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx.$$

Comme il est impossible de calculer exactement cette intégrale, on fait appel à la Méthode de Simpson (voyez la section 5.8) avec $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ et $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$:

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx \\ &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}3) + \cdots + 2f(1{,}8) + 4f(1{,}9) + f(2)] \\ &\approx 1{,}1321. \end{aligned}$$

La vérification de cette réponse par un logiciel de calcul symbolique qui travaille avec une précision supérieure permet de se rendre compte que les quatre décimales de la réponse fournie par la Méthode de Simpson sont correctes.

EXEMPLE 3 ■ Calculez la longueur de l'arc de parabole $y^2 = x$ compris entre $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

SOLUTION Comme $x = y^2$, on a $dx/dy = 2y$ et la formule 3 conduit à

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy = \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1}\, dy.$$

Que ce soit à l'aide d'un logiciel de calcul formel ou à l'aide de la table des primitives (formule 21 après la substitution $u = 2y$), on arrive au résultat

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}.$$

La figure 6 montre l'arc de parabole dont la longueur est calculée dans l'exemple 3, ainsi que des approximations polygonales de $n = 1$ et $n = 2$ segments respectivement. Dans le cas $n = 1$, la longueur approximative est $\sqrt{2}$, la diagonale du carré de côté 1. La table montre les approximations L_n successives lorsqu'on divise $[0, 1]$ en n sous-intervalles égaux. Chaque fois que le nombre n de segments du polygone double, la valeur de L_n s'approche de la valeur exacte, qui est

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1{,}478943.$$

n	L_n
1	1,414
2	1,445
4	1,464
8	1,472
16	1,476
32	1,478
64	1,479

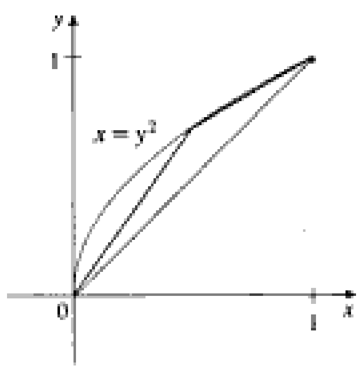


FIGURE 6

EXEMPLE 4 ■ Calculez la longueur d'une arche de la cycloïde $x = r(\theta - \sin\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$.

SOLUTION On sait, en se référant à l'exemple 1 de la section 1.4, que l'arche est décrite lorsque le paramètre parcourt l'intervalle $[0, 2\pi]$. Comme

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\sin\theta,$$

on a

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta)}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta.$$

L'intégrale pourrait être calculée moyennant l'introduction de certaines identités trigonométriques, mais un logiciel de calcul symbolique donne

$$L = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)} d\theta = 8r.$$

Le résultat de l'exemple 4 revient à dire que la longueur de l'arche de la cycloïde vaut 8 fois le rayon du cercle générateur (voyez la figure 7). Ce fut Sir Christofer Wren qui le premier démontra cela en 1658. C'est lui qui plus tard devint l'architecte de la cathédrale St Paul à Londres.

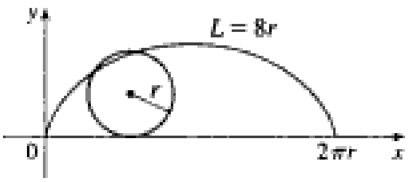


FIGURE 7

6.3 Exercices

1. Calculez la longueur de la courbe $y = 2x + 1, -1 \leqslant x \leqslant 3$ en employant la formule 2. Vérifiez votre réponse en calculant tout simplement par la formule de la distance entre deux points la longueur du segment de droite, puisque vous aurez remarqué que la courbe est en fait une droite.

2. a) Dans l'exemple 2 de la section 1.4, on a montré que les équations paramétriques $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ caractérisaient le cercle unité. Retrouvez la valeur bien connue de la longueur de la circonférence de rayon 1 en employant ces équations paramétriques.
   b) Dans l'exemple 3 de la section 1.4, on a montré que les équations paramétriques $x = \cos 2t, y = \sin 2t, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ caractérisaient aussi le cercle unité. Quelle valeur fournit l'intégrale de la formule 1 avec ces équations ? Comment expliquez-vous la différence ?

3-6 ■ Dessinez l'arc de courbe et calculez exactement sa longueur.

3. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$
4. $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2$
5. $x = y^{3/2},\quad 0 \leqslant y \leqslant 1$
6. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta),$ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

7-9 ■ Employez la Méthode de Simpson avec $n = 10$ pour estimer la longueur de l'arc de courbe.

7. $y = x^3,\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
8. $y = \operatorname{tg} x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$
9. $y = \sin x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

10. Dans l'exercice 31 de la section 1.4, il était demandé d'établir les équations paramétriques $x = 2a\operatorname{cotg}\theta, y = 2a\sin^2\theta$ d'une courbe appelée sorcière de Maria Agnesi. Employez la Méthode de Simpson avec $n = 4$ pour estimer la longueur de l'arc de cette courbe qui correspond à l'intervalle $[\pi/4, \pi/2]$ du paramètre.

11. a) Faites afficher la courbe $y = x\sqrt[3]{4 - x}, 0 \leqslant x \leqslant 4$.
    b) Calculez les longueurs des polygones inscrits formés de $n = 1$, 2, 4 segments. (Divisez l'intervalle en sous-intervalles égaux.) Illustrez en dessinant ces polygones (comme dans la figure 6).
    c) Établissez une intégrale qui soit égale à la longueur de la courbe.
    d) Si votre calculatrice (ou ordinateur) est capable de calculer des intégrales définies, employez-le pour déterminer la longueur de la courbe avec 4 décimales correctes. Sinon, utilisez la Méthode de Simpson. Comparez avec l'approximation de la partie b).

12. Répétez l'exercice 11 pour la courbe
$$y = x + \sin x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

13-15 ■ À l'aide, soit d'un logiciel de calcul symbolique, soit d'une table de primitives, calculez exactement la longueur de l'arc de courbe.

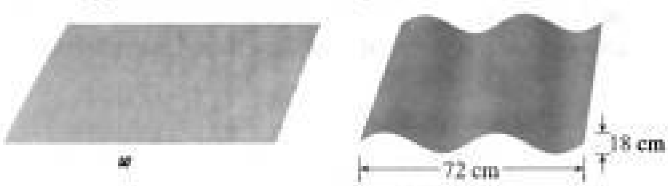
13. $x = t^3,\ y = t^4,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $x = \ln(1 - y^2)$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$

15. $y = \ln(\cos x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

16. À l'aide, soit d'un logiciel de calcul symbolique, soit d'une table de primitives, calculez exactement la longueur de l'arc de l'exponentielle $y = e^x$ compris entre les points $(0, 1)$ et $(1, e)$. Si votre calculatrice éprouve des difficultés pour calculer l'intégrale, faites-y une substitution de manière à la changer en une autre plus facile à traiter par le logiciel.

17. Un fabricant de panneaux de tôle ondulée veut produire des panneaux de 72 cm de largeur et de 18 cm d'épaisseur, à partir de feuilles de tôle plates, comme dans la figure. Le profil du panneau ondulé est celui d'une sinusoïde. Vérifiez que l'équation de la sinusoïde est $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x/18)$. Quelle doit être la largeur w des feuilles de tôle plates pour qu'une fois ondulées, elles mesurent 72 cm ? Employer le logiciel de calcul symbolique de votre ordinateur pour calculer l'intégrale définie, sinon faites appel à la Méthode de Simpson.



18. Calculez la longueur totale de l'astroïde d'équation $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$.

19. Montrez que la longueur totale de l'ellipse $x = a\sin\theta$, $y = b\cos\theta$, $a > b > 0$ est égale à

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,d\theta,$$

où e est l'excentricité de l'ellipse ($e = c/a$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

20. Les courbes d'équations $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$ sont appelées des « **cercles enflés** ». Dessinez les courbes pour $n = 2, 4, 6, 8$ et 10 afin de comprendre pourquoi elles portent ce nom. Établissez l'intégrale qui donne la longueur L_{2k} du cercle enflé où $n = 2k$. Sans essayer de calculer cette intégrale, déterminez la valeur de

$$\lim_{n\to\infty} L_{2k}.$$

LCS 21. a) Tracez l'épitrochoïde d'équations

$$x = 11\cos t - 4\cos(11t/2)$$
$$y = 11\sin t - 4\sin(11t/2)$$

Sur quel intervalle doit varier le paramètre pour avoir la courbe complète ?

b) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour calculer approximativement la longueur de cette courbe.

LCS 22. Une courbe, appelée **spirale de Cornu**, est définie par les équations paramétriques

$$x = C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

$$y = S(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

où C et S sont les fonctions de Fresnel introduites dans la section 5.4.

a) Dessinez cette courbe. Que se passe-t-il lorsque $t \to \infty$ et $t \to -\infty$?

b) Déterminez la longueur d'une spirale de Cornu depuis l'origine jusqu'à un point correspondant à une certaine valeur t du paramètre.

6.4 La valeur moyenne d'une fonction

Il est facile de calculer la valeur moyenne d'un nombre fini de nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n$, même s'ils sont nombreux :

$$y_{\text{moy}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Mais comment calculer la température moyenne d'une journée alors que celle-ci peut être relevée à tout moment, c'est-à-dire une infinité de fois sur la journée ? Le graphique de la figure 1 montre l'évolution d'une fonction température $T(t)$ (où t est mesuré en heures, T en °C) et, en rouge, ce que devrait être à peu près la température moyenne T_{moy}.

Essayons de calculer en général la valeur moyenne d'une fonction $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. D'abord, nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles égaux, chacun de longueur $\Delta x = (b - a)/n$. Ensuite, nous choisissons des points $x_1^*, \ldots, x_n^*$ dans chaque sous-intervalle et calculons la valeur moyenne des nombres $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

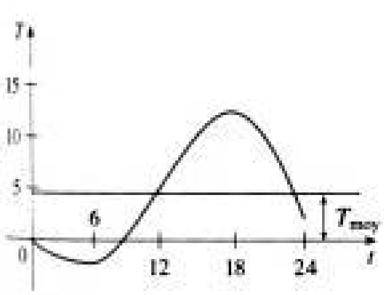


FIGURE 1

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}.$$

(Si, par exemple, f représente une température et si $n = 24$, cela veut dire que la température est relevée une fois par heure et qu'on calcule la moyenne de ces 24 nombres). Comme $\Delta x = (b - a)/n$, nous pouvons écrire $n = (b - a)/\Delta x$ et la valeur moyenne calculée prend la forme

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x.$$

En faisant croître n, nous calculerions la valeur moyenne d'un grand nombre de valeurs peu espacées. (Par exemple, nous calculerions la moyenne des températures relevées toutes les minutes, ou même toutes les secondes.) La valeur limite est

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

suivant la définition de l'intégrale définie.

De là, la définition de la **valeur moyenne d'une fonction** f sur un intervalle $[a, b]$

$$\boxed{f_{\text{moy}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

EXEMPLE 1 ■ Calculez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = 1 + x^2$ sur l'intervalle $[-1, 2]$.

SOLUTION Avec $a = -1$ et $b = 2$, on a

$$f_{\text{moy}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2.$$

Se pose la question de savoir s'il y a un nombre c en lequel la valeur de f est exactement égale à la valeur moyenne de la fonction, c'est-à-dire telle que $f(c) = f_{\text{moy}}$. Le théorème suivant répond affirmativement dans le cas où f est une fonction continue.

Théorème de la valeur moyenne pour intégrales Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe un nombre c dans $[a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

Le Théorème de la valeur moyenne pour intégrales est une conséquence du Théorème des accroissements finis et du Théorème fondamental du calcul intégral. La démonstration est esquissée dans l'énoncé de l'exercice 17.

Le Théorème de la valeur moyenne pour intégrales peut être interprété géométriquement dans le cas des fonctions *positives*. Il affirme en effet l'existence d'un nombre c tel que le rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $f(c)$ a la même aire que celle de la région sous la courbe de f depuis a jusqu'à b (voyez la figure 2 et l'interprétation pittoresque dans la marge).

Vous pouvez toujours raser la crête d'une montagne (en deux dimensions) à une certaine hauteur et employer cette partie-là pour combler le creux de la vallée, après quoi la montagne est remplacée par une plaine.

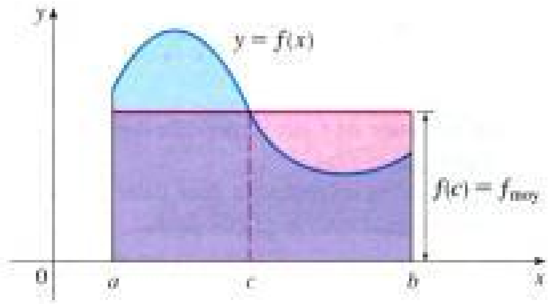


FIGURE 2

EXEMPLE 2 ■ Puisque $f(x) = 1 + x^2$ est continue sur l'intervalle $[-1, 2]$, le Théorème de la valeur moyenne pour intégrales affirme l'existence d'un nombre c dans $[-1, 2]$ tel que

$$\int_{-1}^{2}(1 + x^2)dx = f(c)[2 - (-1)].$$

Dans ce cas particulier, il est possible de trouver la valeur de c. En effet, la valeur moyenne a été calculée à l'exemple 1, elle vaut 2. Il faut donc que c satisfasse à

$$f(c) = f_{\text{moy}} = 2.$$

D'où $1 + c^2 = 2$, et $c^2 = 1$. Il se fait qu'il y a ici deux nombres $c = \pm 1$ dans l'intervalle, qui conviennent au Théorème de la valeur moyenne pour intégrales.

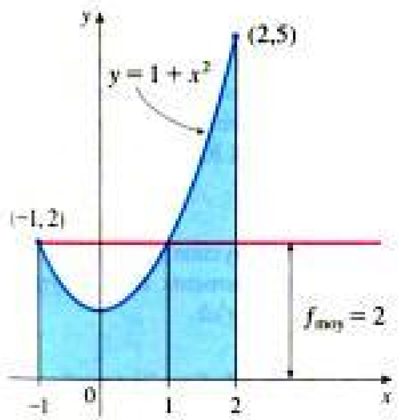


FIGURE 3

Les exemples 1 et 2 sont illustrés par la figure 3.

EXEMPLE 3 ■ Montrez que la vitesse moyenne d'une voiture sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est la même que la moyenne de ses vitesses pendant son trajet.

SOLUTION Si $s(t)$ désigne la position de la voiture à l'instant t, par définition, sa vitesse moyenne est égale au rapport

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

D'autre part, la valeur moyenne de la fonction vitesse sur l'intervalle est

$$\begin{aligned} v_{\text{moy}} &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(Par le Théorème de variation totale)} \\ &= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{vitesse moyenne.} \end{aligned}$$

6.4 Exercices

1-4 ■ Calculez la valeur moyenne de f sur l'intervalle donné.

1. $f(x) = x^2 - 2x$, $[0, 3]$
2. $f(x) = \sin x$, $[0, \pi]$
3. $f(x) = e^x$, $[0, 2]$
4. $f(x) = 1/x$, $[1, 4]$

5-8 ■

a) Calculez la valeur moyenne de f sur l'intervalle donné.
b) Déterminez c tel que $f_{moy} = f(c)$.
c) Tracez le graphique de f et un rectangle dont l'aire est la même que celle de la région sous le graphe de f.

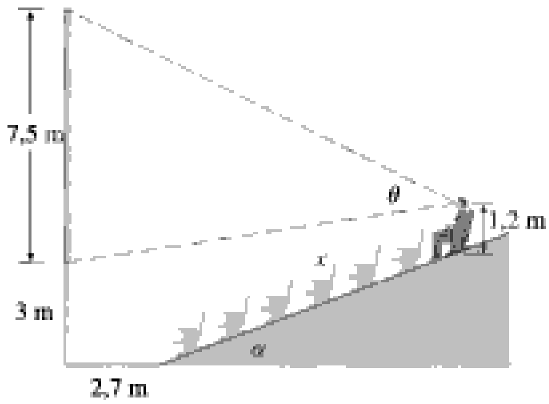
5. $f(x) = 4 - x^2$, $[0, 2]$
6. $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 3]$
7. $f(x) = x^3 - x + 1$, $[0, 2]$
8. $f(x) = x\sin(x^2)$, $[0, \sqrt{\pi}]$

9. Soit f une fonction continue telle que $\int_1^3 f(x)dx = 8$. Démontrez que f prend la valeur 4 au moins une fois sur l'intervalle $[1, 3]$.
10. Déterminez les nombres b tels que la valeur moyenne de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ sur l'intervalle $[0, b]$ soit égale à 3.
11. Dans une ville, la température (en °C) t heures après 9 heures était approximativement donnée par la fonction
$$T(t) = \frac{80}{9} + \frac{70}{9}\sin\frac{\pi t}{12}$$
Quelle est la température moyenne entre 9 heures et 21 heures ?
12. La température d'une tige de métal longue de 5 m vaut $4x$ (en °C) où x est la distance mesurée en mètres depuis une des extrémités de la tige. Quelle est la température moyenne de la tige ?
13. La densité linéique d'une tige de métal de 8 m de longueur vaut $12/\sqrt{x+1}$ kg/m où x est la distance mesurée en mètres depuis une des extrémités de la tige. Quelle est la densité moyenne de la tige ?
14. Lorsqu'un corps au repos est lâché librement, son déplacement en fonction du temps est donné par $s = \frac{1}{2}gt^2$. On désigne par v_T la vitesse atteinte après un temps T. Montrez que la moyenne des vitesses par rapport à t est $v_{moy} = \frac{1}{2}v_T$, alors que la moyenne des vitesses par rapport à s est $v_{moy} = \frac{2}{3}v_T$.
15. Utilisez le résultat de l'exercice 65 dans la section 5.5 pour calculer le volume moyen d'air inhalé par les poumons au cours d'un cycle respiratoire.
16. Le sang qui circule dans un vaisseau sanguin de rayon R et de longueur l à une distance r de l'axe central a la vitesse
$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2),$$
où P désigne la différence de pression entre les extrémités du vaisseau et η est un coefficient de viscosité du sang (voyez l'exemple 7 dans la section 3.3). Déterminez la vitesse moyenne (par rapport à r) sur l'intervalle $0 \leqslant r \leqslant R$. Comparez la vitesse moyenne avec la vitesse maximale.
17. Démontrez le Théorème de la valeur moyenne pour intégrales en appliquant le Théorème des accroissements finis (voyez la section 4.3) à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.
18. Si $f_{moy}[a, b]$ désigne la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ et si $a < c < b$, démontrez que
$$f_{moy}[a, b] = \frac{c-a}{b-a}f_{moy}[a, c] + \frac{b-c}{b-a}f_{moy}[c, b].$$

Projet appliqué

Quelle est la meilleure place au cinéma ?

Dans une salle de cinéma, l'écran, qui mesure 7,5 m de haut, est suspendu à 3 m du sol. La première rangée de sièges se trouve à 2,70 m de l'écran et les rangées se suivent à 1 m l'une de l'autre. La zone occupée par les sièges est un plan incliné qui fait un angle de 20° avec l'horizontale et x désigne la distance le long du plan incliné à laquelle se trouve la rangée que vous occupez. Comme il y a 21 rangées de fauteuils, $0 \leqslant x \leqslant 20$. La meilleure place est celle qui ménage à vos yeux le plus grand angle de vue de l'écran. Appelons cet angle θ. On suppose aussi que, là où vous êtes assis, vos yeux sont à 1,2 m du sol. (On a déjà envisagé ce problème à l'exercice 32 de la section 4.6, dans une version plus simple puisque le sol était horizontal. Ce projet-ci envisage une situation plus réelle et requiert des outils de calcul.)



1. Montrez que

$$\theta = \text{Arccos}\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

où

$$a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x\sin\alpha)^2$$

et

$$b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x\sin\alpha - 6)^2.$$

2. Utilisez un graphe de θ comme fonction de x pour estimer la valeur de x qui maximise θ. Sur quelle rangée allez-vous vous asseoir ? Quel est l'angle de vue depuis cette rangée ?
3. Faites appel à votre logiciel de calcul symbolique pour dériver θ par rapport à x et déterminer une racine de l'équation $d\theta/dx = 0$. Cette racine confirme-t-elle votre résultat du point 2 ?
4. Sur le graphe de θ, situer la valeur moyenne de θ lorsque x varie entre 0 et 20. Faites calculer cette valeur moyenne par votre le logiciel de calcul symbolique. Comparez avec le maximum et le minimum de θ.

6.5 Applications en physique et en sciences appliquées

Dès que vous pouvez calculer un travail, vous pouvez aussi calculer la vitesse que doit atteindre une fusée pour échapper à l'attraction terrestre (voyez l'exercice 18).

Parmi les nombreuses applications du calcul intégral en physique et en sciences appliquées, nous en avons choisi trois : le travail, la force exercée par l'eau sur une paroi et les centres de masse. De même que pour les applications de type géométrique (aires, volumes et longueurs) qui ont précédé, la stratégie est de diviser la grandeur physique en un grand nombre de petits morceaux, de calculer approximativement chaque petit morceau, d'additionner les résultats, de passer à la limite et de calculer enfin l'intégrale qui en résulte.

Le travail

On emploie le mot *travail* dans le langage de tous les jours à propos de la quantité d'efforts qu'il faut fournir pour accomplir une tâche. En physique ce mot revêt une signification technique qui dépend de l'idée de *force*. Intuitivement, nous pensons qu'une force est liée à la poussée ou à la traction d'un objet—par exemple, la poussée horizontale d'un livre sur une table ou la poussée exercée sur une balle vers le bas par la gravité. De façon générale, si $s(t)$ désigne la position d'un objet se déplaçant en ligne droite, la force F appliquée à l'objet (dans la même direction) est définie par la deuxième loi de Newton sur le mouvement comme le produit de sa *masse* par son *accélération* :

1 $$F = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Dans le système international (SI), la masse est mesurée en kilogrammes (kg), le déplacement en mètres (m), le temps en secondes (s) et la force en newtons (N=kg·m/s^2). Donc, une force de 1 N qui agit sur une masse de 1 kg produit une accélération de 1 m/s^2.

Au cas où l'accélération est constante, la force F est aussi constante et le travail effectué est défini comme le produit de la force F par la distance d que l'objet a parcouru :

2 $$W = Fd \qquad \text{travail} = \text{force} \times \text{distance}$$

Comme F est mesurée en newtons et d en mètres, l'unité de travail est le newton-mètre, appelé encore le joule (J).

Si par exemple on soulève du sol un livre d'une masse de 1,2 kg pour le poser sur une table de 0,7 m de haut, la force exercée est égale et opposée à celle qu'exerce la gravité. L'équation 1 donne

$$F = mg = (1{,}2)(9{,}8) = 11{,}76 \text{ N},$$

et de là, par l'équation 2, le travail effectué est de

$$W = Fd = (11{,}76)(0{,}7) \approx 8{,}2 \text{ J}.$$

Mais si le poids d'un objet est de 20 N et qu'il est soulevé à 6 m du sol, alors la force appliquée est $F = 20$ N et le travail effectué égal à

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ J}.$$

Ici, il n'est pas nécessaire de multiplier par g puisque c'est déjà le poids (la force) qui est donné et non la masse.

L'équation 2 ne définit le travail que dans une situation où la force est constante. Que se passe-t-il si au contraire la force est variable ? On suppose que l'objet se déplace le long de l'axe Ox dans le sens positif, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$ et qu'en chaque point entre a et b, c'est une force $f(x)$ qui est appliquée à l'objet, f étant supposée continue. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur commune Δx par les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On choisit arbitrairement un point x_i^* dans le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. La force appliquée en ce point vaut $f(x_i^*)$. Si n est grand, Δx est petit et, à cause de la continuité, les valeurs de f ne changent pas beaucoup sur $[x_{i-1}, x_i]$. Autrement dit, la force appliquée tout au long du sous-intervalle est quasi constante et le travail W_i qui déplace l'objet de x_{i-1} à x_i est approximativement, selon l'équation 2, égal à :

$$W_i \approx f(x_i^*)\Delta x.$$

Le travail total est alors à peu près de

$$\textbf{3} \qquad W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Cette valeur approchée s'améliore très probablement à mesure que n grandit. Par conséquent, on définit le travail effectué pour déplacer l'objet de a jusqu'à b comme la limite de cette somme lorsque $n \to \infty$. Vu que le membre de droite de (3) est une somme de Riemann, cette limite conduit à une intégrale définie, à savoir

$$\boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$$

EXEMPLE 1 ■ Une force de $x^2 + 2x$ N est appliquée à un objet, lorsqu'il se trouve à x m de l'origine. Quel est le travail effectué si l'objet est déplacé de $x = 1$ à $x = 3$?

SOLUTION

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2\Big]_1^3 = \frac{50}{3}.$$

Le travail effectué est donc de $16\frac{2}{3}$ J. □

FIGURE 1
Loi de Hooke

Dans l'exemple suivant intervient une loi de la physique, la **loi de Hooke**, qui établit que la force requise pour maintenir un ressort étiré de x unités au-delà de sa longueur naturelle est proportionnelle à x :

$$f(x) = kx,$$

où k est une constante positive (appelée la **constante du ressort**). La loi de Hooke suppose que x n'est pas trop grand (voyez la figure 1).

EXEMPLE 2 ■ Un ressort a une longueur naturelle de 10 cm. Lorsqu'il est soumis à une effort de traction de 40 N, il passe de 10 à 15 cm. Calculez le travail qu'il faut développer pour étirer ce ressort de 15 à 18 cm.

SOLUTION Selon la loi de Hooke, la force nécessaire pour maintenir le ressort étiré de x m au-delà de sa longueur naturelle est de $f(x) = kx$. Quand le ressort est étiré de 10 à 15 cm, son allongement est de 5 cm = 0,05 m. Ce qui signifie que $f(0{,}05) = 0{,}05k = 40$ ou

$$k = \frac{40}{0{,}05} = 800.$$

Sachant que $f(x) = 800x$, le travail nécessaire pour étirer ce ressort de 15 à 18 cm est donné par l'intégrale

$$\begin{aligned} W &= \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0.05}^{0.08} \\ &= 400[(0{,}08)^2 - (0{,}05)^2] = 1{,}56 \text{ J}. \end{aligned}$$ □

EXEMPLE 3 ■ Un réservoir a la forme d'un cône renversé de 10 m de hauteur et de 4 m de rayon. Il est rempli d'eau jusqu'à une hauteur de 8 m. Calculez le travail nécessaire pour vider le réservoir en pompant toute l'eau par dessus bord (la densité de l'eau est 1000 kg/m³).

SOLUTION On choisit de mesurer la profondeur à partir de la partie supérieure du réservoir en introduisant un axe de coordonnées vertical, comme dans la figure 2. L'eau est donc présente entre les niveaux 2 et 10. On découpe l'intervalle $[2, 10]$ en n sous-intervalles par les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et on choisit arbitrairement un point x_i^* dans le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle. Ces intervalles découpent le volume d'eau en n portions. La $i^{\text{ème}}$ portion a presque la forme d'un cylindre de rayon r_i et de hauteur Δx. Le rayon r_i peut être calculé à partir des triangles semblables de la figure 3 comme suit :

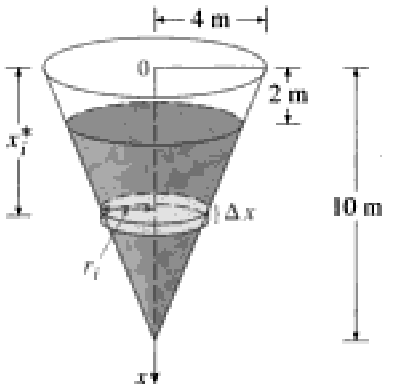


FIGURE 2

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \frac{2}{5}(10 - x_i^*).$$

Le volume d'eau de cette $i^{\text{ème}}$ portion est approximativement égal à

$$V_i \approx \pi r_i^2 \Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta x,$$

et sa masse, égale à

$$\begin{aligned} m_i &= \text{densité} \times \text{volume} \\ &\approx 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta x. \end{aligned}$$

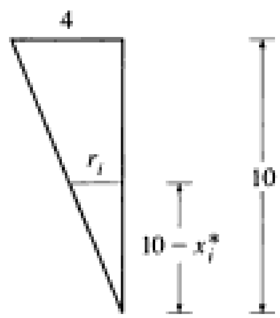


FIGURE 3

La force requise pour monter cette portion d'eau doit contrecarrer la force de la pesanteur

$$\begin{aligned} F_i &= m_i g \approx (9{,}8)160\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta x \\ &\approx 1570\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta x. \end{aligned}$$

Comme chaque particule de cette portion doit parcourir une distance approximative x_i^*, le travail W_i nécessaire à remonter cette portion à la surface du réservoir est égal au produit de la force F_i par la distance x_i^* :

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \Delta x.$$

Pour déterminer le travail total à effectuer pour vider le réservoir, il faut additionner les contributions de chacune des n portions et prendre ensuite la limite pour $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \Delta x \\ &= \int_2^{10} 1570\pi x(10 - x)^2 \, dx \\ &= 1570\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3) \, dx \\ &= 1570\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10} \\ &= 1570\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3{,}4 \times 10^6 \text{ J}. \end{aligned}$$

Pression hydrostatique et force

Ceux qui pratiquent la plongée sous-marine peuvent témoigner que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. C'est le poids de l'eau au-dessus d'eux qui augmente. De façon générale, on envisage une fine plaque horizontale de A mètres carrés immergée dans un liquide de densité ρ kg/m^3 à d m sous la surface, comme dans la figure 4. Le volume de liquide situé au-dessus de la plaque est égal à Ad et sa masse est $m = \rho V = \rho A d$. La force exercée par ce liquide sur la plaque est donc

$$F = mg = \rho g A d,$$

où g est l'accélération due à la pesanteur. La pression P sur la plaque est définie comme la force par unité de surface :

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d.$$

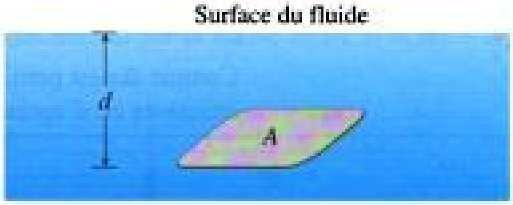


FIGURE 4

L'unité SI de pression est le newton par mètre carré, appelé aussi le pascal (en abrégé: 1 N/m^2=1 Pa). Comme cette unité est petite, elle est souvent remplacée par le kilopascal (kPa). Par exemple, la densité de l'eau étant $\rho = 1000$ kg/m^3, la pression au fond d'une piscine de 2 m de profondeur est

$$\begin{aligned} P = \rho g d &= 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} \\ &= 19\,600 \text{ Pa} = 19{,}6 \text{ kPa}. \end{aligned}$$

On vérifie expérimentalement l'important principe relatif à la pression des fluides qu'*en tout point d'un liquide la pression est la même dans toutes les directions*. (Un plongeur sent la même pression sur le nez et sur les deux oreilles.) Ainsi, dans n'importe quelle direction, la pression à une profondeur d d'un fluide de densité ρ est donnée par

4 $$P = \rho g d.$$

Cette pression intervient dans le calcul de la force hydrostatique contre une plaque *verticale* ou un mur ou une digue immergée dans un fluide. Ce problème n'est pas simple car la pression n'est pas constante, elle augmente avec la profondeur.

EXEMPLE 4 ■ La digue d'un barrage a la forme d'un trapèze comme celui de la figure 5. Elle mesure 20 m de hauteur, 50 m de largeur dans sa partie supérieure et 30 m dans sa partie inférieure. Calculez la force exercée sur la digue due à la pression hydrostatique si l'eau arrive à 4 m du sommet de la digue.

FIGURE 5

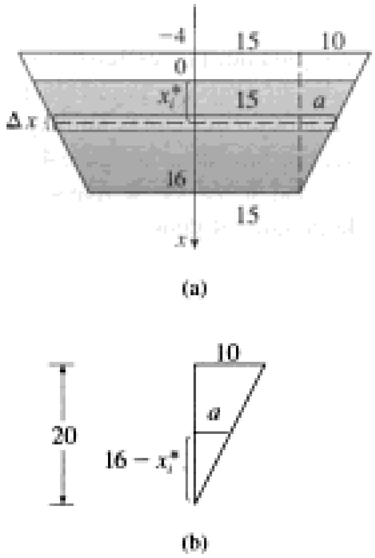


FIGURE 6

SOLUTION On choisit un axe Ox vertical, dirigé vers le bas, dont l'origine O coïncide avec le niveau de la surface de l'eau, comme dans la figure 6. La profondeur de l'eau est de 16 m. On divise l'intervalle $[0, 16]$ en sous-intervalles par des points x_i et on choisit $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La $i^{\text{ème}}$ tranche horizontale de la digue est considérée comme un rectangle de hauteur Δx et de largeur w_i qui dépend de x_i^* selon une expression que l'on peut calculer en exploitant les triangles semblables de la figure 6 (b) :

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2},$$

de sorte que

$$w_i = 2(15 + a) = 2\left(15 + 8 - \frac{x_i^*}{2}\right) = 46 - x_i^*.$$

L'aire A_i de cette $i^{\text{ème}}$ tranche vaut donc

$$A_i \approx w_i \Delta x = (46 - x_i^*)\Delta x.$$

Comme Δx est petit, la pression P_i sur cette $i^{\text{ème}}$ tranche peut être considérée comme constante et, d'après l'équation 4, est égale à

$$P_i \approx 1000 g x_i^*.$$

La force hydrostatique F_i qui s'exerce sur la $i^{\text{ème}}$ tranche est le produit de la pression par la surface :

$$F_i = P_i A_i \approx 1000 g x_i^* (46 - x_i^*)\Delta x.$$

En additionnant ces forces pour chaque tranche et en passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient la force hydrostatique totale exercée sur la digue :

$$\begin{aligned} F &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1000 g x_i^* (46 - x_i^*)\,\Delta x \\ &= \int_0^{16} 1000 g x (46 - x)\,dx \\ &= 1000(9{,}8) \int_0^{16} (46x - x^2)\,dx \\ &= 9800 \left[23x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{16} \\ &\approx 4{,}43 \times 10^7 \text{ N}. \end{aligned}$$

Moments et centres de masse

Notre objectif est de réussir à situer le point P sur lequel il faut appuyer une fine plaque de n'importe quelle forme pour qu'elle tienne en équilibre (voyez la figure 7). Ce point est appelé le **centre de masse** (ou centre de gravité) de la plaque.

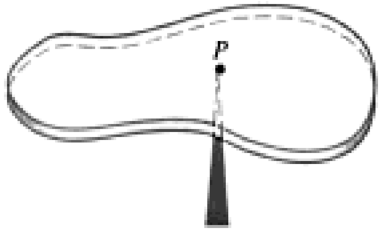


FIGURE 7

On considère d'abord le cas le plus simple, illustré dans la figure 8, de deux masses m_1 et m_2 fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable de part et d'autre d'un pivot et à des distances d_1 et d_2 du pivot. La tige est en équilibre lorsque

5 $$m_1 d_1 = m_2 d_2.$$

Ce résultat, appelé la Loi du levier, fut découverte expérimentalement par Archimède. (Pensez à une personne qui réussit à en soulever une autre, plus lourde qu'elle, sur un jeu de bascule en s'asseyant suffisamment loin du point d'appui.)

On place la tige le long de l'axe Ox, avec m_1 en x_1, m_2 en x_2 et le centre de masse en $\bar{x}$. En comparant les figures 8 et 9, on voit que $d_1 = \bar{x} - x_1$ et $d_2 = x_2 - \bar{x}$ et l'équation 5 s'écrit

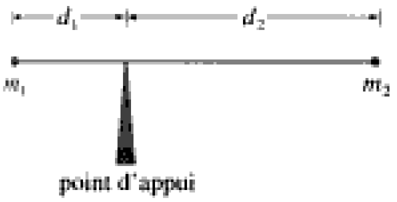


FIGURE 8

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2$$

6
$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

Les nombres m_1x_1 et m_2x_2 sont appelés les **moments** des masses m_1 et m_2 (par rapport à l'origine), et l'équation 6 énonce que le centre de masse $\bar{x}$ s'obtient en divisant la somme des moments des masses par la masse totale $m = m_1 + m_2$.

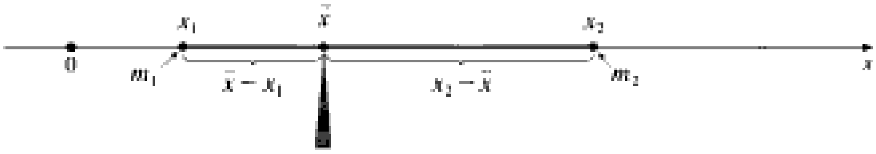


FIGURE 9

De façon plus générale, en présence d'un système de n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ situées aux abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut montrer de façon analogue que le centre de masse du système est situé en

7
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{m},$$

où $m = \sum m_i$ est la masse totale du système. La somme des moments individuels

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i$$

est appelée le moment du système par rapport à l'origine. Dans ces notations, l'équation 7 devient $m\bar{x} = M$ et dit que si la masse totale était concentrée au centre de masse $\bar{x}$, son moment serait le même que le moment du système.

On envisage maintenant un système de n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ dispersés aux points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ du plan Oxy (voyez la figure 10). Par analogie avec le cas unidimensionnel, on définit le **moment du système par rapport à Oy** par

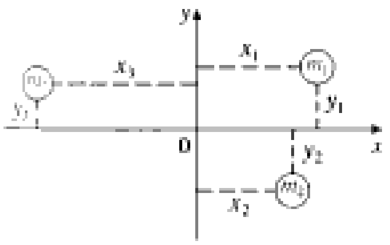


FIGURE 10

8
$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_ix_i,$$

et le **moment du système par rapport à Ox** par

9
$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_iy_i.$$

Alors, M_y mesure la tendance du système à tourner autour de l'axe Oy et M_x mesure la tendance à tourner autour de l'axe Ox.

Comme dans le cas unidimensionnel, les coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$ du centre de masse sont exprimées en termes de moments par les formules

10
$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

où $m = \sum m_i$ est la masse totale. Comme $m\bar{x} = M_y$ et $m\bar{y} = M_x$, le centre de masse $(\bar{x}, \bar{y})$ est le point en lequel une seule masse m aurait les mêmes moments que tout le système.

EXEMPLE 5 ■ Déterminez les moments et le centre de masse d'un système de trois points de masses respectives 3, 4 et 8 localisés en $(-1, 1)$, $(2, -1)$ et $(3, 2)$.

SOLUTION Les équations 8 et 9 donnent les moments :

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29.$$
$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15.$$

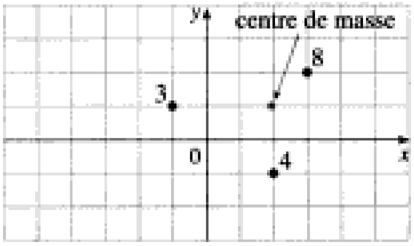


FIGURE 11

Or, $m = 3 + 4 + 8 = 15$. D'où, par les équations 10, les coordonnées du centre de masse sont

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1.$$

Ainsi, le centre de masse se trouve au point $(1\frac{14}{15}, 1)$ (voyez la figure 11).

On considère ensuite une fine plaque (ou feuille) de densité uniforme ρ qui occupe une région $\mathcal{R}$ du plan. On voudrait situer le centre de masse de cette plaque. Pour cela, on fait appel au **principe de symétrie** : si $\mathcal{R}$ est symétrique par rapport à une droite d, alors le centre de masse de $\mathcal{R}$ s'y trouve. (L'image de $\mathcal{R}$ par une symétre d'axe d, laisse $\mathcal{R}$ inchangée et donc son centre de masse fixe. Seuls les points fixes appartiennent à d.) Le centre de masse d'un rectangle est son centre géométrique. Les moments pourraient être définis comme ceci : si la masse entière d'une région était concentrée au centre de masse, ses moments seraient inchangés. De plus, le moment de deux régions qui ne se chevauchent pas est la somme des moments de chaque région prise séparément.

On suppose que la région $\mathcal{R}$ est celle de la figure 12(a) ; c'est-à-dire que $\mathcal{R}$ est comprise entre les droites $x = a$ et $x = b$, au-dessus de l'axe Ox et sous le graphique de

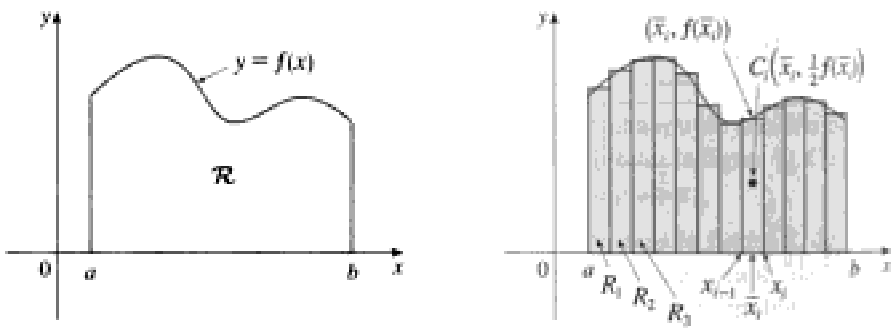


FIGURE 12 (a) (b)

la fonction f, supposée continue. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur commune Δx par les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Pour chaque i, on choisit le point x_i^* au milieu du $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Donc, $x_i^* = \bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Ce choix détermine un polygone de rectangles qui approxime $\mathcal{R}$ [voyez la figure 12(b)]. Le $i^{\text{ème}}$ rectangle d'approximation R_i a comme centre de masse son centre géométrique, de coordonnées $C_i(\bar{x}_i, \frac{1}{2}f(\bar{x}_i))$. Son aire est égale à $f(\bar{x}_i)\Delta x$ et sa masse à

$$\rho f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

Comme le moment M_y de R_i par rapport à l'axe Oy est le produit de sa masse par la distance entre C_i et l'axe Oy, qui vaut $\bar{x}_i$, on a

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x]\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x.$$

En additionnant ces moments, on obtient le moment du polygone de rectangles qui approxime $\mathcal{R}$, puis, en prenant la limite pour $n \to \infty$, le moment de $\mathcal{R}$ elle-même :

$$\boxed{M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx}$$

De façon analogue, on calcule le moment de R_i par rapport à l'axe Ox comme le produit de sa masse par la distance entre C_i et l'axe Ox :

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\Delta x]\,\frac{1}{2}f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\Delta x.$$

À nouveau, on additionne ces moments, puis on en prend la limite pour obtenir le moment de $\mathcal{R}$ par rapport à l'axe Ox :

$$\boxed{M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\Delta x = \rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

Tout comme pour des systèmes de particules, le centre de masse de la plaque est défini de manière à ce que $m\bar{x} = M_y$ et $m\bar{y} = M_x$. Or, la masse de la plaque est le produit de sa densité par son aire :

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx.$$

D'où

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x)\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

La simplification des ρ démontre l'indépendance de la localisation du centre de masse vis-à-vis de la densité.

En résumé, le centre de masse de la plaque est situé au point $(\bar{x}, \bar{y})$, où

11
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x f(x)\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

EXEMPLE 6 ■ Situez le centre de masse d'une plaque semi-circulaire de rayon r.

SOLUTION Afin de se mettre dans la situation de la formule 11, on place le demi-cercle de façon à ce que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $a = -r$, $b = r$. Dans ce cas-ci, il n'est pas nécessaire de calculer $\bar{x}$ parce que, à cause du principe de symétrie, le centre de masse se trouve forcément sur l'axe Oy. Donc $\bar{x} = 0$. Sachant que $A = \pi r^2/2$, on a

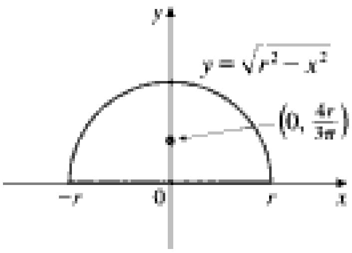


FIGURE 13

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx \\
&= \frac{1}{\pi r^2/2} \cdot \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2}\,)^2\,dx \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Le centre de masse est situé au point $(0, 4r/(3\pi))$.

6.5 Exercices

1. Une masse ponctuelle se meut le long de l'axe Ox sous la pression d'une force dont l'intensité est $5x^2 + 1$ N en un point situé à x m de l'origine. Quel est le travail effectué lors du déplacement de cette masse ponctuelle de l'origine à 10 m ?

2. Une force de $\cos(\pi x/3)$ N est appliquée à un point matériel situé à x m de l'origine. Quel est le travail correspondant au déplacement de cette particule de $x = 1$ à $x = 2$? Interprétez votre réponse en décomposant le travail effectué de $x = 1$ à $x = 1{,}5$ et de $x = 1{,}5$ à $x = 2$.

3. Il faut une force de 10 N pour tenir un ressort étiré de 10 cm au-delà de sa longueur naturelle. Quel est le travail nécessaire pour l'étirer de 15 cm par rapport à sa longueur naturelle ?

4. La longueur naturelle d'un ressort est de 20 cm. S'il faut appliquer une force de 25 N pour le tenir à 30 cm, combien de travail faut-il pour qu'il passe de 20 à 25 cm ?

5. On suppose qu'il faut 2 J de travail pour étirer un ressort de sa longueur naturelle de 30 cm à 42 cm de longueur.
   a) Combien de travail faut-il pour l'étirer de 35 à 40 cm ?
   b) Jusqu'à quelle longueur une force de 30 N est-elle capable de maintenir le ressort étiré ?

6. Si un travail de 6 J est requis pour porter un ressort de 10 à 12 cm et un travail supplémentaire de 10 J pour le porter de 12 cm à 14 cm, quelle est la longueur naturelle du ressort ?

7-12 ■ Écrivez une expression approximative du travail décrit en forme de somme de Riemann. Exprimez ensuite le travail sous la forme d'une intégrale et calculez-le.

7. Une lourde corde, longue de 50 m, pèse 0,5 N/m et pend le long d'un bâtiment de 60 m de haut. Quel est le travail nécessaire à tirer la corde jusqu'au sommet du bâtiment ?

8. Un câble uniforme pend au bord d'un haut building. Il fait 40 m de long et pèse 60 N. Quel est le travail nécessaire pour tirer 10 m de câble en haut du building ?

9. Un câble qui pèse 2 N/m sert à remonter 800 N de charbon du fond d'un puits, 150 m plus bas. Calculez le travail effectué.

10. Un seau de 18 N attaché à une corde de poids négligeable sert à puiser de l'eau dans un puits de 25 m de profondeur. À son départ, le seau est rempli de 180 N d'eau et monte à la vitesse de 60 cm/s, mais de l'eau s'en échappe par un trou à raison de 0,9 N/s. Déterminez le travail effectué pour remonter un seau à la surface.

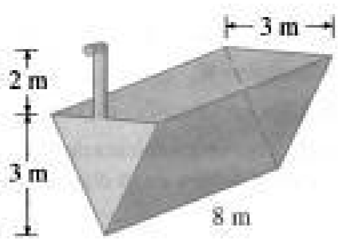
11. Un aquarium de 2 m de longueur, 1 m de largeur et 1 m de profondeur est rempli d'eau. Quel travail faut-il effectuer pour pomper la moitié de l'eau hors de l'aquarium ? (Utilisez le fait que la densité de l'eau est 1000 kg/m^3.)

12. Une piscine circulaire mesure 8 m de diamètre, 1,5 m de hauteur et contient de l'eau sur une profondeur de 1,2 m. Calculez le travail à effectuer pour vider la piscine en passant par-dessus du bord.

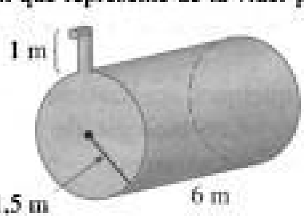
13. Le réservoir que vous voyez est rempli d'eau.

a) Déterminez le travail qu'il faut pour pomper l'eau par la sortie.

b) La pompe tombe en panne après avoir effectué $4{,}7 \times 10^5$ J de travail. Quelle est la hauteur de l'eau qui reste dans le réservoir ?

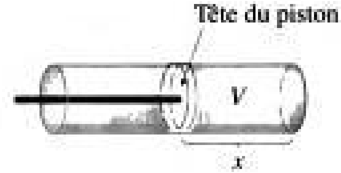


14. La citerne est remplie de mazout dont la densité est 920 kg/m^3. Calculez le travail que représente de la vider par l'embout.



15. Lorsqu'un gaz se dilate dans un cylindre de rayon r, la pression est à tout moment une fonction du volume : $P = P(V)$. La force qu'exerce le gaz sur le piston (voyez la figure) est le produit de la pression par la surface : $F = \pi r^2 P$. Montrez que le travail fait par le gaz lorsque le volume passe de V_1 à V_2 est

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P dV.$$



16. Dans un moteur à vapeur, la pression P et le volume V de la vapeur satisfont à l'équation $PV^{1,4} = k$, où k est une constante. (Ceci n'est vrai que lors d'une transformation adiabatique, c'est-à-dire une transformation où il n'y a pas d'échange de chaleur entre le cylindre et ce qui l'entoure.) Utilisez l'exercice 15 pour calculer le travail effectué par le moteur pendant un cycle si, au départ, la vapeur a une pression de 1200 kPa et un volume de 1,5 dm^3 et passe à un volume de 12 dm^3.

17 a) La loi de gravitation universelle de Newton énonce que deux corps de masses m_1 et m_2 s'attirent l'un l'autre avec une force

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

où r est la distance entre les corps et G la constante de gravitation. Si l'un des corps est fixé, déterminez le travail nécessaire à faire aller l'autre corps de $r = a$ jusqu'à $r = b$.

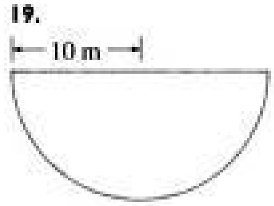
b) Calculez le travail requis pour envoyer un satellite de 1000 kg verticalement sur une orbite située à 1000 km. Vous pouvez supposer que la masse de la Terre est de $5{,}98 \times 10^{24}$ kg et est concentrée en son centre. Prenez le rayon de la Terre égal à $6{,}37 \times 10^6$ m et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N-m/kg^2.

18. a) Grâce à une intégrale impropre et à l'information issue de l'exercice 17, déterminez le travail nécessaire à propulser un satellite d'une masse de 1000 kg hors du champ gravitationnel de la Terre.

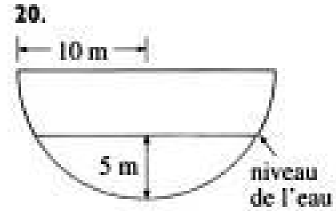
b) Déterminez la *vitesse de fuite* v_0 que doit avoir une fusée de masse m pour sortir du champ gravitationnel d'une planète de masse M et de rayon R. (Utilisez le fait que l'énergie cinétique initiale de $\frac{1}{2}mv_0^2$ fournit le travail nécessaire.)

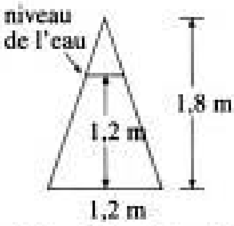
19-22 ■ La paroi d'une citerne contenant de l'eau est verticale et présente la forme indiquée. Expliquez comment approcher la force hydrostatique qui s'exerce contre cette paroi par une somme de Riemann. Exprimez ensuite la force comme une intégrale et calculez-la.

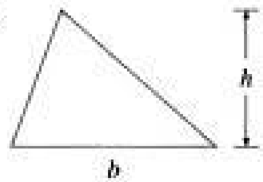
19.



20.

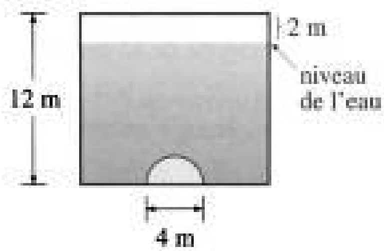


21. 

22. 

23. Une piscine mesure 6 m de large et 12 m de long. Le fond est un plan incliné, la petite profondeur est de 1 m et la grande, de 3 m. Si la piscine est complètement remplie d'eau, quelle est la force hydrostatique a) sur le haut fond, b) sur le bas fond, c) sur une des parois et d) sur le fond de la piscine.

24. Une digue verticale est percée d'une porte semi-circulaire comme le montre la figure. Déterminez la force hydrostatique qui s'exerce contre la porte.



25-26 ■ Les masses m_i sont localisées aux points P_i. Déterminez les moments M_x et M_y et le centre de masse du système.

25. $m_1 = 4,\ m_2 = 8;\quad P_1(-1, 2),\ P_2(2, 4)$

26. $m_1 = 3,\ m_2 = 3,\ m_3 = 8,\ m_4 = 6;$
$P_1(0, 0),\ P_2(1, 8),\ P_3(3, -4),\ P_4(-6, -5)$

27-30 ■ Situez le centre de masse de la région délimitée par les courbes données. Dessinez la région et indiquez-y le centre de masse pour voir si votre réponse est acceptable.

27. $y = e^x,\quad y = 0,\quad x = 0,\quad x = 1$

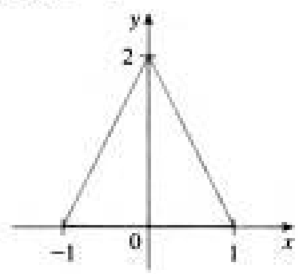
28. $y = 1 - x^2,\quad y = 0$

29. $y = \cos 2x,\quad y = 0,\quad x = -\pi/4,\quad x = \pi/4$

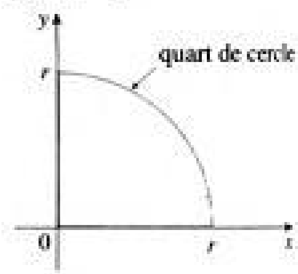
30. $y = \sqrt{x},\quad y = 0,\quad x = 4$

31-32 ■ Calculez les moments M_x et M_y et le centre de masse d'une plaque dont la densité est donnée et la forme, dessinée.

31. $\rho = 1$



32. $\rho = 2$



33. a) Soit $\mathcal{R}$ la région comprise entre les deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$, où $f(x) \geqslant g(x)$ et $a \leqslant x \leqslant b$. En utilisant le même type de raisonnement que celui qui a conduit à la formule 11, montrez que le centre de masse de $\mathcal{R}$ est $(\bar{x}, \bar{y})$, où

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

b) Déterminez le centre de masse de la région comprise entre la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$.

34. Soit $\mathcal{R}$ la région comprise entre les courbes $y = x^m$ et $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, où m et n sont des entiers tels que $0 \leqslant n < m$.

a) Tracez la région $\mathcal{R}$.

b) Cherchez les coordonnées du centre de masse de $\mathcal{R}$.

c) Essayez de trouver des valeurs de m et n telles que le centre de masse soit *en dehors* de la région $\mathcal{R}$.

6.6 Applications en économie et en biologie

Dans cette section il sera question de quelques applications du calcul intégral en économie (le surplus du consommateur) et en biologie (le flux sanguin, le débit cardiaque). Il y en a d'autres encore dans les exercices.

■ Le surplus du consommateur

Rappelez-vous (section 4.7) que la fonction de demande inverse $p(x)$ exprime le prix en fonction de la quantité consommée x d'un bien. Comme habituellement, pour vendre plus, il faut abaisser le prix, la fonction de demande est décroissante. La figure 1 montre

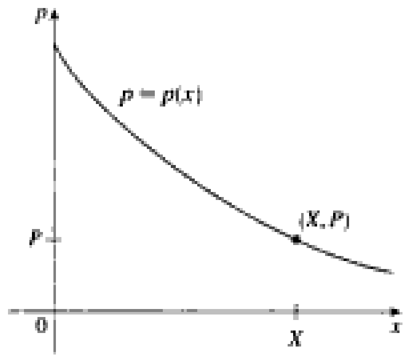


FIGURE 1
Un exemple de fonction de demande inverse

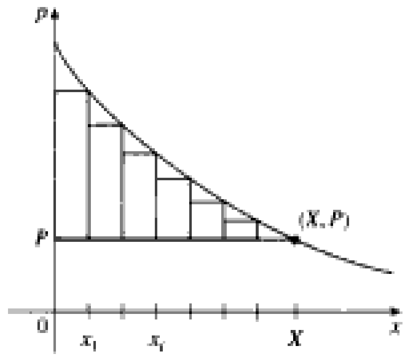


FIGURE 2

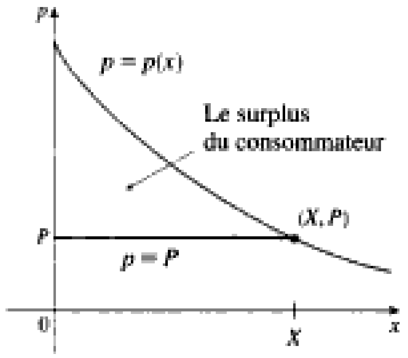


FIGURE 3

le graphe d'une fonction de demande inverse représentative, appelée **courbe de demande.** Si X est la quantité d'un bien actuellement disponible, alors $P = p(X)$ en est le prix de vente du moment.

On divise l'intervalle $[0, X]$ en n sous-intervalles, de longueur commune $\Delta x = X/n$ et soit $x_i^* = x_i$ l'extrémité droite du $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle (voyez la figure 2). Une fois vendues les x_{i-1} premières unités sur un total de x_i unités disponibles dont le prix unitaire a été fixé à $p(x_i)$ euros, il y en a Δx à vendre. Les consommateurs qui ont payé $p(x_i)$ euros avaient placé une haute valeur sur le produit ; ils étaient prêts à payer le prix qu'ils avaient estimé. En ne payant que P euros, ils ont donc épargné

$$(\text{économie par unités})(\text{nombre d'unités}) = [p(x_i) - P]\Delta x.$$

Compte tenu de groupes semblables de consommateurs décidés pour chaque sous-intervalle et du cumul de ces épargnes, on arrive à une épargne totale de

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\Delta x.$$

Lorsque $n \to \infty$, cette somme de Riemann s'approche de l'intégrale

1 $$\int_0^X [p(x) - P]dx$$

que les économistes appellent le **surplus du consommateur** relatif à un bien. Le surplus du consommateur représente le montant épargné par des consommateurs acheteurs du bien au prix P, qui correspond à la quantité demandée X. La figure 3 montre l'interprétation du surplus du consommateur comme une aire sous la courbe de demande inverse et au-dessus de la droite $p = P$.

EXEMPLE 1 ■ Voici la fonction de demande inverse d'un produit en euros :

$$p = 1200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2.$$

Calculez le surplus du consommateur quand le niveau de vente est à 500.

SOLUTION Puisque le nombre d'unités vendues est $X = 500$, le prix correspondant est

$$P = 1200 - (0{,}2)(500) - (0{,}0001)(500)^2 = 1075.$$

Par conséquent, conformément à la définition 1, le surplus du consommateur est donné par

$$\int_0^{500} [\, p(x) - P\,]\, dx = \int_0^{500} (1200 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2 - 1075)\, dx$$

$$= \int_0^{500} (125 - 0{,}2x - 0{,}0001x^2)\, dx$$

$$= 125x - 0{,}1x^2 - (0{,}0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500}$$

$$= (125)(500) - (0{,}1)(500)^2 - \frac{(0{,}0001)(500)^3}{3}$$

$$= 33\,333{,}33 \text{ euros.}$$

■ La circulation sanguine

Dans l'exemple 7 de la section 3.3, nous avons étudié la loi de l'écoulement laminaire :

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2).$$

Elle exprime la vitesse v du sang qui s'écoule dans un vaisseau sanguin de rayon R et de longueur l à une distance r de l'axe central ; P est la différence de pression entre les extrémités du vaisseau et η est le coefficient de viscosité du sang. En vue de calculer le débit (volume par unité de temps), on considère des plus petits rayons également répartis $r_1, r_2, \ldots$ L'anneau de rayon intérieur r_{i-1} et de rayon extérieur r_i développe une surface d'environ

$$2\pi r_i \Delta r \qquad \text{où} \qquad \Delta r = r_i - r_{i-1},$$

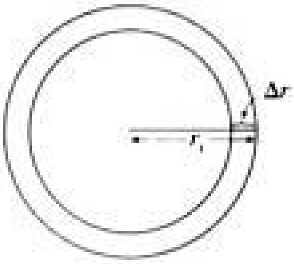


FIGURE 4

(voyez la figure 4). Si Δr est petit, on peut considérer que la vitesse est à peu près constante partout dans cet anneau et vaut $v(r_i)$. Le volume de sang qui, par unité de temps, passe à travers cet anneau est approximativement de

$$(2\pi r_i \Delta r)v(r_i) = 2\pi r_i v(r_i)\Delta r,$$

et le volume total de sang qui franchit une section est d'environ

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\Delta r.$$

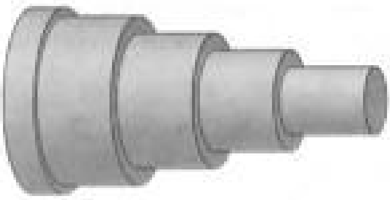


FIGURE 5

Ce volume approximatif est illustré dans la figure 5. On remarque que la vitesse (et donc aussi le volume) est plus grand vers l'axe central du vaisseau sanguin. Cette approximation s'améliore au fur et à mesure que n augmente. En prenant la limite, on obtient la valeur exacte du *flux* (ou *écoulement*), c'est-à-dire le volume de sang qui passe par unité de temps :

$$\begin{aligned}
F &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\ \Delta r \\
&= \int_0^R 2\pi r\, v(r)\, dr \\
&= \int_0^R 2\pi r\, \frac{P}{4\eta l}\,(R^2 - r^2)\, dr \\
&= \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} \\
&= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}.
\end{aligned}$$

Le résultat final

2 $$F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

s'appelle la **loi de Poiseuille** pour le débit laminaire visqueux ; il montre que ce débit est proportionnel à la quatrième puissance du rayon du vaisseau sanguin.

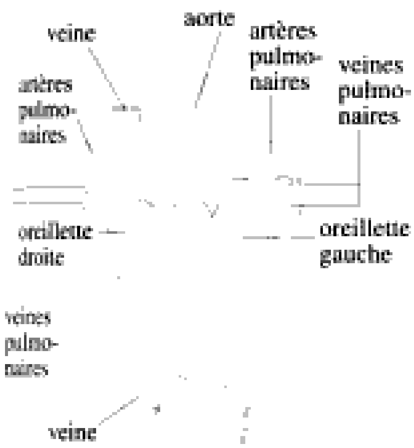


FIGURE 6

■ Débit cardiaque

La figure 6 montre une image du système cardiovasculaire de l'homme. Le sang arrive du reste du corps par les veines, entre dans l'oreillette droite où il est pompé en direction des poumons par les artères pulmonaires pour y être oxygéné. Il revient alors dans l'oreillette gauche par les veines pulmonaires d'où il est envoyé dans tout le corps à travers l'aorte. Le **débit cardiaque** est le volume de sang que le cœur éjecte par unité de temps, c'est-à-dire, la vitesse du flux dans l'aorte.

Pour mesurer ce débit, on emploie la *technique de dilution d'un indicateur*. Un colorant injecté dans l'oreillette droite circule à travers le cœur jusqu'à l'aorte. Une sonde introduite à l'intérieur de l'aorte mesure régulièrement la concentration de l'indicateur qui sort du cœur pendant un intervalle de temps $[0, T]$ jusqu'à ce que le colorant ait disparu. On désigne par $c(t)$ la concentration de colorant au moment t. Si on divise $[0, T]$ en sous-intervalles de même longueur Δt, alors la quantité de colorant qui passe devant le point de mesure entre $t = t_{i-1}$ et $t = t_i$ se monte à

$$(\text{concentration})(\text{volume}) = c(t_i)(F\Delta t),$$

où F est le débit recherché. De là, la quantité totale de colorant est à peu près

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\Delta t$$

et, en faisant tendre $n \to \infty$, on trouve la quantité de colorant :

$$A = F\int_0^T c(t)dt.$$

Le débit cardiaque est finalement donné par l'expression

3 $$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt},$$

dans laquelle la quantité de colorant injectée est connue et l'intégrale peut être évaluée à partir des relevés de concentration.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6,1
1	0,4	7	4,0
2	2,8	8	2,3
3	6,5	9	1,1
4	9,8	10	0
5	8,9		

EXEMPLE 2 ■ Un bol de 5 mg de colorant est injecté dans l'oreillette droite. Le relevé de la concentration de colorant (en milligrammes par litre) est fait toutes les secondes et les résultats sont consignés dans la table ci-contre. Estimez le débit cardiaque.

SOLUTION On $A = 5$, $\Delta t = 1$ et $T = 10$. L'intégrale de la concentration est calculée approximativement par la Méthode de Simpson :

$$\int_0^{10} c(t)\,dt \approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0,4) + 2(2,8) + 4(6,5) + 2(9,8) + 4(8,9)$$
$$+ 2(6,1) + 4(4,0) + 2(2,3) + 4(1,1) + 0]$$
$$\approx 41,87.$$

Et, selon la formule 3, le débit cardiaque est de

$$F = \frac{A}{\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41{,}87}$$

$$\approx 0{,}12 \text{ L/s} = 7{,}2 \text{ L/min.}$$

6.6 Exercices

1. La fonction $C'(x)$ de coût marginal a été définie comme la dérivée de la fonction de coût total. (Voyez les sections 3.3 et 4.7.) Si $C'(x) = 0{,}006x^2 - 1{,}5x + 8$ est la fonction de coût marginal de la fabrication d'un produit (mesuré en euros par unité) et si $C(0) = 1500000$ euros est le coût fixe de mise en production, calculez le coût de production des 2000 premières unités, à l'aide du Théorème de variation totale.
2. La recette marginale issue de la vente de x unités est calculée par la formule $90 - 0{,}02x$. La vente des 100 premières unités a rapporté 8 800 euros. Combien rapporte la vente des 200 premières unités ?
3. Le coût marginal de la production de x unités d'un certain produit est donné par $140 - 0{,}5x + 0{,}012x^2$ (en euros par unité). Quelle augmentation de coût entraîne le passage d'un niveau de production de 3000 à 5000 ?
4. La fonction de demande inverse d'un certain bien est $p = 5 - x/10$. Calculez le surplus du consommateur au niveau de vente 30. Illustrez en traçant la fonction de demande inverse et en interprétant le surplus du consommateur comme une aire.
5. Une courbe de demande inverse est donnée par $p = 1000/(x + 20)$. Calculez le surplus du consommateur si le prix de vente est 20 euros.
6. La **fonction d'offre** $p_S(x)$ d'un bien lie le prix de vente au nombre d'unités que les fabricants sont disposés à produire à ce prix. Comme, à un prix plus élevé, les fabricants sont disposés à produire davantage, p_S est une fonction croissante de x. Soit X la quantité d'un bien actuellement produite et soit $P = p_S(X)$ le prix courant. Certains producteurs qui seraient prêts à fabriquer et vendre le bien en question à un prix plus bas, reçoivent en fait plus que leur prix minimal. C'est ce qu'on appelle le **surplus du producteur**. En tenant un raisonnement semblable à celui du surplus du consommateur, on peut montrer que le surplus du producteur est donné par l'intégrale
$$\int_0^X [P - p_S(x)]dx.$$
Calculez le surplus du producteur dans le cas où la fonction d'offre est $p_S(x) = 3 + 0{,}01x^2$ et le niveau de vente $X = 10$. Illustrez en traçant la fonction d'offre et en interprétant le surplus du producteur comme une aire.
7. Soit $p = 5 + \frac{1}{10}\sqrt{x}$ une fonction d'offre. Quel est le surplus du producteur si le prix de vente est fixé à 10 euros ?
8. Dans un marché de pure concurrence et pour un certain bien donné, le nombre d'unités produites et le prix unitaire sont déterminés par les coordonnées du point d'intersection des courbes d'offre et de demande. Étant donnés la courbe de demande inverse $p = 50 - x/20$ et la courbe d'offre $p = 20 + x/10$, calculez le surplus du consommateur et le surplus du producteur. Illustrez en traçant les courbes de demande inverse et d'offre et en interprétant les surplus comme des aires.
9. Un fabricant a vendu 1000 postes de télévision par semaine à 450 euros chacun. Un sondage montre qu'un rabais de 10 euros aurait comme effet d'en faire vendre 100 de plus chaque semaine. Déterminez la fonction de demande inverse et calculez le surplus du consommateur si le prix de vente est fixé à 400 euros.
10. Si $f(t)$ désigne le montant en capital d'une société au moment t, la dérivée $f'(t)$ s'appelle le *flux net d'investissement*. On suppose que le flux net d'investissement est de $\sqrt{t}$ millions d'euros par an (t est mesuré en années). Calculez l'augmentation en capital (la formation en capital) entre la quatrième et la huitième année.
11. Utilisez la loi de Poiseuille pour calculer le débit dans une petite artère caractérisée par les valeurs suivantes : $\eta = 0{,}027$, $R = 0{,}008$ cm, $l = 2$ cm et $P = 4000$ dynes/cm^2.
12. Le resserement des artères est responsable d'une tension artérielle élevée. Pour maintenir un débit normal, le cœur doit pomper davantage, ce qui fait monter la tension. On désigne par R_0 le rayon normal d'une artère et P_0 une valeur normale de la pression dans cette artère. Montrez à l'aide de la loi de Poiseuille que si R et P sont les valeurs de rayon et de pression d'une artère rétrécie, ils sont liés, étant entendu que le débit doit être maintenu, aux valeurs normales par l'équation
$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4.$$
Déduisez-en que si le rayon d'une artère est réduit de trois-quarts, la pression est plus que triplée.

13. On injecte 8 mg de produit colorant en vue de mesurer le débit cardiaque. Les concentrations de colorant, en mg/L, suivent le modèle $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$, $0 \leqslant t \leqslant 12$, où t est mesuré en secondes. Calculez le débit cardiaque.

14. À la suite d'une injection de 6 mg de produit colorant, l'observation, toutes les deux secondes, de la concentration de ce produit dans le sang fournit le tableau ci-contre. À l'aide de la Méthode de Simpson, évaluez le débit cardiaque.

t	$c(t)$
0	0
2	2,1
4	4,5
6	7,3
8	5,8
10	3,6

t	$c(t)$
12	2,8
14	1,4
16	0,6
18	0,2
20	0

6.7 Probabilité

Le calcul différentiel et intégral intervient dans l'étude des événements aléatoires, comme, par exemple, le taux de cholestérol d'une personne choisie au hasard dans un groupe d'âge fixé, la taille d'une personne de sexe féminin choisie au hasard ou la durée de vie d'une pile d'un certain type prise au hasard. Les statisticiens appellent de telles quantités des variables aléatoires continues parce que leurs valeurs appartiennent en réalité à un intervalle de nombres réels, même si elles sont parfois mesurées ou enregistrées au plus proche entier. Il se peut que nous ayons besoin de connaître la probabilité que le taux de cholestérol dans le sang soit supérieur à 250, la probabilité que la taille d'une personne de sexe féminin soit comprise entre 1,6 m et 1,8 m, la probabilité de voir la pile que nous avons achetée résister entre 100 et 200 heures. Si X désigne la durée de vie de ce type de pile, nous notons cette dernière probabilité comme suit :

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200).$$

Selon l'interprétation de la probabilité liée à la fréquence, ce nombre est la proportion après de nombreuses observations du nombre de piles de ce type qui durent entre 100 et 200 heures. Puisqu'elle est une proportion, la probabilité est forcément comprise entre 0 et 1.

Toute variable aléatoire continue X a une **fonction de densité de probabilité** f. Cela veut dire que la probabilité que X se trouve entre a et b s'obtient en calculant l'intégrale de f entre a et b :

1
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx.$$

La figure 1 montre un exemple de fonction de densité de probabilité f d'une variable aléatoire X définie comme étant la taille en mètres d'un adulte de sexe féminin, selon

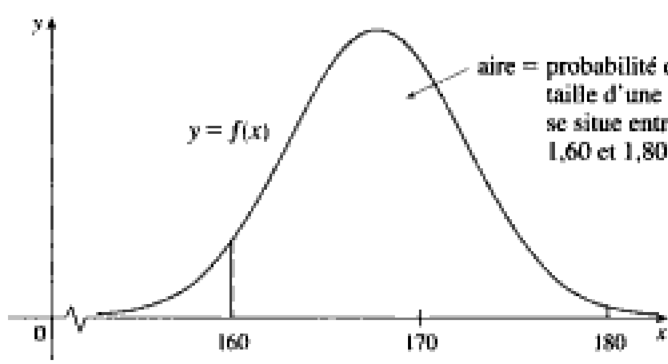


FIGURE 1
Fonction de densité de probabilité de la taille d'un adulte de sexe féminin

des données officielles du ministère de la Santé. La probabilité que la taille d'une femme choisie au hasard dans cette population mesure entre 1,60 et 1,80 m est égale à l'aire sous le graphe de f entre 1,60 et 1,80. De façon générale, la fonction de densité de probabilité f d'une variable aléatoire X est telle que $f(x) \geqslant 0$ quel que soit x. Comme les probabilités sont mesurées sur une échelle de 0 à 1, il s'ensuit que

2 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

EXEMPLE 1 ■ Des événements tels que le temps d'attente dans une file ou les délais de défaillance d'une machine sont habituellement modélisés par des fonctions de densité de probabilité exponentielles décroissantes. Cherchez la forme exacte d'une telle fonction.

SOLUTION Pensez à la variable aléatoire qu'est le temps que vous passez au téléphone avant qu'un ou une standardiste réponde à votre appel. Au lieu de x, notons cette variable t et exprimons-la en minutes. Si f est la fonction de densité de probabilité et que vous appelez au temps $t = 0$, alors, selon la définition 1, $\int_0^2 f(t)dt$ représente la probabilité que vous obteniez une réponse avant la fin de la deuxième minute et $\int_4^5 f(t)dt$ représente la probabilité que vous obteniez une réponse au cours de la cinquième minute. Il est évident que, pour $t < 0$, $f(t) = 0$ (le ou la standardiste ne peut pas répondre avant que vous ayez appelé). Pour $t > 0$, il a été suggéré d'employer une fonction exponentielle décroissante, à savoir, une fonction de la forme $f(t) = Ae^{-ct}$, où A et c sont des constantes positives. D'où,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

La condition 2 permet de déterminer la valeur de A :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\,dt \\ &= \int_0^{\infty} Ae^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x Ae^{-ct}\,dt \\ &= \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{A}{c} e^{-ct} \right]_0^x = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{c}(1 - e^{-cx}) \\ &= \frac{A}{c}. \end{aligned}$$

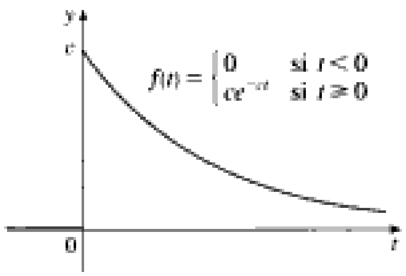


FIGURE 2
Une fonction de densité de probabilité exponentielle

Par conséquent, $A/c = 1$ ou $A = c$. N'importe quelle fonction de densité de probabilité exponentielle est donc de la forme

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

La figure 2 montre l'allure générale d'une telle fonction.

Valeurs moyennes

On suppose que vous êtes en train d'attendre que le correspondant appelé vous réponde et vous vous demandez combien de temps en moyenne vous devrez attendre. Soit $f(t)$ la fonction de densité correspondante, où t est mesuré en minutes, et imaginez que N

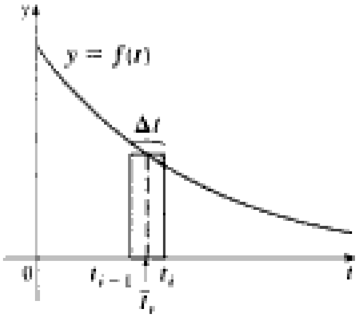


FIGURE 3

personnes aient appelé ce même correspondant. Comme il est peu probable qu'une personne ait à attendre plus d'une heure, il suffit de se limiter à l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant 60$. On divise l'intervalle en n sous-intervalles de longueur Δt par les points $0, t_1, t_2, \ldots$ (Imaginez que Δt dure une minute ou une demi-minute, ou 10 secondes ou même 1 seconde.) La probabilité qu'un appel reçoive une réponse entre le moment t_{i-1} et le moment t_i est égale à l'aire sous la courbe $y = f(t)$ étendue de t_{i-1} à t_i, qui vaut à peu près $f(\bar{t}_i)\Delta t$. (Ce produit est égal à l'aire du rectangle d'approximation de la figure 3, où $\bar{t}_i$ est le point milieu de l'intervalle.)

Vu que la proportion d'appels qui, après de nombreuses observations, reçoit une réponse entre le moment t_{i-1} et le moment t_i est $f(\bar{t}_i)\Delta t$, on s'attend à ce que sur notre échantillon de N appelants, il y en ait environ $Nf(\bar{t}_i)\Delta t$ qui reçoivent une réponse pendant ce laps de temps et que le temps moyen d'attente de chacun ait été de $\bar{t}_i$ environ. Par conséquent, la durée totale d'attente est le produit de ces nombres : environ $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\Delta t]$. En prenant maintenant la somme sur chaque intervalle de temps, on obtient le total de tous les temps d'attente :

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i f(\bar{t}_i)\Delta t.$$

Ce temps total d'attente est maintenant réparti sur le nombre N d'appelants, conduisant à une approximation du temps d'attente *moyen* :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f(\bar{t}_i)\Delta t.$$

On reconnaît en cette somme une somme de Riemann de la fonction $t f(t)$. Lorsque l'intervalle de temps diminue (c'est-à-dire, $\Delta t \to 0$ et $n \to \infty$), cette somme de Riemann s'approche de l'intégrale

$$\int_0^{60} t f(t)\, dt.$$

Cette intégrale porte le nom de *temps moyen d'attente*.

De façon générale, la **moyenne** d'une fonction de densité de probabilité quelconque f est définie par

La moyenne est habituellement désignée par la lettre grecque μ (mu).

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

On peut interpréter la moyenne comme la valeur moyenne de la variable X après beaucoup d'observations. Elle constitue également une mesure de la tendance centrale de la fonction de densité de probabilité.

L'intégrale qui définit la moyenne rappelle une autre intégrale rencontrée précédemment. Les coordonnées du centre de masse de la région $\mathcal{R}$, située sous le graphe de f sont, selon la formule 11 de la section 6.5, données par

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \mu$$

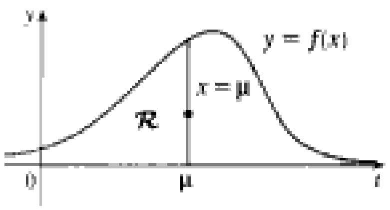


FIGURE 4
$\mathcal{R}$ tient en équilibre sur un point de la droite $x = \mu$

la simplification intervenant en raison de l'équation 2. On peut dire maintenant qu'une fine plaque qui a la forme $\mathcal{R}$ tient en équilibre si elle est appuyée sur un point de la droite verticale $x = \mu$ (voyez la figure 4).

EXEMPLE 2 ■ Calculez la moyenne de la distribution exponentielle de l'exemple 1:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

SOLUTION Conformément à la définition de la moyenne, on a

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt = \int_{0}^{\infty} tce^{-ct} dt.$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue par parties avec $u = t$ et $dv = ce^{-ct}dt$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} tce^{-ct}\,dt &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x tce^{-ct}\,dt \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\,dt \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c} \right) \\ &= \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

La règle de l'Hospital conduit à 0 comme limite du premier terme.

Sachant que $\mu = 1/c$, la fonction de densité de probabilité peut être écrite maintenant

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

EXEMPLE 3 ■ On suppose que le temps de réponse moyen auquel un consommateur doit s'attendre lorsqu'il appelle une certaine firme est de 5 minutes.

a) Déterminez la probabilité qu'un consommateur reçoive une réponse durant la première minute.

b) Déterminez la probabilité qu'un consommateur doive attendre plus de 5 minutes avant de recevoir une réponse.

SOLUTION

a) Sachant que la moyenne de la distribution exponentielle est $\mu = 5$, on a également, d'après le résultat de l'exemple 2, la fonction de densité de probabilité

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0{,}2e^{-t/5} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

La probabilité qu'un consommateur reçoive une réponse durant la première minute est alors donnée par

$$\begin{aligned} P(0 \leqslant T \leqslant 1) &= \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 0{,}2e^{-t/5}\,dt \\ &= 0{,}2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1 = 1 - e^{-1/5} \approx 0{,}1813. \end{aligned}$$

Cela veut dire qu'environ 18 % des appels recevront une réponse durant la première minute.

b) La probabilité qu'un consommateur doive attendre plus de 5 minutes avant de reçevoir une réponse est donnée par

$$P(T > 5) = \int_5^{\infty} f(t)\,dt = \int_5^{\infty} 0{,}2e^{-t/5}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_5^{x} 0{,}2e^{-t/5}\,dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5})$$

$$= \frac{1}{e} \approx 0{,}368.$$

Environ 37 % des consommateurs attendront plus de 5 minutes avant de reçevoir une réponse.

Une remarque s'impose à propos du résultat 3 b) : bien que le temps d'attente moyen soit de 5 minutes, seulement 37 % des appelants attendront plus de 5 minutes. La raison est que certains devront attendre beaucoup plus longtemps (peut-être 10 ou 15 minutes) et ces cas-là font monter la moyenne.

Il existe une autre mesure de la tendance centrale de la fonction de densité de probabilité, c'est la *médiane*. C'est un nombre m tel que la moitié des appelants devront attendre moins de m minutes et l'autre moitié, plus de m minutes. De façon générale, la **médiane** d'une fonction de densité de probabilité est le nombre m tel que

$$\int_m^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Graphiquement, cela signifie que la moitié de l'aire sous le graphe de f se trouve à droite de m. À l'exercice 5, il est demandé de démontrer que le temps d'attente médian dans la situation décrite dans l'exemple 3 est d'environ 3,5 minutes.

■ Les distributions normales

Il se fait que beaucoup d'événements aléatoires importants — tels les notes à des tests d'aptitude, les tailles et les poids de personnes issues d'une population homogène, le niveau annuel des précipitations dans un endroit donné — sont modélisés par une **distribution normale**. Cela veut dire que la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X est un membre de la famille des fonctions

L'écart-type est noté par la lettre grecque minuscule σ (sigma).

3 $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

Vous pouvez vérifier que la moyenne pour cette fonction est μ. La constante positive σ s'appelle l'**écart-type** ; elle mesure l'étalement des valeurs de la variable X. Au vu des graphiques en cloche de quelques membres de la famille, présentés dans la figure 5, on

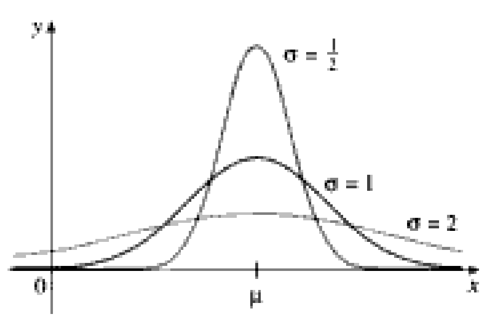


FIGURE 5
Des distributions normales

remarque que, pour σ petit, les valeurs de X sont groupées autour de la moyenne tandis que, pour de plus grandes valeurs de σ, les valeurs de X sont plus étalées. Les statisticiens disposent de méthodes pour estimer μ et σ d'un ensemble de données. Le facteur $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ est nécessaire pour que f soit une fonction de densité de probabilité. Par les méthodes du calcul intégral à plusieurs variables, on peut en effet vérifier que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx = 1$$

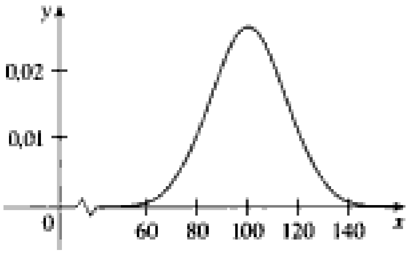


FIGURE 6
Des distributions de QI

EXEMPLE 4 ■ Les scores de quotient d'intelligence (QI) sont distribués normalement avec une moyenne 100 et un écart-type 15. (La figure 6 montre la fonction de densité de probabilité correspondante.)

a) Quelle proportion de la population a un QI compris entre 85 et 115 ?
b) Quelle proportion de la population a un QI supérieur à 140 ?

SOLUTION

a) Puisque les scores de QI sont distribués normalement, la fonction de densité de probabilité est celle de la formule 3 avec $\mu = 100$ et $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\, dx$$

Comme il a été dit à la section 5.7, la fonction e^{-x^2} n'a pas de primitive élémentaire. Aussi, il n'est pas possible de calculer exactement l'intégrale. On peut cependant recourir aux performances en intégration numérique d'un ordinateur ou d'une calculatrice (ou à la Méthode du point médian ou à la Méthode de Simpson) pour estimer l'intégrale. Cela donne :

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0{,}68.$$

Ce résultat signifie que 68 % de la population a un QI compris entre 85 et 115, c'est-à-dire à l'intérieur d'un intervalle de plus ou moins un écart-type par rapport à la moyenne.

b) La probabilité que le QI d'une personne choisie au hasard dépasse 140 est de

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx.$$

On peut éviter l'intégrale impropre en remplaçant la borne infinie par 200. Il est en effet extrêmement rare de rencontrer quelqu'un dont le QI dépasse 200. Maintenant

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx \approx 0{,}0038$$

Par conséquent, la population dont le QI est supérieur à 140 ne représente que 0,4 %.

6.7 Exercices

1. Quelle est l'interprétation de chaque intégrale si $f(t)$ est la fonction de densité de probabilité de la durée de vie d'une sorte de pile (t est mesuré en heures)

a) $\int_{100}^{200} f(t)\, dt$ b) $\int_{200}^{\infty} f(t)\, dt$

2. Écrivez avec une intégrale les probabilités suivantes, dans la situation où $f(x)$ est la fonction de densité de probabilité du taux de cholestérol d'un homme d'une quarantaine d'années (x est mesuré en mg par dl) :

a) La probabilité qu'un homme de cet âge ait un taux de cholestérol compris entre 180 et 240.
b) La probabilité qu'un homme de cet âge ait un taux de cholestérol supérieur à 200.

3. La roulette d'un jeu de société indique un nombre réel entre 0 et 10. Cette roulette est équitable au sens où elle indique un nombre dans un intervalle donné avec la même probabilité que dans n'importe quel autre intervalle de même longueur.

a) Expliquez pourquoi la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

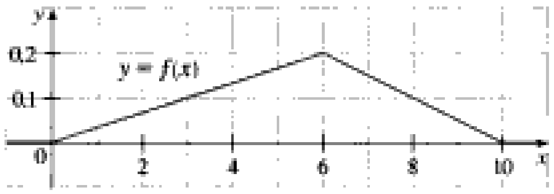
est une fonction de densité de probabilité pour les valeurs de la roulette.

b) Selon votre intuition, où se situe la moyenne ? Vérifiez en calculant une intégrale.

4. a) Expliquez pourquoi la fonction dont le graphique est présenté ci-dessous est une fonction de densité de probabilité.

b) Servez-vous du graphique pour calculer les probabilités suivantes.

■ $P(X < 3)$ ■ $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$



5. Démontrer que le temps d'attente médian dans la situation décrite dans l'exemple 3 est d'environ 3,5 minutes.

6. a) Un certain type d'ampoule est connu pour sa longévité moyenne de 1000 heures. Il est donc normal de modéliser la probabilité qu'une telle ampoule tombe en panne par une fonction de densité exponentielle de moyenne 1000. Utilisez ce modèle pour calculer la probabilité qu'une lampe
– tombe en panne durant les 200 premières heures ;
– résiste plus de 800 heures.

b) Quel est le temps médian de vie de ces lampes ?

7. La gestionnaire d'un établissement de restauration rapide juge à 2,5 minutes le temps d'attente moyen de ses clients.

a) Calculez la probabilité qu'un client doive attendre plus de 4 minutes.

b) Calculez la probabilité qu'un client soit servi en moins de 2 minutes.

c) La gestionnaire décide d'offrir aux clients qui ne seraient pas servis en moins d'un certain nombre de minutes un steak haché gratuit, mais elle souhaite ne pas devoir offrir de steak haché gratuit à plus de 2 % de ses clients. Comment doit-elle rédiger sa publicité ?

8. Selon les données publiées par le ministère de la Santé publique, la taille des adultes de sexe masculin est distribuée normalement autour d'une moyenne de 1,75 m avec un écart-type de 7 cm.

a) Quelle est la probabilité qu'un adulte choisi au hasard mesure entre 1,65 m et 1,85 m ?

b) Quel pourcentage de la population adulte de sexe masculin mesure plus de 1,83 m ?

9. Dans le cadre d'un projet de gestion active des déchets, on estime que sur un campus universitaire, la quantité de papier jeté par semaine par ménage est normalement distribuée autour d'une moyenne de 4,250 kg avec un écart-type de 1,9 kg. Quel poucentage des ménages se débarrassent d'au moins 4,5 kg de papier par semaine ?

10. Il est écrit sur les boîtes de céréales qu'elles contiennent 500 g. La machine qui remplit les boîtes produit des poids qui sont normalement distribués avec un écart-type de 12 g.

a) Si la machine qui remplit est réglée sur le poids 500 g, quelle est la probabilité qu'elle produise une boîte qui contienne moins de 480 g de céréales ?

b) La loi interdit que plus de 5 % de boîtes contiennent moins que le poids prévu de 500 g. Sur quel poids théorique la machine doit-elle être réglée pour que le fabricant ne soit pas en infraction ?

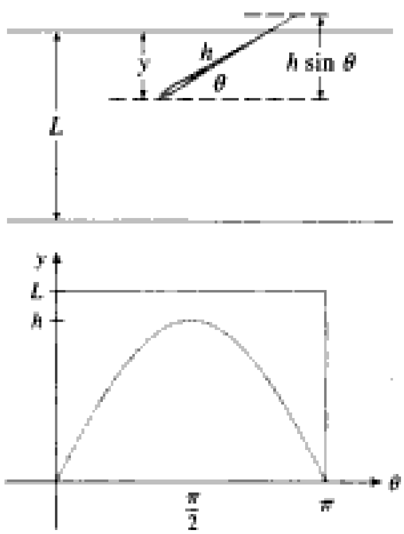
11. Dans le cas général d'une distribution normale quelconque, quelle est la probabilité que la variable aléatoire soit dans un intervalle de deux écart-types par rapport à la moyenne ?

12. L'écart-type d'une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité est f et la moyenne μ est défini par

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx\right]^{1/2}.$$

Cherchez l'expression de l'écart-type dans le cas d'une fonction de densité de probabilité exponentielle de moyenne μ.

13. Le *problème de l'aiguille de Buffon* est un des problèmes les plus connus du 18[e] siècle. Si on lance une aiguille de longueur h sur une surface (une table, par exemple) striée de lignes parallèles distantes de L unités ($L \geqslant h$), quelle est la probabilité que l'aiguille coupe une de ces lignes. On suppose que les lignes sont tracées d'ouest en est, parallèlement à l'axe Ox dans un système de coordonnées rectangulaires (comme dans la figure).



Soit y la distance entre l'extrémité « sud-ouest » de l'aiguille et la ligne la plus proche au nord. (Si l'extrémité « sud-ouest » se trouve sur une ligne, alors $y = 0$. Si l'aiguille tombe en position est-ouest, on considère que l'extrémité « sud-ouest » coïncide avec l'extrémité ouest.) Soit θ l'angle que l'aiguille fait avec un rayon dirigé vers l'est depuis l'extrémité « sud-ouest ». Alors, $0 \leqslant y \leqslant L$ et $0 \leqslant \theta < \pi$. Il est certain que l'aiguille coupe une ligne seulement si $y < h \sin \theta$. Maintenant, l'ensemble des possibilités pour l'aiguille peut être exprimée par rapport à la région rectangulaire $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta < \pi$. La proportion de fois où l'aiguille coupe une ligne est égale au rapport

$$\frac{\text{aire sous } y = h \sin \theta}{\text{aire du rectangle}}.$$

Ce rapport donne la probabilité que l'aiguille coupe une ligne. Déterminez la probabilité que l'aiguille coupe une ligne si $h = L$. Et si $h = L/2$?

14. L'atome d'hydrogène se compose d'un proton dans le noyau et d'un électron qui tourne autour du noyau. La théorie quantique de la structure atomique admet que l'électron ne se meut pas sur une orbite bien définie. Au contraire, il occupe un état connu comme une *orbitale*, que l'on peut imaginer comme un nuage de charges négatives tout autour du noyau. À l'état d'énergie la plus basse, appelé *état fondamental* ou *orbite 1*, la forme du nuage est assimilée à celle d'une sphère centrée au noyau. Cette sphère est décrite en termes de fonction de densité de probabilité

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0,$$

où a_0 est le *rayon de Bohr* ($a_0 \approx 5{,}59 \times 10^{-11}$ m). L'intégrale

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3} s^2 e^{-2s/a_0} ds$$

représente la probabilité que l'électron appartienne à une sphère de r mètres de rayon centrée au noyau.

a) Vérifiez que $p(r)$ est une fonction de densité de probabilité.

b) Calculez $\lim_{r \to \infty} p(r)$. En quelle valeur de r, $p(r)$ atteint-elle son maximum ?

c) Dessinez la fonction de densité.

d) Calculez la probabilité que l'électron se trouve à l'intérieur d'une sphère de rayon $4a_0$ centrée au noyau.

e) Calculez la distance moyenne de l'électron par rapport au noyau à l'état de base de l'atome d'hydrogène.

Chapitre 6 Révision

• CONTRÔLE DES CONCEPTS •

1. a) Dessinez deux courbes quelconques $y = f(x)$ et $y = g(x)$ telles que $f(x) \geqslant g(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Montrez comment approcher l'aire de la région comprise entre ces courbes par une somme de Riemann et dessinez les rectangles d'approximation correspondants. Écrivez ensuite une expression de l'aire exacte.

b) Expliquez ce qui change si les courbes ont comme équations $x = f(y)$ et $x = g(y)$, où $f(y) \geqslant g(y)$ pour $c \leqslant y \leqslant d$.

2. On suppose que Sandra l'emporte sur Kathy lors d'une course de 1500 m. Quelle est la signification physique de l'aire comprise entre leur courbes de vitesses durant la première minute de la course ?

3. Les sections transversales du solide S sont connues. Expliquez comment approximer le volume de S par une somme de Riemann. Écrivez ensuite une expression exacte du volume.

4. a) Comment est définie la longueur d'un arc de courbe ?

b) Écrivez une expression de la longueur d'une courbe lisse décrite par les équations paramétriques $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

c) Comment l'expression de la partie b) se simplifie-t-elle dans le cas où la courbe est décrite par une équation du type $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$? Et si c'est x qui est exprimé en fonction de y ?

5. a) Qu'appelle-t-on valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$?

b) Qu'énonce le Théorème de la valeur moyenne pour intégrales ? Donnez-en une interprétation géométrique.

6. Vous faites glisser un livre d'un bout à l'autre d'une table de 6 m de long en lui imprimant une force $f(x)$ en chaque point depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 6$. Que représente $\int_0^6 f(x) dx$? Si $f(x)$ est exprimée en newtons, dans quelles unités s'exprime l'intégrale ?

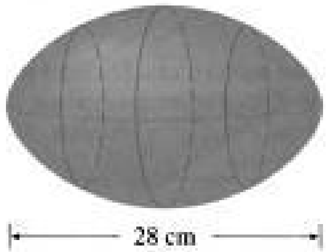
7. a) Quelle est la signification physique du centre de masse d'une fine plaque ?
   b) Donnez les expressions des coordonnées du centre de masse d'une plaque délimitée par $y = f(x)$ et l'axe Ox pour $a \leqslant x \leqslant b$.
8. Étant donné une fonction de demande inverse $p(x)$, expliquez ce que l'on entend par le surplus du consommateur lorsque la quantité actuellement disponible d'un bien est X et le prix de vente P. Faites un croquis pour illustrer.
9. a) Qu'entend-on par débit cardiaque ?
   b) Expliquez comment on peut mesurer le débit cardiaque par la technique de dilution d'un indicateur.
10. On suppose que $f(x)$ est la fonction de densité de probabilité relative à la variable poids des étudiantes d'un collège et que x est mesuré en kg.
    a) Quelle est la signification de l'intégrale $\int_0^{100} f(x)dx$?
    b) Écrivez une expression de la moyenne de cette fonction de densité.

EXERCICES

1-2 ■ Déterminez l'aire de la région bornée par les courbes données.

1. $y = x^2 - 6x, \quad y = 12x - 2x^2$
2. $x - 2y + 7 = 0, \quad y^2 - 6y - x = 0$

3. Soit $\mathcal{R}$ la région bornée par les courbes $y = \operatorname{tg}(x^2)$, $x = 1$ et $y = 0$. Servez-vous de la Méthode du point médian avec $n = 4$ pour estimer
   a) l'aire de $\mathcal{R}$;
   b) le volume obtenu en faisant tourner $\mathcal{R}$ autour de l'axe Ox.
4. Soit $\mathcal{R}$ la région du premier quadrant bornée par les courbes $y = x^3$ et $y = 2x - x^2$. Calculez
   a) l'aire de $\mathcal{R}$;
   b) le volume obtenu en faisant tourner $\mathcal{R}$ autour de l'axe Ox.
5. Déterminez les volumes des solides obtenus par la rotation de la région délimitée par les courbes $y = x$ et $y = x^2$ autour des droites suivantes :
   a) l'axe Ox b) l'axe Oy c) $y = 2$
6. Les courbes $y = 1 - x^2$ et $y = x^6 - x + 1$ sont les frontières d'une région $\mathcal{R}$. Estimez successivement
   a) les abscisses des points d'intersection de ces courbes ;
   b) l'aire de $\mathcal{R}$;
   c) le volume de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{R}$ autour de l'axe Ox.
7. Utilisez un graphique pour déterminer les coordonnées du point en lequel la courbe décrite par les équations paramétriques
$$x = t^3 - 3t \qquad y = t^2 + t + 1$$
se coupe elle-même. Calculez ensuite l'aire de la boucle.
8. Vous souhaitez calculer le volume d'un ballon de rugby. Vous le mesurez et constatez qu'il fait 28 cm de long. Avec une ficelle, vous mesurez que, là où il est le plus large, sa circonférence fait 53 cm. À 7 cm des extrémités, sa circonférence est de 45 cm. Faites votre estimation à l'aide de la Méthode de Simpson.



9. La base d'un solide est un disque circulaire de rayon 3. Déterminez le volume de ce solide si ses sections parallèles, perpendiculaires à la base, sont des triangles rectangles isocèles dont l'hypoténuse se trouve dans la base.
10. La région comprise entre les paraboles $y = x^2$ et $y = 2 - x^2$ sert de base à un solide. Les sections perpendiculaires à l'axe Ox sont des carrés dont le côté est situé dans la base. Quel est le volume de ce solide ?
11. Un monument mesure 20 m de haut. Une section horizontale à x m du sommet est un triangle équilatéral de côté $x/4$ m. Déterminez le volume de ce monument.
12. a) La base d'un solide est le carré de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ et $(0, -1)$. Chaque section perpendiculaire à l'axe Ox est un demi-cercle. Calculez le volume de ce solide.
    b) En découpant le solide de la partie a), on peut le changer en un cône. Calculez maintenant son volume plus simplement.
13. Combien mesure l'arc de la courbe décrite par les équations paramétriques $x = 3t^2$, $y = 2t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 2$?
14. Utilisez la Méthode de Simpson avec $n = 10$ pour estimer la longueur de l'arc de la courbe $y = 1/x^2$ entre $(1, 1)$ et $(2, 1/4)$.

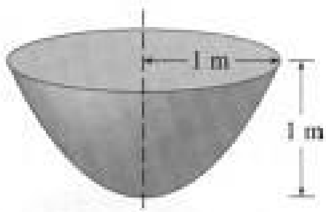
15. Il faut une force de 30 N pour qu'un ressort de 12 cm soit étiré jusqu'à 15 cm. Quel est le travail nécessaire pour le faire passer de 12 à 20 cm ?

16. Un ascenseur de 7000 N est suspendu à un câble de 60 m qui pèse 135 N/m. Quel est le travail requis pour que l'élévateur monte du sous-sol jusqu'au troisième étage, 10 m plus haut.

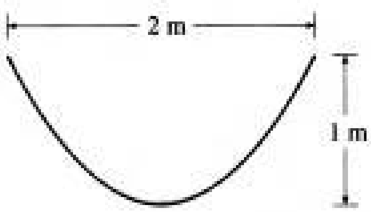
17. Un réservoir en forme de paraboloïde de révolution (c'est la forme obtenue en faisant tourner une parabole d'axe vertical autour de son axe) est complètement rempli d'eau (voyez la figure).

a) Calculez le travail nécessaire à retirer l'eau de ce réservoir, si celui-ci mesure 1 m de haut et 1 m de rayon dans sa partie supérieure.

b) Après un travail de $\frac{1000\pi}{18}$ J, quelle est la profondeur de l'eau encore présente dans le réservoir ?

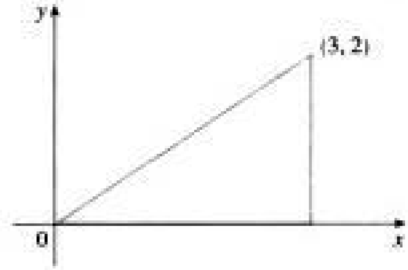


18. Un abreuvoir est rempli d'eau. Ses faces extrêmes se présentent sous la forme d'une région parabolique. Déterminez la force hydrostatique qui s'exerce contre elles.



19. Une porte dans un canal d'irrigation a la forme d'un trapèze de 1 m dans le bas et de 1,6 m dans le haut. Elle mesure 60 cm de hauteur. Elle est en position verticale et recouverte d'eau jusqu'en haut. Calculez la force hydrostatique exercée sur une face de la porte.

20. Situez le centre de masse de la région présentée ci-dessous.



21. La fonction de demande inverse d'un bien est donnée par $p = 2000 - 0{,}1x - 0{,}01x^2$. Calculez le surplus du consommateur lorsque le niveau de vente est à 100.

22. Calculez la valeur moyenne de la fonction $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[2, 4]$.

23. On suppose que f est une fonction continue. Quelle est la limite lorsque h tend vers 0 de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[x, x + h]$?

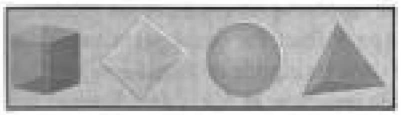
24. Dans la race humaine, la durée moyenne de la grossesse est de 268 jours avec une déviation standard de 15 jours. Quel est le pourcentage des grossesses qui durent entre 250 et 280 jours ?

25. Le temps d'attente dans une file à un comptoir est modélisé par une fonction de densité exponentielle dont la moyenne est de 8 minutes.

a) Quelle est la probabilité qu'un client soit servi en moins de 3 minutes ?

b) Quelle est la probabilité qu'un client doive attendre plus de 10 minutes ?

c) Quel est le temps médian d'attente ?



Pleins feux sur la résolution de problèmes

1. Un solide est engendré par la révolution autour de l'axe des x de la région délimitée par l'axe Ox, l'axe Oy et la courbe $y = f(x)$, où f est une fonction positive et $x \geqslant 0$. Le volume engendré par la partie de la courbe depuis $x = 0$ jusqu'à $x = b$ mesure b^2, quel que soit $b > 0$. Déterminez la fonction f.

2. Un verre cylindrique, de rayon r et de hauteur L est rempli d'eau et ensuite incliné jusqu'à ce que l'eau restée dans le verre couvre exactement sa base.

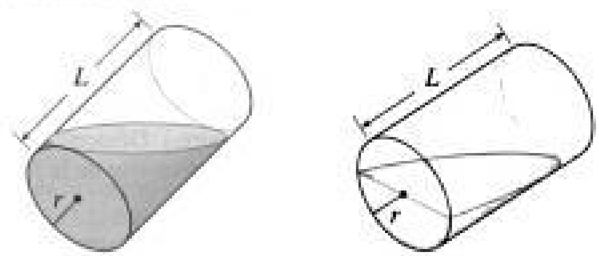
a) Expliquez comment envisager des sections parallèles rectangulaires du volume d'eau et établissez l'intégrale définie qui calculerait le volume d'eau sur la base de ces sections.

b) Expliquez comment envisager des sections parallèles trapézoïdales du volume d'eau et établissez l'intégrale définie qui calculerait le volume d'eau sur la base de ces sections.

c) Calculez le volume d'eau du verre à partir d'une des intégrales des parties a) et b).

d) Déterminez le volume d'eau sur la base de considérations purement géométriques.

e) On suppose que le verre est penché de telle sorte que l'eau ne couvre que la moitié de sa base. Dans quelle direction les sections parallèles sont-elles triangulaires ? Rectangulaires ? Dans quelles directions les sections parallèles ont-elles la forme de segments de cercle ? Calculez le volume de l'eau dans le verre.



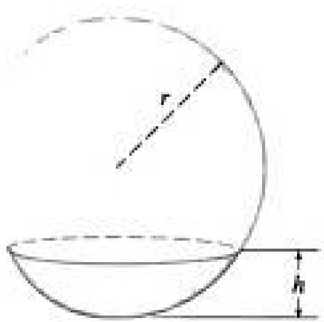


Figure relative au problème 3

3. a) Montrez que le volume d'un segment sphérique de hauteur h dans une sphère de rayon r vaut

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

b) Démontrez que si l'on coupe une sphère de rayon 1 par un plan situé à une distance x du centre de telle manière que le volume de l'un des deux segments sphériques ainsi créés soit le double de l'autre, alors x est solution de l'équation

$$3x^3 - 9x + 2 = 0,$$

où $0 < x < 1$. Calculez la valeur de x avec 4 décimales exactes à l'aide de la Méthode de Newton.

c) La formule du volume d'un segment sphérique permet de démontrer que la profondeur x à laquelle une sphère de rayon r flottante sombre dans l'eau est une racine de l'équation

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0,$$

où s est le poids spécifique de la sphère. On suppose qu'il s'agit d'une sphère en bois de 0,5 m de rayon et de poids spécifique 0,75. Calculez, avec 4 décimales exactes, la profondeur à laquelle la sphère va sombrer.

d) Un bol hémisphérique de 12 cm de rayon se remplit d'eau à la vitesse de 3 cm^3/s.

- À quelle vitesse monte le niveau de l'eau au moment où la hauteur de l'eau dans le bol atteint 8 cm ?
- À un moment donné, le bol contient 10 cm d'eau. Combien de temps faut-il encore pour que le bol soit plein ?

4. Le principe d'Archimède établit que la force exercée sur un objet partiellement ou totalement plongé dans un liquide est égale au poids du fluide déplacé par l'objet. Par conséquent, un objet de densité ρ_0 qui flotte tout en étant partiellement immergé dans un liquide de densité ρ_f subit une poussée $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)dy$, où g est l'accélération due à la pesanteur et $A(y)$ l'aire d'une section transversale de l'objet. Le poids de l'objet est donné par

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)dy.$$

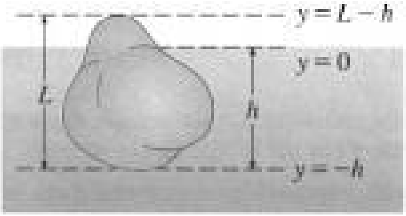


Figure relative au problème 4

a) Montrez que le pourcentage du volume de l'objet qui dépasse la surface du liquide est égal à

$$100\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}.$$

b) Sachant que la densité de la glace est 917 kg/m^3 et celle de l'eau de mer, 1030 kg/m^3, quelle est, en pourcentage du volume, la partie visible d'un iceberg ?

c) Un cube de glace flotte dans un verre rempli d'eau jusqu'au bord. Le verre va-t-il déborder lorsque le glaçon aura fondu ?

d) Une sphère de 0,4 m de rayon et de poids négligeable flotte à la surface d'un grand lac d'eau douce. Quel est le travail à effectuer pour plonger la sphère complètement dans l'eau ? La densité de l'eau est 1000 kg/m^3.

5. L'eau contenue dans un bol ouvert s'évapore à une vitesse proportionnelle à l'aire de la surface en contact avec l'air. (Autrement dit, la vitesse à laquelle le volume décroît est proportionnelle à cette aire.) Démontrez que la profondeur de l'eau diminue à une vitesse constante, indépendemment de la forme du bol.

6. Une sphère de rayon 1 dépasse d'une plus petite sphère de rayon r de telle sorte que l'intersection des deux sphères est un cercle de rayon r. (Autrement dit, elles se coupent selon un grand cercle de la plus petite des deux sphères.) Déterminez r pour que le volume de la plus petite sphère extérieur à la plus grande soit le plus grand possible.

7. On suppose que la densité $\rho = \rho(z)$ de l'eau de mer varie avec la profondeur z mesurée à partir de la surface.

a) Montrez que la pression hydrostatique est soumise à l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g,$$

où g est l'accélération due à la pesanteur. Soit P_0 et ρ_0 la pression et la densité au niveau $z = 0$. Exprimez la pression à la profondeur z par une intégrale.

b) On suppose que la densité de l'eau de mer à la profondeur z est donnée par $\rho = \rho_0 e^{z/H}$, où H est une constante positive. Déterminez la force totale, sous la forme d'une intégrale, exercée sur un hublot circulaire vertical de rayon r dont le centre est situé à une distance $L > r$ sous la surface de l'eau.

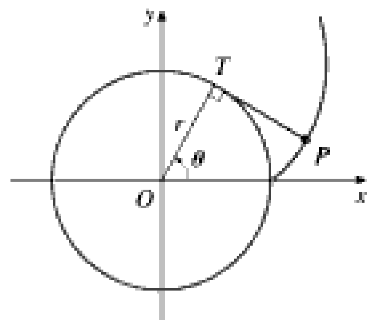
8. Un gobelet, rempli d'eau, a la forme d'un cône de hauteur h et de demi-angle vertical θ (voyez la figure). On dépose délicatement une balle sur le gobelet, ce qui a pour effet de le faire déborder. Quel est le rayon de la balle qui fait sortir le plus d'eau du gobelet ?

Figure relative au problème 8

9. Un fil est enroulé autour d'un cercle et ensuite déroulé tout en restant tendu. La trajectoire que décrit l'extrémité P du fil est appelée une **développante** de cercle. On centre le cercle de rayon r à l'origine et la position initiale de P est $(r, 0)$. Montrez que la développante de cercle est décrite par les équations paramétriques

$$x = r(\cos\theta + \theta\sin\theta) \qquad y = r(\sin\theta - \theta\cos\theta).$$

si le paramètre θ est choisi comme l'indique la figure.



10. Une vache est attachée à un silo de rayon r par une corde qui lui permet juste d'atteindre l'autre côté du silo. Calculez l'aire dont la vache dispose pour paître.

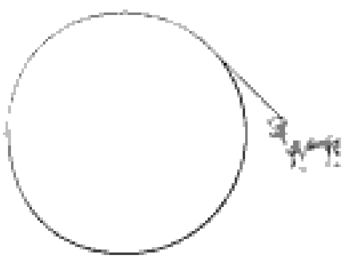


Figure relative au problème 10

11. Une courbe est décrite par les équations paramétriques

$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\,du \qquad y = \int_1^t \frac{\sin u}{u}\,du.$$

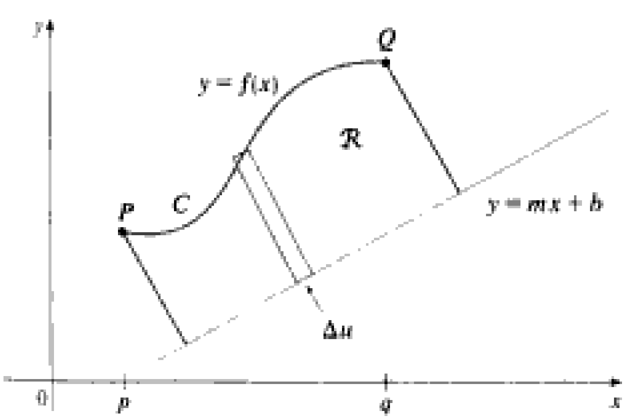
Calculez la longueur de l'arc de cette courbe qui commence à l'origine et qui finit au premier point où la tangente est verticale.

12. On désigne par C l'arc de la courbe $y = f(x)$ situé entre les points $P(p, f(p))$ et $Q(q, f(q))$ et par $\mathcal{R}$ la région délimitée par C, la droite $y = mx + b$ (qui se trouve entièrement du même côté de C) et par les perpendiculaires à la droite en P et en Q.

a) Montrez que l'aire de $\mathcal{R}$ est donnée par

$$\frac{1}{1 + m^2} \int_p^q [\,f(x) - mx - b][1 + mf'(x)]\,dx.$$

b) Cherchez une formule analogue à celle de la partie a) pour le volume du solide engendré par la révolution de $\mathcal{R}$ autour de la droite $y = mx + b$. [*Suggestion* : On peut retrouver la formule de la partie a) par des soustractions d'aires, mais il est plus instructif de l'établir en commençant par approcher l'aire par des rectangles perpendiculaires à la droite, comme celui qui est dessiné dans la figure. Cette façon de faire contribue également à établir la formule demandée dans la partie b). La figure aide aussi à exprimer Δu en termes de Δx.]



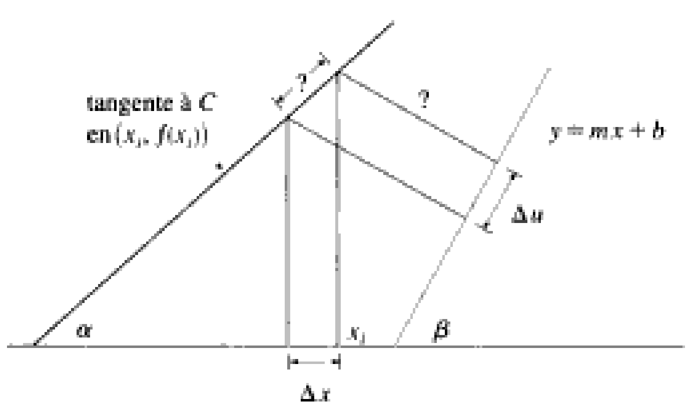


Figure relative au problème 12

Trois situations vont être traitées dans ce chapitre avec des équations différentielles : la croissance d'un banc de poissons, l'interaction entre des populations de lynx du Canada et de lièvres des neiges ; au base-ball, la position d'un deuxième joueur appelé à relayer la balle lancée vers la base initiale.

De toutes les applications du calcul différentiel et intégral, les équations différentielles constituent sans doute la plus importante. Quand il arrive à un physicien ou à un chercheur en sciences sociales d'utiliser le calcul différentiel et intégral, la plupart du temps c'est qu'il est confronté à une équation différentielle qui s'est présentée au cours de la modélisation du phénomène qu'il étudiait. Malgré qu'il ne soit pas souvent possible d'écrire explicitement la solution d'une équation différentielle, nous verrons qu'une approche graphique et numérique apporte l'information attendue.

7

Les équations différentielles

7.1 Modéliser avec des équations différentielles

C'est le moment de lire (ou de relire) la section consacrée à la modélisation mathématique à la page 75.

Dans la description du processus de modélisation, à la section 1.7, il était question de formuler un modèle mathématique d'un phénomène de la réalité, par le biais soit d'un raisonnement intuitif au sujet de ce phénomène, soit d'une loi de la physique tirée d'une évidence expérimentale. Souvent, le modèle mathématique se présente sous la forme d'une *équation différentielle*, c'est-à-dire une équation qui contient une fonction inconnue et certaines de ses dérivées. Cela n'a rien de surprenant si l'on pense que ce qu'on remarque dans la réalité, ce sont les changements intervenus et que ce qu'on souhaite, c'est prédire le comportement futur à partir de l'évolution des valeurs observées. On commence par examiner sur plusieurs exemples comment surgissent les équations différentielles au moment de modéliser des phénomènes réels.

Des modèles relatifs à la croissance d'une population

L'hypothèse que la population croît proportionnellement à sa taille conduit à un des modèles possibles de croissance d'une population. Cette hypothèse est acceptable quand il s'agit d'une population de bactéries ou d'animaux placés dans des conditions idéales (espace illimité, nourriture adéquate, absence de prédateurs, résistance à la maladie).

Identifions et nommons les variables de ce modèle :

t = temps (la variable indépendante)

P = le nombre d'individus de la population (la variable dépendante)

Le taux de croissance de la population est la dérivée dP/dt. L'hypothèse sur la proportionnalité entre ce taux de croissance et l'effectif de la population prend la forme d'une équation :

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

où k est le facteur de proportionnalité. Cette équation est un premier modèle sur la croissance d'une population : c'est une équation différentielle parce qu'elle contient une fonction inconnue P et sa dérivée dP/dt.

Maintenant qu'un modèle a été formulé, regardons quelles en sont les conséquences. Sauf en cas de population nulle, ce qui est exclu, $P(t) > 0$ quel que soit t. Dès lors, si $k > 0$, l'équation 1 entraîne $P'(t) > 0$ quel que soit t. Cela signifie que la population est toujours en augmentation. En fait, plus $P(t)$ augmente, plus, selon l'équation 1, dP/dt devient grand. En d'autres mots, la vitesse d'accroissement de la population augmente avec la population.

Essayons d'imaginer une solution de l'équation 1. Il faut que ce soit une fonction dont la dérivée est un multiple constant d'elle-même. Nous connaissons une fonction qui jouit de cette propriété, c'est la fonction exponentielle. En effet, si $P(t) = Ce^{kt}$, alors

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t).$$

Dès lors, nous pouvons affirmer qu'une fonction exponentielle quelconque de la forme $P(t) = Ce^{kt}$ est une solution de l'équation 1. Lorsque nous étudierons en détail ce type d'équation différentielle dans la section 7.5, nous verrons qu'elle n'a pas d'autres solutions que celles que nous venons de mentionner.

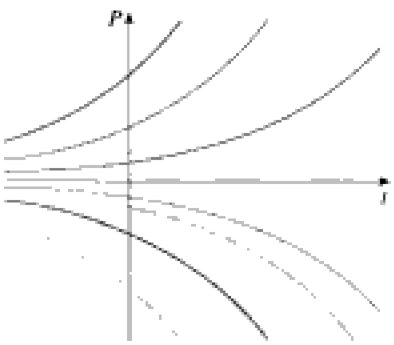


FIGURE 1
La famille des solutions de $dP/dt = kP$

La figure 1 montre les graphiques de quelques membres de la *famille* de solutions $P(t) = Ce^{kt}$, où C peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Mais l'effectif d'une population n'ayant de sens que s'il est positif, nous ne retenons que les solutions pour lesquelles $C > 0$. De plus, il est fort probable que seules les valeurs de t supérieures au

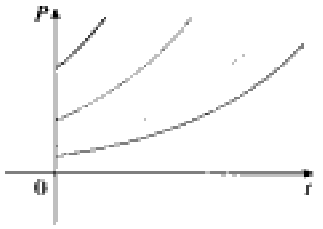


FIGURE 2
La famille des solutions de $P(t) = Ce^{kt}$ avec $C > 0$ et $t \geq 0$

moment initial $t = 0$ soient à envisager. Il ne reste alors que les traits de la figure 2 pour illustrer les solutions qui ont du sens. En posant $t = 0$, l'équation donne $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, révélant que la constante C n'est autre que la population initiale $P(0)$.

L'équation 1 constitue un modèle de croissance d'une population qui jouit de conditions idéales alors qu'en réalité, un environnement donné suppose vraisemblablement des ressources limitées qu'un modèle plus réaliste reflèterait. Beaucoup de populations commencent par grandir exponentiellement pour ensuite se stabiliser à l'approche de la capacité maximale K (ou décroissent vers K si elles l'excédaient). Pour créer un modèle qui prennent en compte ces deux tendances, nous formulons deux hypothèses :

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ lorsque P est petit (au début, la croissance est proportionnelle à P).
- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ lorsque $P > K$ (P décroît si jamais P venait à dépasser K).

L'équation que voici est simple et inclut les deux hypothèses

2 $$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

En effet, si P est petit comparé à K, le rapport P/K est proche de 0 et $dP/dt \approx kP$. En revanche, si $P > K$, alors $1 - P/K$ est négatif ce qui entraîne $dP/dt < 0$.

L'équation 2 est appelée l'*équation différentielle logistique* et fut proposée vers 1840 par le biologiste mathématicien allemand Verhulst pour modéliser la croissance de la population mondiale. Dans la section 7.6, nous développerons des techniques qui conduisent à la solution explicite de cette équation mais, pour l'instant, nous nous limitons à examiner quelques caractéristiques qualitatives des solutions qui se dégagent directement de la lecture de l'équation 2. Tout d'abord, il apparait que les fonctions constantes $P(t) = 0$ et $P(t) = K$ sont des solutions car, dans l'un et l'autre cas, un des facteurs du membre de droite de l'équation 2 est nul. (Ce qui correspond à la situation concrète où, soit la population est nulle, soit elle est au niveau de la capacité maximale, et dans les deux cas, elle ne change pas.) Ces deux solutions constantes sont qualifiées de *solutions stationnaires ou d'équilibre*.

Si la population initiale $P(0)$ se situe entre 0 et K, le membre de droite de l'équation 2 est positif et de ce fait, $dP/dt > 0$; la population augmente. À l'inverse, si la population excède la capacité maximale ($P > K$), alors $1 - P/K$ est négatif et de ce fait $dP/dt < 0$; la population diminue. Reste encore à remarquer que, dans l'un et l'autre cas, lorsque la population s'approche de la capacité maximale ($P \to K$), alors $dP/dt \to 0$, ce qui signifie que la population tend à se stabiliser. Selon toute attente, les solutions de l'équation différentielle logistique auront un comportement du type de celui que montrent les courbes de la figure 3. Remarquez que ces courbes s'écartent de la solution d'équilibre $P = 0$ et se dirigent vers la solution d'équilibre $P = K$.

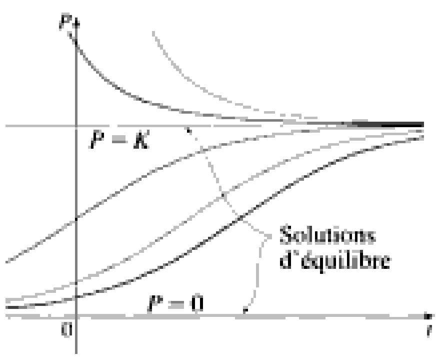


FIGURE 3
Des solutions de l'équation logistique

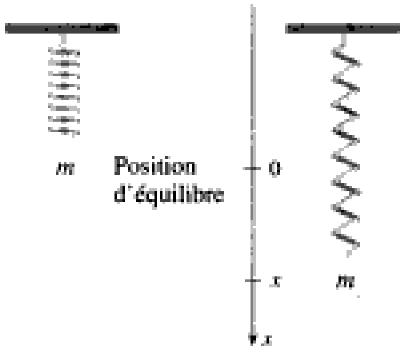


FIGURE 4

Modélisation du mouvement d'un ressort

Tournons-nous maintenant vers un modèle issu de la physique. Considérons le mouvement d'un objet de masse m suspendu au bout d'un ressort vertical (comme dans la figure 4). Cette situation rappelle la loi de Hooke, rencontrée dans la section 6.5, selon laquelle un ressort étiré (ou comprimé) de x unités par rapport à sa longueur naturelle exerce une force proportionnelle à x :

$$\text{force de rappel} = -kx,$$

où k est une constante positive (appelée la *constante du ressort*). En faisant abstraction de toute autre force extérieure (telle que la force de résistance due à l'air ou à une friction), nous avons, conformément à la deuxième loi de Newton (force égale masse fois accélération) :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{3}$$

Ceci est un exemple de ce qu'on appelle une *équation différentielle du deuxième ordre* parce qu'elle contient une dérivée seconde. Voyons quelle conjecture suggère directement l'équation à propos de la forme de la solution. L'équation 3 peut être récrite sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x,$$

qui se lit : la dérivée seconde de x est proportionnelle à x, mais de signe opposé. Nous connaissons deux fonctions qui jouissent de cette propriété, à savoir les fonctions sinus et cosinus. Il s'avère que toutes les solutions de l'équation 3 peuvent être écrites comme des combinaisons linéaires de certaines fonctions sinus et cosinus (voyez l'exercice 3). Il n'est pas du tout surprenant que les fonctions trigonométriques interviennent dans la solution puisqu'il est attendu que l'objet oscille autour de la position d'équilibre du ressort.

Les équations différentielles générales

De façon générale, une **équation différentielle** est une équation qui contient une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées. L'**ordre** d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée présente dans l'équation. C'est ainsi que les équations 1 et 2 sont du premier ordre tandis que l'équation 3 est du deuxième ordre. Il se fait que, dans ces trois équations, la variable indépendante était t et représentait le temps, mais il n'est pas du tout obligatoire que la variable indépendante soit le temps. Par exemple, dans l'équation différentielle

$$y' = xy, \tag{4}$$

il est entendu que y est une fonction inconnue de x.

Une fonction f est appelée une **solution** d'une équation différentielle si l'équation est satisfaite après y avoir remplacé $y = f(x)$ ainsi que ses dérivées. Ainsi, f est une solution de l'équation 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

pour toutes les valeurs de x appartenant à un certain intervalle.

Résoudre une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions possibles. Nous avons déjà dans le passé résolu quelques équations différentielles particulièrement simples, à savoir celles de la forme

$$y' = f(x).$$

Nous savons par exemple que l'équation différentielle

$$y' = x^3$$

a comme solution générale la famille des fonctions

$$y = \frac{x^4}{4} + C,$$

où C est une constante arbitraire.

Mais, en général, résoudre une équation différentielle n'est pas une mince affaire. Il n'y a pas de technique systématique qui permette de résoudre toutes les équations différentielles. Néanmoins, dans la section 7.2, nous allons voir comment esquisser des courbes représentatives des solutions (appelées courbes intégrales) même en l'absence d'une formule explicite. La section 7.3 quant à elle expose des méthodes qui conduisent à des approximations numériques des solutions.

EXEMPLE 1 ■ Montrez que chacune des fonctions de la famille

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

est une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUTION Nous calculons la dérivée de y en appliquant la Règle de dérivation du quotient :

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}.$$

La figure 5 montre les graphiques de 7 fonctions de la famille de l'exemple 1. D'après l'équation différentielle, lorsque $y \approx \pm 1$, $y' \approx 0$. Ce qui est confirmé par les courbes à peu près plates aux environs de $y = 1$ et $y = -1$.

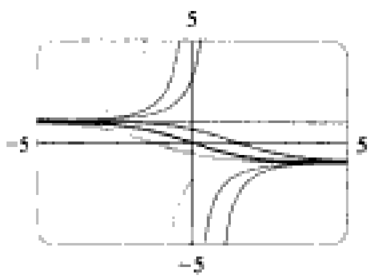


FIGURE 5

Lorsqu'on remplace y par son expression, le membre de droite de l'équation différentielle devient

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}.$$

Par conséquent, quelle que soit la valeur de c, la fonction donnée est une solution de l'équation différentielle.

Dans les applications des équations différentielles, ce n'est pas tant la famille des solutions (la *solution générale*) qui est intéressante mais bien plutôt une solution soumise à quelque exigence supplémentaire. Dans beaucoup de problèmes, cette condition supplémentaire est souvent de la forme $y(t_0) = y_0$. Elle est appelée **condition initiale** et trouver une solution d'une équation différentielle qui satisfait à une condition initiale s'appelle un **problème à la condition initiale** ou un **problème de Cauchy**.

Imposer une condition initiale revient, géométriquement, à examiner la famille des courbes solutions, appelées plus spécifiquement **courbes intégrales**, afin d'y repérer celle qui passe par le point (t_0, y_0). Physiquement, cela correspond à mesurer l'état d'un système au temps initial t_0 et à se servir de la solution du problème à la condition initiale pour prédire le comportement futur du système, désormais entièrement déterminé par son état initial.

EXEMPLE 2 ■ Déterminez une solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 2$.

SOLUTION La substitution des valeurs $t = 0$ et $y = 2$ dans la formule

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

de l'exemple 1 conduit à

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}.$$

Résolvons cette équation par rapport à c : $2 - 2c = 1 + c$ ou $c = \frac{1}{3}$. La solution du problème de Cauchy est donc

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}.$$

7.1 Exercices

1. Montrez que $y = 2 + e^{-x^3}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + 3x^2y = 6x^2$.

2. Vérifiez que $y = (2 + \ln x)/x$ est une solution du problème de Cauchy

$$x^2y' + xy = 1 \qquad y(1) = 2.$$

3. a) Pour quelles valeurs de k (non nulles) la fonction $y = \sin kt$ satisfait-elle à l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$?

b) Vérifiez que, pour ces valeurs de k, chaque fonction de la famille

$$y = A \sin kt + B \cos kt$$

est aussi une solution.

4. Pour quelles valeurs de r la fonction $y = e^{rt}$ satisfait-elle à l'équation différentielle $y'' + y' - 6y = 0$?

5. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$?

a) $y = e^t$ b) $y = e^{-t}$

c) $y = te^{-t}$ d) $y = t^2e^{-t}$

6. a) Montrez que chacune des fonctions de la famille $y = Ce^{x^2/2}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = xy$.

b) Illustrez la partie a) en affichant plusieurs fonctions de la famille des solutions dans une même fenêtre.

c) Quelle est la solution de l'équation différentielle $y' = xy$ qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 5$?

d) Quelle est la solution de l'équation différentielle $y' = xy$ qui satisfait à la condition initiale $y(1) = 2$?

7. a) Que pouvez-vous dire à propos d'une solution de l'équation $y' = -y^2$ rien qu'à la lecture de l'équation ?

b) Vérifiez que toutes les fonctions de la famille $y = 1/(x + C)$ sont des solutions de l'équation de la partie a).

c) Pouvez-vous imaginer une solution de l'équation différentielle $y' = -y^2$ qui ne soit pas l'une des fonctions de la famille citée en b) ?

d) Déterminez la solution du problème de Cauchy

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0{,}5.$$

8. a) Que pouvez-vous dire à propos du graphique d'une solution de l'équation $y' = xy^3$ lorsque x est proche de 0 ? Et lorsque x est grand ?

b) Vérifiez que toutes les fonctions de la famille $y = (c - x^2)^{-1/2}$ sont des solutions de l'équation différentielle $y' = xy^3$.

c) Dessinez plusieurs des fonctions de la famille des solutions sur un même écran. Ces graphiques confirment-ils ce que vous aviez prévu au point a) ?

d) Déterminez la solution du problème à la valeur initiale

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2.$$

9. L'évolution d'une population est modélisée par l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = 1{,}2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right).$$

a) Pour quelles valeurs de P la population croît-elle ?

b) Pour quelles valeurs de P la population décroît-elle ?

c) Quelles sont les solutions stationnaires ?

10. Une fonction $y(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2.$$

a) Quelles sont les solutions constantes de l'équation ?

b) Pour quelles valeurs de y, y est-elle croissante ?

c) Pour quelles valeurs de y, y est-elle décroissante ?

11. Les psychologues spécialisés en théorie de l'apprentissage étudient des **courbes d'apprentissage**. Une courbe d'apprentissage est le graphique d'une fonction $P(t)$ qui rend compte de la performance d'une personne en train d'apprendre une habileté quelconque en fonction du temps d'entraînement. La dérivée dP/dt représente la vitesse à laquelle la performance s'améliore.

a) À votre avis, à quel moment P croît-elle le plus vite ? Comment évolue dP/dt lorsque t augmente ? Expliquez-vous.

b) Si M est le niveau maximum que l'apprenant peut atteindre, expliquez pourquoi l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ est une constante positive}$$

est un modèle acceptable d'apprentissage.

c) Esquissez grossièrement l'allure d'une solution possible de cette équation différentielle.

12. Vous venez de vous servir une tasse de café fraîchement filtré à 95°C et vous vous trouvez dans une pièce dont la température est de 20°C.

a) À votre avis, à quel moment le café refroidit-il le plus vite ? Comment évolue la vitesse de refroidissement avec le temps qui passe ? Expliquez-vous.

b) La loi de Newton sur le refroidissement établit que le taux de refroidissement est proportionnel à la différence de température entre l'objet et l'air ambiant, à consition que cette différence ne soit pas trop grande. Écrivez une équation différentielle qui traduit la loi du refroidissement de Newton dans cette situation particulière. Quelle est la condition initiale ? Vu votre réponse à la partie a), pensez-vous que cette équation différentielle soit un bon modèle du phénomène de refroidissement ?

c) Faites une rapide esquisse du graphique de la solution du problème de Cauchy de la partie b).

7.2 Les champs de directions

Supposez qu'on vous demande de dessiner le graphe de la solution du problème de Cauchy

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1.$$

Comment réussir à dessiner ce graphe sans la formule de la fonction solution ? Pensez à ce que l'équation différentielle signifie. L'équation $y' = x + y$ dit qu'en un point (x, y) quelconque, la pente de la courbe intégrale est égale à la somme $x + y$ des coordonnées du point (voyez la figure 1). En particulier, au point $(0, 1)$ par lequel la courbe passe, sa pente doit être égale à $0 + 1 = 1$. Un tout petit morceau de la courbe intégrale à proximité du point $(0, 1)$ est comme un petit segment de pente 1 qui passe par $(0, 1)$ (voyez la figure 2).

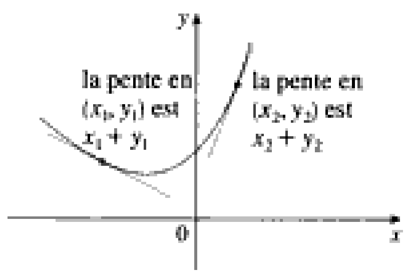


FIGURE 1
Une solution de $y' = x + y$

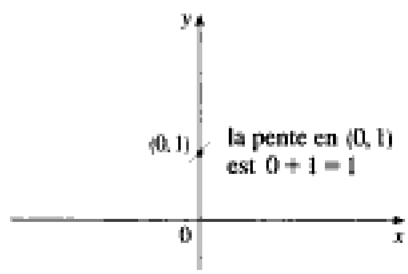


FIGURE 2
Le début de la courbe intégrale passant par (0, 1)

Dessinons en un certain nombre de points (x, y) de courts segments de pente $x + y$, pour guider le tracé du reste de la courbe. Il en résulte ce qu'on appelle un *champ de directions* (voyez la figure 3). La pente du segment qui passe par le point $(1, 2)$ par exemple est $1 + 2 = 3$. Le champ de directions nous permet de visualiser l'allure générale des courbes intégrales car il indique la direction que ces courbes doivent prendre en chaque point.

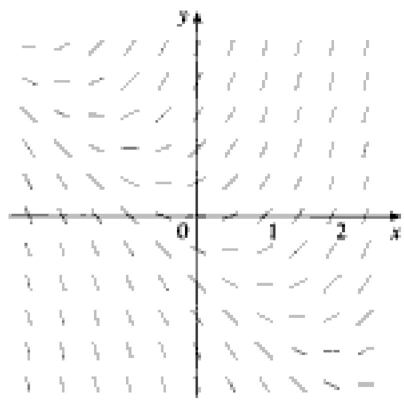


FIGURE 3
Champ de directions relatif à $y' = x + y$

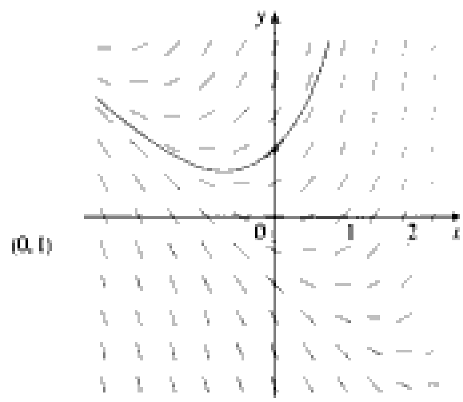


FIGURE 4
La courbe intégrale passant par $(0, 1)$

Nous pouvons maintenant tracer la courbe intégrale qui passe par $(0, 1)$ en suivant la direction du champ, comme dans la figure 4. Remarquez que la courbe est tracée parallèlement au segment qui en est proche.

De façon générale, supposons avoir affaire à une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y' = F(x, y),$$

où $F(x, y)$ est une certaine expression en x et y. L'équation différentielle dit qu'une courbe intégrale présente en un point (x, y) une pente égale à $F(x, y)$. En dessinant plusieurs courts traits orientés dans la direction $F(x, y)$, nous construisons un **champ de directions** (ou **champ de pentes**). Ces segments, en indiquant la direction que doit suivre n'importe quelle courbe intégrale, nous aident à visualiser l'allure générale de ces courbes.

EXEMPLE 1 ■

a) Tracez le champ de directions de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2 - 1$.
b) Utilisez la partie a) pour tracer la courbe intégrale qui passe par l'origine.

SOLUTION

a) On commence par calculer la pente en plusieurs points :

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	$\ldots$
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	$\ldots$
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	$\ldots$

Ensuite, on dessine de courts segments qui passent par ces points et qui ont la pente correspondante. Il en résulte le champ de directions de la figure 5.

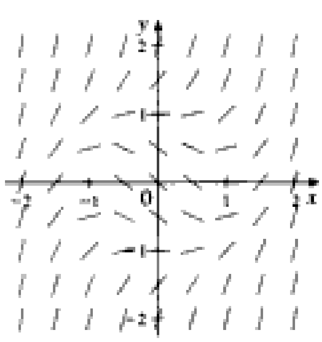


FIGURE 5

b) On pose la pointe du crayon en $(0, 0)$ et on trace vers la droite une courbe qui a la direction du trait (pente -1). La courbe est à tout moment parallèle au plus

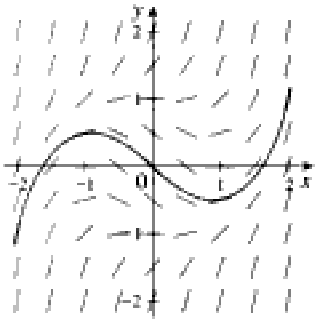


FIGURE 6

proche segment. La figure 6 montre la courbe intégrale ainsi obtenue. De la même façon, au départ de l'origine, on trace la partie gauche.

Plus il y a de segments dans un champ de directions, plus la figure est claire. Il est évidemment très ennuyeux de calculer les pentes en de nombreux points et de tracer les petits bouts de droite correspondants, mais les ordinateurs sont aptes à cette tâche. La figure 7 montre un champ de directions, produit par ordinateur, beaucoup plus dense que celui de la figure 5. Celui-ci permet de tracer, avec assez bien de précision, les courbes intégrales d'ordonnée à l'origine -2, -1, 0, 1 et 2, présentées dans la figure 8.

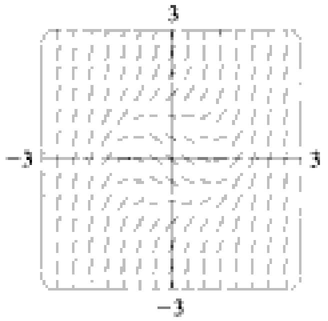


FIGURE 7

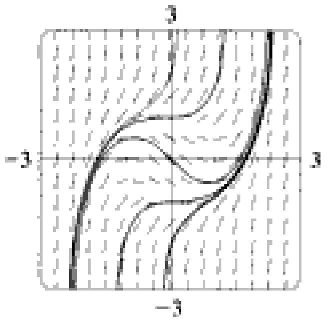


FIGURE 8

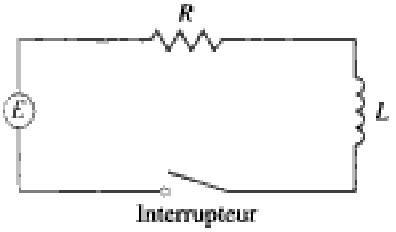


FIGURE 9

Voyons maintenant comment les champs de directions permettent de comprendre un problème en physique. Le circuit électrique simple que montre la figure 9 se compose d'une force électromotrice (habituellement une pile ou un générateur) qui produit une différence de potentiel de $E(t)$ volts (V) et un courant de $I(t)$ ampères (A) au temps t. Le circuit comporte aussi une résistance de R ohms (Ω) et une inductance de L henrys (H).

Selon la loi d'Ohm, la différence de potentiel due à la résistance vaut RI et celle due à l'inductance, $L(dI/dt)$. Une des lois de Kirchhoff impose que la somme des différences de potentiel soit égale à la tension fournie $E(t)$. Dès lors,

1 $$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$

Cette équation différentielle du premier ordre constitue un modèle pour le courant I au temps t.

EXEMPLE 2 ■ On suppose que dans le simple circuit électrique de la figure 9 la résistance est de 12 Ω, l'inductance de 4 H et qu'une pile produit une tension constante de 60 V.

a) Dessinez un champ de directions de l'équation 1 pour ces valeurs.

b) Que pouvez-vous dire des valeurs limites du courant ?

c) Reconnaissez les solutions stationnaires.

d) Utilisez le champ de directions pour tracer la courbe intégrale si l'interrupteur est fermé à l'instant $t = 0$, ce qui correspond à $I(0) = 0$.

SOLUTION

a) Introduisons les valeurs $L = 4$, $R = 12$ et $E(t) = 60$ dans l'équation 1. Il vient

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I.$$

Le champ de directions de cette équation différentielle est reproduit dans la figure 10.

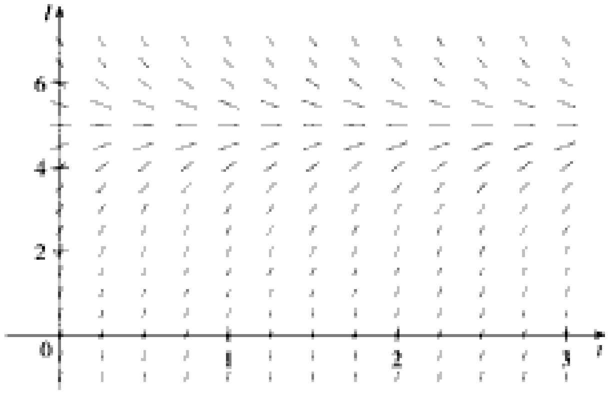


FIGURE 10

b) D'après ce champ de directions, il semble que toutes les solutions tendent vers la valeur 5 A, c'est-à-dire

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 5.$$

c) La fonction constante $I(t) = 5$ est manifestement une solution stationnaire. En effet, l'équation différentielle montre directement que, lorsque $I(t) = 5$, le membre de gauche est égal à dI/dt et le membre de droite à $15 - 3(5) = 0$.

$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I$

d) En suivant le champ de directions, nous traçons la courbe intégrale qui passe par $(0, 0)$. C'est la courbe rouge de la figure 11.

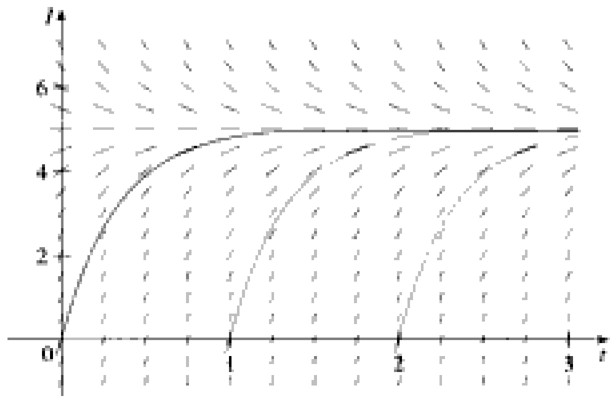


FIGURE 11

Vous aurez remarqué dans la figure 10 que tous les segments le long d'une horizontale quelconque sont penchés de la même manière. C'est dû au fait que la variable indépendante t n'apparaît pas dans le membre de droite de l'équation $I' = 15 - 3I$. De façon générale, une équation différentielle de la forme

$$y' = f(y),$$

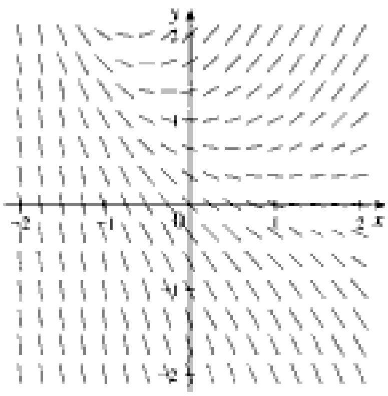
dans laquelle la variable indépendante manque dans le membre de droite est qualifiée d'**autonome**. Une telle équation différentielle est caractérisée par le fait que les pentes en deux points de même ordonnée sont forcément égales. Par conséquent, dès que l'on connaît une courbe intégrale d'une équation autonome, on en obtient une infinité d'autres par simple translation vers la droite ou vers la gauche. La figure 11 montre les solutions qui résultent de la courbe intégrale de l'exemple 2 translatée d'une et de deux unités vers la droite. Elles correspondent à la fermeture de l'interrupteur au temps

$t = 1$ et $t = 2$. Remarquez que le système se comporte de la même façon à chaque moment.

7.2 Exercices

1. Voici un champ de directions pour l'équation différentielle $y' = y - e^{-x}$. Dessinez les courbes intégrales qui vérifient les conditions initiales données.

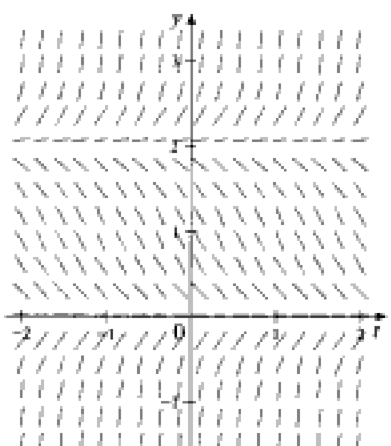
   a) $y(0) = 0$ b) $y(0) = 1$ c) $y(0) = -1$



2. a) Voici un champ de directions pour l'équation différentielle $y' = 2y(y - 2)$. Dessinez les courbes intégrales qui vérifient les conditions initiales données.

   ■ $y(0) = 1$ ■ $y(0) = 2{,}5$ ■ $y(0) = -1$

   b) On suppose que la condition initiale est $y(0) = c$. Pour quelles valeurs de c est-ce que $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existe. Quelles sont les solutions d'équilibre ?

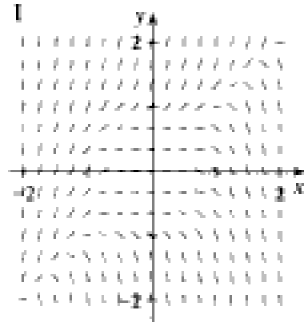


3-6 ■ Associez l'équation différentielle avec le champ de directions (désigné par I-IV). Justifiez votre réponse.

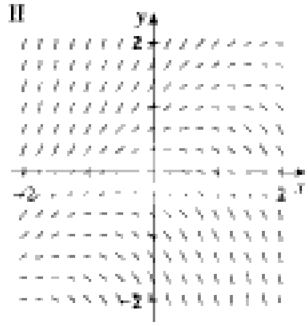
3. $y' = y - 1$ 4. $y' = y - x$

5. $y' = y^2 - x^2$ 6. $y' = y^3 - x^3$

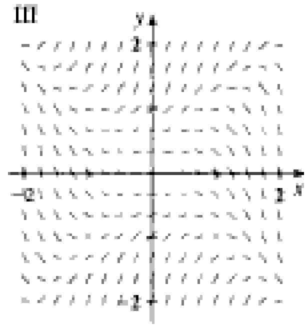
I



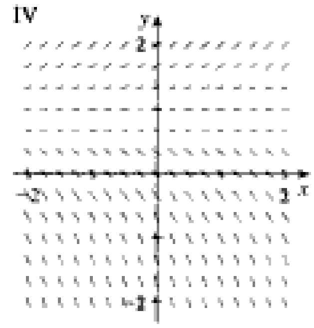
II



III



IV



7. Utilisez le champ de directions *I* (exercices 3-6) pour tracer les courbes intégrales qui vérifient les conditions initiales.

   a) $y(0) = 1$ b) $y(0) = 0$ c) $y(0) = -1$

8. Répétez l'exercice 7 avec le champ de directions III.

9-10 ■ Construisez le champ de directions de l'équation différentielle. Servez-vous en pour tracer trois courbes intégrales.

9. $y' = x - y$ 10. $y' = xy + y^2$

11-14 ■ Construisez le champ de directions de l'équation différentielle. Servez-vous en pour tracer une courbe intégrale qui passe par le point donné.

11. $y' = y^2$, $(0, 1)$ 12. $y' = x^2 + y$, $(1, 1)$

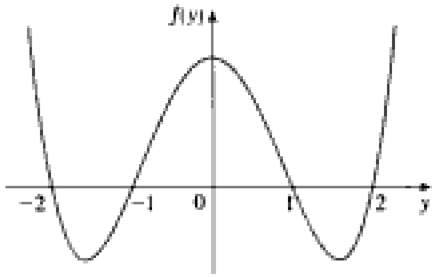
13. $y' = x^2 + y^2$, $(0, 0)$ 14. $y' = y(4 - y)$, $(0, 1)$

LCS 15-16 ■ Commandez à votre logiciel de calcul symbolique l'image du champ de directions de l'équation différentielle donnée. Imprimez-le et tracez-y la courbe intégrale qui passe par $(0, 1)$. Commandez ensuite cette courbe intégrale à votre logiciel et comparez-la avec votre dessin.

15. $y' = y \sin 2x$ 16. $y' = \sin(x + y)$

17. Commandez à votre logiciel de calcul symbolique l'image du champ de directions de l'équation différentielle $y' = y^3 - 4y$. Imprimez-le et tracez-y la courbe intégrale qui vérifie $y(0) = c$ pour différentes valeurs de c. Pour quelles valeurs de c est-ce que $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existe ? Quelles sont les valeurs possibles de cette limite ?

18. Faites un rapide croquis d'un champ de directions de l'équation différentielle autonome $y' = f(y)$, où f est la fonction représentée ci-dessous. Examinez le comportement limite des solutions en fonction de la valeur de $y(0)$.



19. Voici le schéma d'un circuit qui comporte une force électromotrice, une capacité de C farads (F) et une résistance de R ohms (Ω). La différence de potentiel de part et d'autre de la capacité vaut Q/C, où Q est la charge (en coulombs). D'après la loi de Kirchhoff,

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t).$$

Comme $I = dQ/dt$, on a encore

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

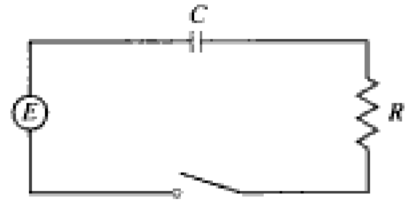
On suppose que la résistance est de 5 Ω, la capacité de 0,05 F et qu'une pile fournit une tension constante de 60 V.

a) Dessinez un champ de directions de l'équation différentielle.

b) Que pouvez-vous dire des valeurs limites de la charge ?

c) Y a-t-il une solution stationnaire ?

d) Tracez la courbe intégrale en suivant le champ de directions pour $Q(0) = 0$ C.



20. Dans l'exercice 12 de la section 7.1, il était question d'une tasse de café à 95°C et d'une pièce à 20°C. Ajoutons que la vitesse de refroidissement est de 1°C par minute au moment où la température est de 70°C.

a) Que devient l'équation différentielle dans ce cas ?

b) Dessinez un champ de directions et basez-vous sur lui pour tracer la courbe intégrale du problème de Cauchy. Quelle est la valeur limite de la température ?

7.3 La méthode d'Euler

L'idée fondamentale des champs de directions peut être mise à profit pour déterminer des valeurs approchées des solutions des équations différentielles. Nous allons illustrer comment en reprenant le problème de Cauchy

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1,$$

qui a servi à introduire les champs de directions dans la section 7.2. Comme, d'après l'équation différentielle, $y'(0) = 0 + 1 = 1$, la courbe intégrale admet une pente 1 en $(0, 1)$. Une première approximation de la solution peut donc être l'approximation affine $L(x) = x + 1$. En d'autres mots, la tangente en $(0, 1)$ remplace plus ou moins bien la courbe intégrale (voyez la figure 1).

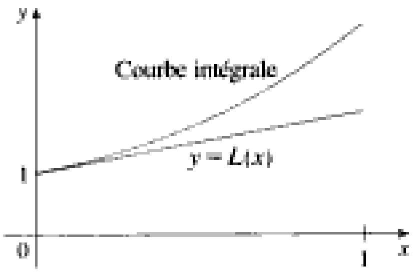


FIGURE 1
Première approximation d'Euler

L'idée d'Euler a été d'améliorer cette approximation en ne gardant de cette tangente qu'un court segment pour en corriger la direction suivant ce qu'indique le champ de directions. La figure 2 montre ce qui se passe si on suit la tangente jusqu'au point d'abscisse $x = 0{,}5$ (cette distance horizontale est appelée *le pas*). Comme $L(0{,}5) = 1{,}5$, $y(0{,}5) \approx 1{,}5$ et le point $(0{,}5; 1{,}5)$ est le point de départ d'un nouveau segment. La pente de ce dernier est dictée par l'équation différentielle calculée en

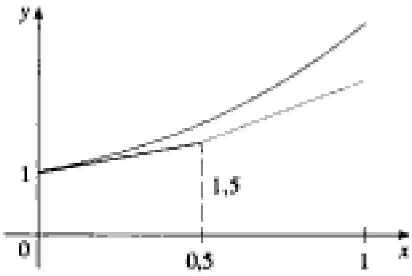


FIGURE 2
Approximation d'Euler avec un pas de 0,5

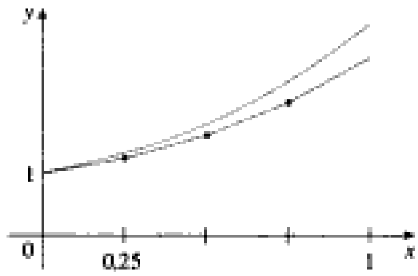


FIGURE 3
Approximation d'Euler avec un pas de 0,25

$(0,5; 1,5)$: $y'(0,5) = 0,5 + 1,5 = 2$. L'équation de ce segment est donc

$$y = 1,5 + 2(x - 0,5) = 2x + 0,5.$$

C'est ce segment qui sert d'approximation de la courbe intégrale pour $x > 0,5$ (le segment jaune de la figure 2). Si le pas est réduit de 0,5 à 0,25, l'approximation d'Euler est meilleure, c'est celle de la figure 3.

De façon générale, la méthode d'Euler consiste à partir du point donné comme condition initiale et à prendre la direction indiquée par le champ de directions, à s'arrêter ensuite après un court trajet et à chercher la direction à prendre dans la nouvelle position, puis à s'arrêter à nouveau et à changer de direction selon le champ de directions. La méthode d'Euler ne fournit pas la solution exacte du problème de Cauchy— elle n'en donne qu'une approximation. En prenant le pas de plus en plus petit (ce qui a pour effet d'augmenter le nombre de corrections intermédiaires), on obtient des approximations de plus en plus proches de la solution exacte (comparez les figures 1, 2 et 3).

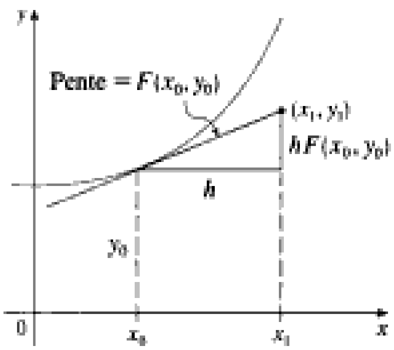


FIGURE 4

Dans le cas général d'un problème de Cauchy du premier ordre $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, l'objectif est de trouver des valeurs approchées de la solution aux points d'abscisses également espacés x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, $\cdots$ où h est le pas. L'équation différentielle indique que la pente en (x_0, y_0) est $y' = F(x_0, y_0)$ et de là (voyez la figure 4), que l'approximation de la solution au point d'abscisse $x = x_1$ est

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0).$$

De même,

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1),$$

et en général,

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

EXEMPLE 1 ■ Appliquer la méthode d'Euler avec un pas de 0,1 pour construire une table de valeurs approchées de la solution du problème de Cauchy

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1.$$

SOLUTION Les données sont $h = 0,1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $F(x, y) = x + y$. Dès lors,

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362.$$

Si $y(x)$ désigne la solution exacte, la méthode d'Euler fournit $y(0,3) \approx 1,362$.

En poursuivant semblablement les calculs, on obtient les valeurs rassemblées dans la table :

n	x_n	y_n
1	0,1	1,100000
2	0,2	1,220000
3	0,3	1,362000
4	0,4	1,528200
5	0,5	1,721020

n	x_n	y_n
6	0,6	1,943122
7	0,7	2,197434
8	0,8	2,487178
9	0,9	2,815895
10	1,0	3,187485

Il y a moyen d'améliorer les approximations de la table de valeurs de l'exemple 1 en réduisant le pas. Mais réduire le pas, à plusieurs reprises de surcroît, augmente considérablement l'importance des calculs à effectuer. Voilà pourquoi il est préférable de les confier à une calculatrice ou à un ordinateur. Voici la table des valeurs obtenues en diminuant le pas dans le problème de Cauchy de l'exemple 1.

Pas	Estimation d'Euler de $y(0,5)$	Estimation d'Euler de $y(1)$
0,500	1,500000	2,500000
0,250	1,625000	2,882813
0,100	1,721020	3,187485
0,050	1,757789	3,306595
0,020	1,781212	3,383176
0,010	1,789264	3,409628
0,005	1,793337	3,423034
0,001	1,796619	3,433848

Vous pouvez observer que les valeurs de chaque colonne semblent s'approcher d'une limite, à savoir la valeur exacte de $y(0,5)$ et de $y(1)$ respectivement. La figure 5 montre les approximations en forme de lignes brisées de la méthode d'Euler pour les pas 0,5, 0,25, 0,1, 0,05, 0,02, 0,01 et 0,005. Elles s'approchent de la courbe intégrale exacte à mesure que h tend vers 0.

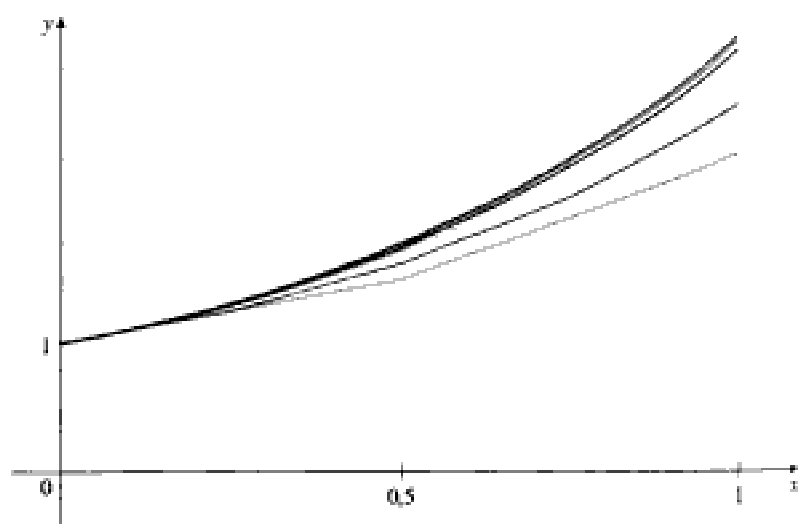


FIGURE 5
Des approximations d'Euler qui s'approchent de la solution exacte

EXEMPLE 2 ■ Il était question dans l'exemple 2 de la section 7.2 d'un circuit électrique composé d'une résistance de 12 Ω, d'une inductance de 4 H et d'une pile de 60 V. Lorsque l'interrupteur est fermé au moment $t = 0$, le courant I au moment t est modélisé par le problème de Cauchy

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0.$$

Estimez l'intensité du courant une demi-seconde après la fermeture de l'interrupteur.

SOLUTION Nous utilisons la méthode d'Euler avec $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$ et le pas $h = 0{,}1$ s :

$$I_1 = 0 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 0) = 1{,}5$$
$$I_2 = 1{,}5 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 1{,}5) = 2{,}55$$
$$I_3 = 2{,}55 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 2{,}55) = 3{,}285$$
$$I_4 = 3{,}285 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 3{,}285) = 3{,}7995$$
$$I_5 = 3{,}7995 + 0{,}1(15 - 3 \cdot 3{,}7995) = 4{,}15965$$

Après une demi-seconde le courant est estimé à

$$I(0{,}5) \approx 4{,}16 \text{ A}.$$

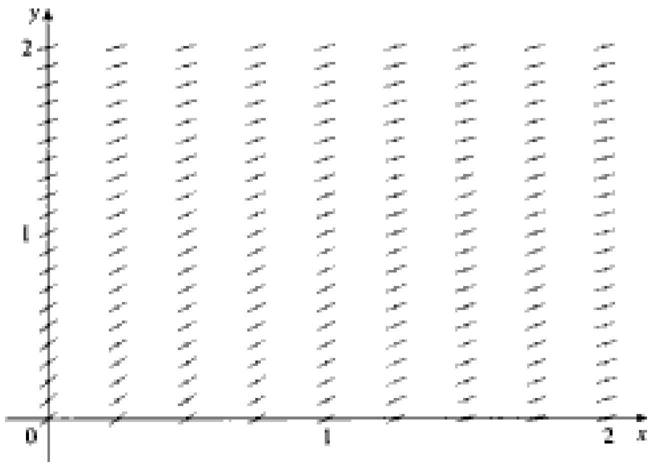
7.3 Exercices

1. a) Utilisez la méthode d'Euler pour chacun des pas $h = 0{,}4$, $h = 0{,}2$ et $h = 0{,}1$ afin d'évaluer $y(0{,}4)$, où y est la solution du problème de Cauchy $y' = y$, $y(0) = 1$.

   b) La solution exacte du problème de la partie a) est évidemment $y = e^x$. Dessinez aussi précisément que possible le graphe de $y = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}4$ en même temps que les approximations d'Euler pour les pas de la partie a). Vos tracés doivent ressembler à ceux des figures 1, 2 et 3. Décidez au vu de ces dessins si vos estimations sont par excès ou par défaut.

   c) L'erreur associée à la méthode d'Euler est la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée. Calculez les erreurs commises dans la partie a) lors de l'estimation de $y(0{,}4)$, à savoir $e^{0,4}$. Que pouvez-vous dire au sujet de l'erreur chaque fois que le pas est réduit de moitié ?

2. Voici le champ de directions d'une équation différentielle. Tracez, avec une règle, les graphiques des approximations obtenues selon la méthode d'Euler de la solution qui passe par l'origine. Choisissez les pas $h = 1$ et $h = 0{,}5$. Les estimations d'Euler sont-elles des surestimations ou des sous-estimations ? Expliquez.



3. Appliquez la méthode d'Euler avec un pas de 0,5 pour obtenir les ordonnées approximatives y_1, y_2, y_3 et y_4 de la solution du problème de Cauchy $y' = 1 + 3x - 2y$, $y(1) = 2$.

4. Appliquez la méthode d'Euler avec un pas de 0,2 pour obtenir $y(1)$, où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$.

5. Appliquez la méthode d'Euler avec un pas de 0,1 pour obtenir $y(0,5)$, où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

6. a) Appliquez la méthode d'Euler avec un pas de 0,2 pour obtenir $y(0,4)$, où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$.

   b) Même question que la partie a) avec un pas de 0,1.

7. a) Programmez votre calculatrice ou votre ordinateur pour calculer $y(1)$ par la méthode d'Euler pour les pas $h = 1$, $h = 0,1$, $h = 0,01$ et $h = 0,001$, où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

   b) Vérifiez que $y = 2 + e^{-x^3}$ est la solution exacte de l'équation différentielle.

   c) Calculez les erreurs commises dans la partie a) lors de l'estimation de $y(1)$ selon les différents pas. Que pouvez-vous dire au sujet de l'erreur chaque fois que le pas est divisé par 10 ?

CAS 8. a) Programmez votre logiciel de calcul algébrique pour calculer $y(2)$ par la méthode d'Euler pour le pas $h = 0,01$, où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

   b) Vérifiez votre résultat en faisant dessiner la courbe intégrale par votre logiciel.

9. Il était question dans l'exercice 19 de la section 7.2 de l'équation différentielle

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

dans le cas d'un circuit électrique composé d'une résistance de 5 Ω, d'une capacité de 0,05 F et d'une différence de potentiel constante de 60 V. Si la charge intiale est $Q(0) = 0$ C, estimez la charge après une demi-seconde par la méthode d'Euler avec un pas de 0,1.

10. Dans l'exercice 20 de la section 7.2, il était question d'une tasse de café à 95 °C dans une pièce à 20 °C. Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de $h = 2$ minutes pour estimer la température du café après 10 minutes.

7.4 Les équations différentielles à variables séparées

Les équations différentielles du premier ordre que nous avons examinées jusqu'à présent l'ont été d'un point de vue géométrique (champ de directions) et d'un point de vue numérique (méthode d'Euler). Qu'en est-il d'un point de vue algébrique ? L'idéal serait d'avoir la solution d'une équation différentielle sous forme explicite. Malheureusement, c'est loin d'être toujours possible. Néanmoins, dans cette section, nous allons étudier un certain type d'équation différentielle qu'il est possible de résoudre explicitement.

Une **équation différentielle à variables séparées** (ou séparables) est une équation différentielle du premier ordre dans laquelle l'expression de dy/dx a la forme d'un produit d'une fonction de x et d'une fonction de y. Autrement dit, dy/dx peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y).$$

Le terme *à variables séparées* provient évidemment du fait que, dans le membre de droite, les variables x et y sont (ou peuvent être) séparées à l'intérieur de deux fonctions distinctes. Voici une forme équivalente, dans le cas où $f(y) \neq 0$,

1
$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)},$$

où $h(y) = 1/f(y)$. Pour résoudre cette équation, on l'écrit sous la forme différentielle

$$h(y)dy = g(x)dx,$$

dans laquelle tous les y sont dans un membre et tous les x dans l'autre, puis on intègre les deux membres :

2
$$\int h(y)dy = \int g(x)dx.$$

La technique de résolution des équations différentielles à variables séparées a été utilisée pour la première fois par James Bernoulli (en 1690) dans un problème relatif aux pendules et par Leibniz (dans une lettre à Huygens en 1691). John Bernoulli expliqua la méthode générale dans un article publié en 1694.

L'équation 2 définit implicitement y comme fonction de x. Dans certains cas, il est possible d'en tirer une expression explicite de y comme fonction de x.

C'est la Règle de substitution qui permet de justifier le passage à l'équation 2 ; en effet,

$$\begin{aligned}\int h(y)\,dy &= \int h(y(x))\,\frac{dy}{dx}\,dx \\ &= \int h(y(x))\,\frac{g(x)}{h(y(x))}\,dx \qquad \text{(par l'équation 1)} \\ &= \int g(x)\,dx.\end{aligned}$$

EXEMPLE 1 ■

a) Résolvez l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

b) Cherchez la solution de cette équation qui vérifie la condition initiale $y(1) = \pi$.

SOLUTION

a) En écrivant l'équation sous la forme différentielle et en intégrant les deux membres, on obtient

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

3 $$y^2 + \sin y = 2x^3 + C,$$

où C est une constante arbitraire. (On aurait pu mettre une constante C_1 dans le membre de gauche et une autre constante C_2 dans le membre de droite, mais de toute façon ces deux constantes se regroupent en une seule $C = C_2 - C_1$.)

L'équation 3 donne la solution générale sous forme implicite. Il n'est pas évident ici d'en tirer une expression explicite de y en fonction de x.

b) On introduit la condition initiale $y(1) = \pi$ dans l'équation 3 :

$$\pi^2 + \sin \pi = 2(1)^3 + C$$
$$C = \pi^2 - 2.$$

La solution particulière demandée est donnée implicitement par l'équation

$$y^2 + \sin y = 2x^3 + \pi^2 - 2.$$

La figure 2 montre le graphique de cette solution (à comparer avec ceux de la figure 1).

Certains logiciels de calcul symbolique sont capables de représenter des fonctions définies implicitement. La figure 1 montre plusieurs courbes intégrales de l'équation différentielle de l'exemple 1. Les courbes, de gauche à droite, correspondent à $C = 3, 2, 1, 0, -1, -2$ et -3.

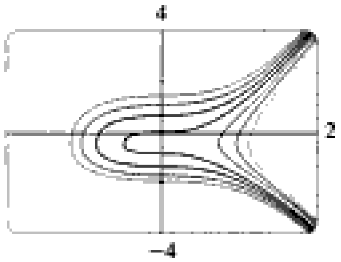


FIGURE 1

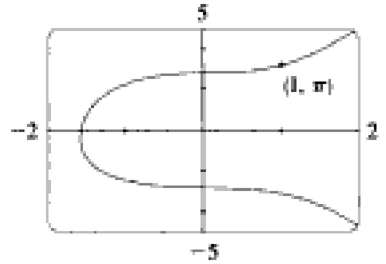


FIGURE 2

EXEMPLE 2 ■ Résolvez l'équation $y' = x^2y$.

SOLUTION On commence par écrire l'équation avec la notation de Leibniz :

$$\frac{dy}{dx} = x^2y.$$

Si $y \neq 0$, on peut l'écrire encore sous la forme différentielle et l'intégrer :

$$\frac{dy}{y} = x^2dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C.$$

Vous voyez dans la figure 3 plusieurs solutions de l'équation différentielle de l'exemple 2. Les valeurs de A sont les ordonnées à l'origine.

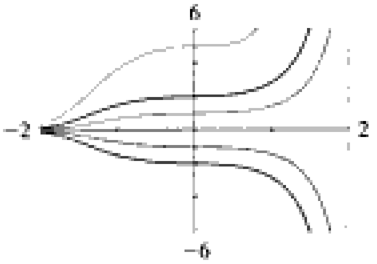


FIGURE 3

Cette équation fournit la solution sous forme implicite. Mais il est possible cette fois d'écrire explicitement l'expression de y en fonction de x :

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^Ce^{x^3/3}$$

$$y = \pm e^Ce^{x^3/3}.$$

On constate que la fonction constante $y = 0$ est aussi une solution de l'équation différentielle donnée. Aussi, on peut écrire la solution générale sous la forme

$$y = Ae^{x^3/3},$$

où A est une constante arbitraire ($A = e^C$, ou $A = -e^C$ ou $A = 0$).

EXEMPLE 3 ■ Dans la section 7.2, le courant $I(t)$ qui parcourt le circuit électrique de la figure 4 a été modélisé par l'équation différentielle

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t).$$

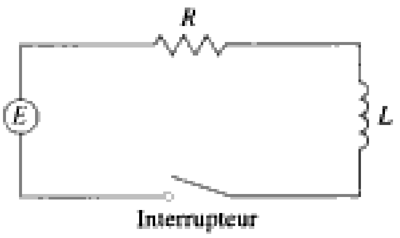


FIGURE 4

Cherchez une expression du courant électrique dans ce circuit où la résistance est de 12 Ω, l'inductance de 4 H et la pile de 60 V. L'interrupteur est fermé au moment $t = 0$. Quelle est la valeur limite du courant ?

SOLUTION Avec $L = 4$, $R = 12$ et $E(t) = 60$, l'équation devient

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I,$$

et le problème de Cauchy s'énonce

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0.$$

Comme cette équation est à variables séparées, on la résout comme suit :

$$\int \frac{dI}{15-3I} = \int dt$$

$$-\tfrac{1}{3}\ln|15-3I| = t + C$$

$$|15-3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C}e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}.$$

La condition initiale $I(0) = 0$ implique que $5 - \frac{1}{3}A = 0$ ou $A = 15$. La solution est donc

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}.$$

La valeur limite du courant se calcule aisément :

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}(5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5\lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5.$$

La figure 5 montre comment la solution de l'exemple 3 (le courant) s'approche de sa valeur limite. Si on la compare avec la figure 11 dans la section 7.2, on s'aperçoit que la solution guidée par le champ de directions était assez précise.

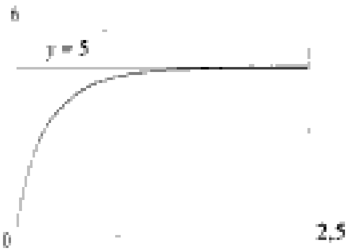


FIGURE 5

■ Les trajectoires orthogonales

Une **trajectoire orthogonale** d'une famille de courbes est une courbe qui coupe orthogonalement chacune des courbes de la famille, c'est-à-dire selon un angle droit (voyez la figure 6). C'est ainsi, par exemple, qu'une droite $y = mx$ de la famille des droites qui passent par l'origine est une trajectoire orthogonale de la famille $x^2 + y^2 = r^2$ des cercles concentriques, centrés à l'origine (voyez la figure 7). On peut dire que les deux familles sont des trajectoires orthogonales l'une de l'autre.

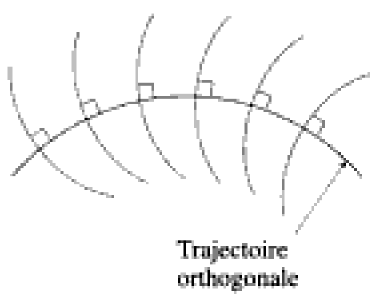


FIGURE 6

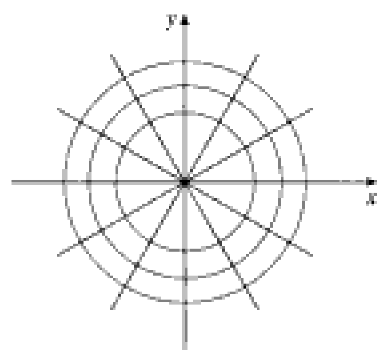


FIGURE 7

EXEMPLE 4 ■ Déterminez les trajectoires orthogonales de la famille des courbes $x = ky^2$, où k est une constante arbitraire.

SOLUTION Les courbes $x = ky^2$ sont toutes des paraboles qui admettent l'axe Ox comme axe de symétrie. Il faut tout d'abord trouver une équation différentielle dont cette famille de parabole est la solution générale. On dérive $x = ky^2$:

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}.$$

C'est une équation différentielle mais qui dépend de k. Pour éliminer k, on extrait l'expression de k de l'équation des paraboles données, à savoir $k = x/y^2$ et on la substitue dans l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\,\dfrac{x}{y^2}\,y}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}.$$

En un point (x, y) quelconque de l'une des paraboles, la pente de la tangente est égale à $y' = y/2x$. Au même point, la pente de la trajectoire orthogonale doit être égale à l'opposé de l'inverse. Par conséquent, les trajectoires orthogonales doivent vérifier l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}.$$

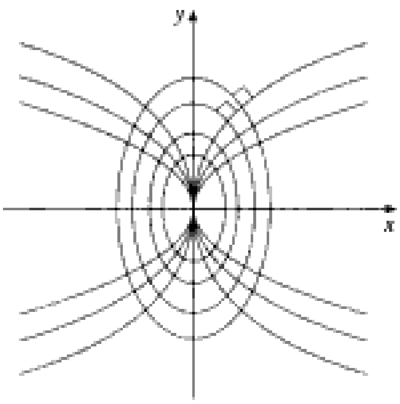


FIGURE 8

Cette équation différentielle est à variables séparées. On la résout comme suit :

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

4
$$x^2 + \frac{y^2}{2} = C,$$

où C est une constante arbitraire strictement positive. L'équation 4 est l'équation d'une famille d'ellipses représentées dans la figure 8 et qui sont les trajectoires orthogonales demandées.

Les trajectoires orthogonales se rencontrent dans différentes branches de la physique. Par exemple, dans un champ électrique uniforme, les lignes de force sont orthogonales aux lignes équipotentielles. De même, en aérodynamique, les lignes de courant sont des trajectoires orthogonales aux courbes de même potentiel des vitesses.

Les problèmes de mélange

Dans un problème de mélange il y a toujours un réservoir de capacité déterminée rempli d'une solution parfaitement mélangée d'une certaine substance (du sel, par exemple). Une solution, de concentration donnée, entre dans le réservoir selon un certain débit et le mélange, complètement brassé, en sort à un certain débit, qui peut être différent de celui de l'entrée. Si $y(t)$ désigne la quantité de substance solide dissoute dans le réservoir au moment t, $y'(t)$ représente la différence entre le taux auquel la substance entre et le taux auquel elle en est retirée. La description mathématique de cette situation implique souvent une équation différentielle du premier ordre à variables séparées. D'autres phénomènes entrent dans une modélisation analogue : les réactions chimiques, le déversement de polluants dans un lac, l'injection d'un médicament dans le sang.

EXEMPLE 5 ■ Une citerne contient 20 kg de sel dissout dans 5000 L d'eau. De la saumure, qui contient 0,03 kg de sel par litre, y est déversée à raison de 25 L par minute. La solution est continuellement remuée et sort de la citerne au même débit. Combien y a-t-il de sel dans la citerne après une demi-heure ?

SOLUTION On désigne par $y(t)$ la quantité (en kilos) de sel présente après t minutes. Selon l'énoncé, $y(0) = 20$ et il faut chercher $y(30)$. Pour cela, on passe par une équation différentielle satisfaite par $y(t)$. En notant dy/dt le taux de variation de la quantité de sel, on a

5 $$\frac{dy}{dt} = (\text{taux auquel le sel entre}) - (\text{taux auquel le sel sort}).$$

Or,

$$\text{taux auquel le sel entre} = \left(0{,}03\ \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\ \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0{,}75\ \frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Comme la citerne contient constamment 5000 L de liquide, la concentration au temps t y est égale à $y(t)/5000$ (exprimée en kg/L). Puisque le débit de la saumure qui sort est de 25 L/min, on a

$$\text{taux auquel le sel sort} = \left(\frac{y(t)}{5000}\ \frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\ \frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\ \frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

L'équation 5 devient maintenant

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}.$$

La résolution de cette équation différentielle à variables séparées s'effectue comme suit :

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Or, $y(0) = 20$. D'où $-\ln 130 = C$ et

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130.$$

De là,

$$|150 - y| = 130e^{-t/200}.$$

Vu que $y(t)$ est continue, que $y(0) = 20$ et que le membre de droite n'est jamais nul, $150 - y(t)$ est toujours strictement positif et donc $|150 - y| = 150 - y$. Finalement

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}.$$

Reste à calculer la quantité de sel après 30 min :

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38{,}1\ \text{kg}.$$ □

La fonction $y(t)$ de l'exemple 5 est représentée dans la figure 9. À mesure que le temps passe, la quantité de sel s'approche de 150 kg.

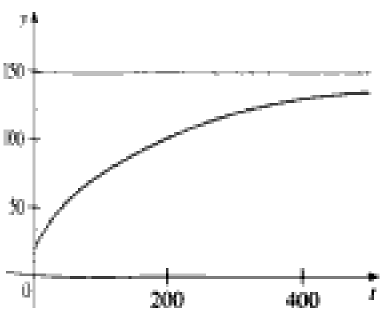


FIGURE 9

7.4 Exercices

1-6 ■ Résolvez l'équation différentielle.

1. $\dfrac{dy}{dx} = y^2$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + \sin x}{3y^2}$

3. $yy' = x$

4. $y' = xy$

5. $\dfrac{du}{dt} = e^{u+2t}$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 1 + t - x - tx$

7-12 ■ Déterminez la solution du problème de Cauchy.

7. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(1) = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + x}{xy}, \; x > 0, \quad y(1) = -4$

9. $xe^{-t}\dfrac{dx}{dt} = t, \quad x(0) = 1$

10. $x + 2y\sqrt{x^2 + 1}\,\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1$

11. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + 1}{2(u - 1)}, \quad u(0) = -1$

12. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{ty + 3t}{t^2 + 1}, \quad y(2) = 2$

13. Déterminez une équation de la courbe intégrale de l'équation $dy/dx = 4x^3y$ qui coupe l'axe Oy en 7.

14. Déterminez une équation de la courbe qui passe par le point $(1, 1)$ et dont la pente en (x, y) est égale y^2/x^3.

15. Résolvez le problème de Cauchy $y' = y \sin x$, $y(0) = 1$ et dessinez la solution.

16. Résolvez l'équation $e^{-y}y' + \cos x = 0$ et dessinez quelques membres de la famille des solutions. Comment la courbe intégrale se modifie-t-elle avec les valeurs de la constante C ?

LCS 17. Résolvez le problème de Cauchy $y' = (\sin x)/\sin y$, $y(0) = \pi/2$ et dessinez la solution (à condition que votre logiciel de calcul symbolique soit capable de tracer des fonctions définies implicitement).

LCS 18. Résolvez l'équation $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ et dessinez quelques membres de la famille des solutions (à condition que votre logiciel de calcul symbolique soit capable de tracer des fonctions définies implicitement). Comment la courbe intégrale se modifie-t-elle avec les valeurs de la constante C ?

LCS 19-20 ■

a) Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour tracer un champ de directions de l'équation différentielle. Imprimez-le et utilisez-le pour esquisser quelques courbes intégrales sans résoudre l'équation différentielle.

b) Résolvez l'équation différentielle.

c) Utilisez le logiciel de calcul symbolique pour dessiner plusieurs membres de la famille des solutions obtenues à la partie b). Comparez ces courbes avec celles que vous avez dessinées à la partie a).

19. $y' = 1/y$

20. $y' = x^2/y$

21-24 ■ Déterminez les trajectoires orthogonales de la famille de courbes. Avec un logiciel de dessin, faites apparaître dans une même fenêtre quelques-uns des membres de chaque famille.

21. $y = kx^2$

22. $x^2 - y^2 = k$

23. $y = (x + k)^{-1}$

24. $y = ke^{-x}$

25. Résolvez le problème de Cauchy posé dans l'exercice 19 de la section 7.2 de manière à pouvoir calculer la charge au temps t. Calculez aussi la valeur limite de la charge.

26. Dans l'exercice 20 de la section 7.2 il était question d'une tasse de café à 95°C dans une pièce à 20°C. Résolvez l'équation différentielle de manière à pouvoir calculer la température du café à n'importe quel instant t.

27. Dans l'exercice 11 de la section 7.1, nous avons modélisé l'apprentissage par une équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

dans laquelle $P(t)$ désignait la performance d'un apprenant après un temps t de formation, M le niveau maximum de performance et k une constante positive. Résolvez cette équation différentielle afin d'obtenir une expression de $P(t)$. Quelle est la limite de cette expression ?

28. Au cours d'une réaction chimique très simple, chaque molécule des deux réactants A et B forment une molécule du produit C : A + B ⟶ C. La loi d'action de masse assure que le taux de réaction est proportionnel au produit des concentrations de A et B :

$$\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}].$$

(Voyez l'exemple 4 dans la section 3.3.) Si les concentrations initiales sont [A] = a moles/L et [B] = b moles/L et si $x = [\mathrm{C}]$, alors

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

LCS a) Déterminez x en fonction de t, dans le cas où $a \neq b$. Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour effectuer l'intégration.

b) Déterminez x en fonction de t, dans le cas où $a = b$. Quelle simplification intervient dans l'expression de $x(t)$ s'il est connu que [C]=$a/2$ après 20 secondes ?

29. Une solution de glucose est introduite dans le sang par injection intraveineuse selon un débit constant r. Au fur et à mesure que le glucose pénètre, il est transformé en d'autres substances et éliminé de la circulation sanguine à un taux proportionnel à la concentration à ce moment. Un modèle de la concentration $C = C(t)$ de la solution de glucose dans le sang est donc

$$\frac{dC}{dt} = r - kC,$$

où k est une constante positive.

a) On désigne par C_0 la concentration initiale. Donnez une expression de la concentration en fonction du temps en résolvant l'équation différentielle.

b) Calculez $\lim_{t\to\infty} C(t)$ et interprétez votre réponse. Il est supposé que $C_0 < r/k$.

30. La quantité d'argent liquide en circulation dans un petit pays est estimée à 10 milliards d'euros et chaque jour, 50 millions d'euros transitent par les banques du pays. Le gouvernement décide d'introduire de nouveaux billets et pièces en obligeant les banques à changer les anciens billets contre des nouveaux à chaque fois que de l'argent passe par elles. On désigne par $x = x(t)$ la quantité de nouvelle monnaie en circulation au temps t et on suppose aussi que $x(0) = 0$.

a) Construisez un modèle mathématique du « flux » de la nouvelle monnaie en circulation sous forme d'un problème de Cauchy.

b) Résolvez l'équation différentielle de la partie a).

c) Calculez le temps qui sera nécessaire pour que 90 % de la monnaie en circulation soit renouvelée.

31. Une citerne contient 1000 L de saumure dont 15 kg de sel dissout. De l'eau pure est ajoutée à raison de 10 L/min. La solution est parfaitement mélangée et s'écoule de la citerne à même débit. Combien de sel y a-t-il dans la citerne a) après t minutes et b) après 20 minutes ?

32. Une citerne contient 1000 L d'eau pure. De la saumure qui contient 0,05 kg de sel par litre y est introduite à raison de 5 L/min. De la saumure qui contient 0,04 kg de sel par litre est aussi introduite dans la citerne à raison de 10 L/min. La solution est bien mélangée et rejetée de la citerne à raison de 15 L/min. Combien de sel y a-t-il dans la citerne a) après t minutes et b) après une heure ?

33. Quand une goutte de pluie tombe, elle grossit et donc sa masse $m(t)$ augmente avec le temps. La vitesse de croissance de la masse est $km(t)$ où k est une constante positive. La loi de Newton du mouvement appliquée à la goutte conduit à $(mv)' = gm$, où v est la vitesse de la goutte (dirigée vers le bas) et g l'accélération due à la pesanteur. La *vitesse finale* de la goutte est donnée par $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Déterminez une expression de la vitesse finale en termes de g et k.

34. Un objet de masse m se déplace horizontalement dans un milieu qui oppose une résistance qui est fonction de la vitesse ; c'est-à-dire

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

où $v = v(t)$ et $s = s(t)$ représentent respectivement la vitesse et la position de l'objet au temps t. Pensez par exemple à un bateau qui se déplace sur l'eau.

a) On suppose que la force de résistance est simplement proportionnelle à la vitesse, donc de la forme $f(v) = -kv$ pour une certaine constante positive k. On désigne par $v_0 = v(0)$ et $s_0 = s(0)$ les valeurs initiales de v et s. Exprimez v et s en fonction du temps. Quelle distance l'objet parcourt-il depuis l'instant $t = 0$?

b) On suppose que la force de résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, c'est-à-dire $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. On désigne par $v_0 = v(0)$ et $s_0 = s(0)$ les valeurs initiales de v et s. Exprimez v et s en fonction du temps. Quelle distance l'objet parcourt-il depuis l'instant $t = 0$?

35. En biotechnologie, on pratique la culture de tissus. Soit $A(t)$ la surface obtenue en fonction du temps et soit M la surface finale atteinte lorsque la croissance est achevée. La division des cellules s'opère surtout à la périphérie du tissu et le nombre de cellules à la périphérie est proportionnel à $\sqrt{A(t)}$. Il est donc raisonnable de modéliser la croissance du tissu en supposant que le taux de croissance est proportionnel à la fois à $\sqrt{A(t)}$ et à $M - A(t)$.

a) Établissez une équation différentielle qui reflète ces hypothèses et montrez que c'est au moment où $A(t) = M/3$ que le tissu croît le plus vite.

LCS b) Résolvez l'équation différentielle pour obtenir une expression de $A(t)$. Effectuez l'intégration à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique.

36. Conformément à la loi de la gravitation universelle de Newton, la force gravitationnelle qui s'exerce sur un objet de masse m qui a été projeté verticalement vers le haut depuis la surface de la Terre vaut

$$F = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

où $x = x(t)$ est la distance entre l'objet et la Terre au moment t, R le rayon de la Terre et g l'accélération due à la pesanteur. D'autre part, selon la deuxième loi de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ et de là,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}.$$

a) Une fusée est tirée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale v_0. Soit h la hauteur maximale atteinte par la fusée. Montrez que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}.$$

[*Suggestion :* Selon la Règle de dérivation des fonctions composées, $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.]

b) Calculez $v_{\text{lib}} = \lim_{h\to\infty} v_0$. Cette limite est appelée la *vitesse de libération* par rapport à la Terre.

c) Prenez $R = 6400$ km et $g = 10$ m/s^2 pour calculer v_{lib} en mètres par seconde et en kilomètres par seconde.

37. Soit $y(t)$ et $V(t)$ respectivement la hauteur et le volume de l'eau dans un réservoir au moment t. Cette eau s'échappe par un trou de section a au fond du réservoir. La loi de Torricelli établit que

$$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gy}$$

où g est l'accélération due à la pesanteur.

a) On suppose que le réservoir est un cylindre qui mesure 1,8 m de haut et 50 cm de rayon et que le trou est circulaire de 2,5 cm de rayon. Si on prend $g = 10$ m/s^2, montrez que y vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{200}\sqrt{5y}.$$

b) Résolvez cette équation de manière à obtenir une expression de la hauteur y de l'eau en fonction du temps. On suppose que le réservoir est plein au temps $t = 0$.

c) Combien faudra-t-il de temps pour que le réservoir soit complètement vide ?

38. On suppose que le réservoir de l'exercice 37 n'est pas cylindrique mais présente une section transversale $A(y)$ au niveau y. Dès lors, le volume d'eau jusqu'au niveau y est égal à $V = \int_0^y A(u)\,du$. Par application du Théorème fondamental du calcul intégral, on a aussi $dV/dy = A(y)$. Par conséquent

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = A(y)\frac{dy}{dt}.$$

La loi de Torricelli devient ici

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}.$$

a) On suppose que le réservoir a la forme d'une sphère de 2 m de rayon et est plein initialement à moitié. Si le rayon du trou circulaire mesure 1 cm et si on prend $g = 10$ m/s^2, montrez que y satisfait à l'équation différentielle

$$(4y - y^2)\frac{dy}{dt} = -0{,}0001\sqrt{20y}.$$

b) Combien faudra-t-il de temps pour que le réservoir soit complètement vide ?

Projet appliqué

Qu'est-ce qui est plus rapide, monter ou redescendre ?

Vous jetez une balle en l'air. Pensez-vous qu'il lui faudra plus de temps pour atteindre sa position la plus haute que pour retomber sur la Terre depuis cette position maximale, ou l'inverse ? Répondre à cette question est le sujet de ce projet appliqué, mais avant de commencer, essayez d'imaginer la situation et faites la conjecture que votre intuition vous suggère.

Il est démontré expérimentalement que, pour des vitesses qui n'excèdent pas 100 m/s, la traînée due à la résistance de l'air est à peu près proportionnelle à la vitesse.

1. Une balle de masse m est envoyée avec une vitesse initiale positive v_0 en l'air, perpendiculairement à la surface de la Terre. Les forces qui agissent sur la balle sont la force de gravité et une force freinante due à la résistance de l'air, de direction opposée à celle du mouvement et d'amplitude $p|v(t)|$, où p est une constante positive et $v(t)$ la vitesse de la balle au moment t. Que ce soit durant l'ascension ou durant la chute, la force totale qui agit sur la balle vaut $-pv - mg$. (Pendant l'ascension, $v(t)$ est positive et la résistance agit vers le bas ; durant la chute, $v(t)$ est négative et la résistance agit vers le haut.) L'équation du mouvement est donc, conformément à la seconde loi du mouvement de Newton,

$$mv' = -pv - mg.$$

Résolvez cette équation différentielle pour montrer que l'expression de la vitesse en fonction du temps est

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}.$$

2. Montrez que la hauteur de la balle jusqu'à son impact avec le sol est une fonction du temps selon la formule

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}\left(1 - e^{-pt/m}\right) - \frac{mgt}{p}$$

3. Soit t_1 le temps que met la balle pour atteindre son apogée. Montrez que

$$t_1 = \frac{m}{p}\ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Calculez ce temps pour une balle de masse 1 kg et de vitesse initiale 20 m/s. Faites l'hypothèse que la résistance de l'air est 1/10 de la vitesse.

4. Soit t_2 le temps que met la balle pour retomber par terre. Dans le cas particulier de la question 3, évaluez t_2 en lisant le graphique de la fonction hauteur $y(t)$. Qu'est-ce qui est plus rapide, monter ou descendre ?

5. Dans une situation générale, il n'est pas facile d'évaluer t_2 parce qu'il n'est pas possible de résoudre l'équation $y(t) = 0$ explicitement par rapport à t. On peut cependant déduire indirectement si c'est la montée ou la descente qui prend le moins de temps en déterminant si $y(2t_1)$ est positif ou négatif.
Montrez que

$$y(2t_1) = \frac{m^2g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

où $x = e^{pt_1/m}$. Montrez ensuite que $x > 1$ et que la fonction

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

est croissante pour $x > 1$. Déduisez de ce résultat si $y(2t_1)$ est positif ou non. Quelle est votre conclusion ? Est-ce la montée ou la descente la plus rapide ?

7.5 La croissance et la décroissance exponentielle

Un des modèles de croissance d'une population que nous avons envisagé dans la section 7.1 reposait sur l'hypothèse que la vitesse de croissance d'une population est proportionnelle à sa taille :

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Cette hypothèse est-elle raisonnable ? Envisageons une population (de bactéries, par exemple) de taille $P = 1000$ et une période déterminée de croissance à raison de $P' = 300$ bactéries par heure. Prenons une deuxième population semblable de 1000 bactéries et joignons-la à la première. Chaque moitié de la population s'accroît de 300 bactéries par heure. Il est donc normal de s'attendre à ce que la population totale de 2000 bactéries augmente de 600 bactéries à l'heure (pourvu qu'espace et nourriture ne manquent pas). Quand la taille est deux fois plus grande, le taux de croissance l'est donc aussi. Il semble donc acceptable que le taux de croissance soit proportionnel à la taille.

Il en est de même dans d'autres contextes. En physique nucléaire, la masse d'une substance radioactive se désintègre à une vitesse proportionnelle à la masse. En chimie, dans le cas d'une réaction du premier ordre, le taux de réaction est proportionnel à la concentration du réactant. En finance, sur un compte d'épargne assorti d'un intérêt composé continuellement, plus le solde est élevé, plus vite il grandit.

De façon générale, si $y(t)$ désigne la valeur de la grandeur y au moment t et si le taux de variation de y par rapport à t est proportionnel à $y(t)$ à tout moment, alors

1 $$\frac{dy}{dt} = ky,$$

où k est une constante. L'équation 1 est parfois appelée la **loi de croissance naturelle** (quand $k > 0$) ou **de décroissance naturelle** (quand $k < 0$). Vu qu'elle est une équation différentielle à variables séparées, on peut l'intégrer par la méthode de la section 7.4 :

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

où $A(= \pm e^C$ ou 0) est une constante arbitraire. En calculant

$$y(0) = Ae^{k \cdot 0} = A,$$

on découvre la signification de cette constante, à savoir la valeur initiale de la fonction.

Parce que l'équation 1 est tellement fréquemment utilisée pour décrire des phénomènes de la nature, on résume ce qui vient d'être dit afin de pouvoir s'y référer ultérieurement.

2 La solution du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = y_0$$

est

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

La croissance d'une population

Quelle est la signification de la constante de proportionnalité k ? Dans le contexte de la croissance d'une population, on peut écrire

3 $$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k.$$

Le membre de gauche

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

est le quotient du taux de croissance par la taille de la population. On l'appelle **le taux de croissance relatif**. En conséquence de (3), au lieu de parler de la « proportionnalité entre le taux de croissance et la taille de la population », on peut parler de « taux de croissance relatif constant ». Dans ces termes, (2) revient à dire qu'une population caractérisée par un taux de croissance relatif constant ne peut que croître exponentiellement. Il est à noter que le taux de croissance relatif k occupe la place de coefficient de t dans la fonction exponentielle y_0e^{kt}. Si, par exemple,

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}02P,$$

et si t est mesuré en années, le taux de croissance relatif k est égal à 0,02 et la population croît de 2 % par an. Si P_0 désigne la population initiale, alors l'expression de P en fonction de t est

$$P(t) = P_0 e^{0,02t}.$$

TABLE 1

Année	Population (en millions)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
1996	5770

EXEMPLE 1 ■ Sous l'hypothèse que le taux de croissance est proportionnel à la taille de la population, utilisez les données de la table 1 pour modéliser la population mondiale au 20ᵉ siècle. Combien vaut le taux de croissance relatif ? Jugez de la qualité du modèle.

SOLUTION Le temps est mesuré en années et $t = 0$ est l'année 1900. La population $P(t)$ est mesurée en millions d'années. Donc, $P(0) = 1650$. Selon l'hypothèse de proportionnalité entre le taux de croissance et l'effectif, le problème de Cauchy se pose comme suit :

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = 1650.$$

La solution est, selon (2),

$$P(t) = 1650e^{kt}.$$

Une façon d'évaluer le taux de croissance relatif k est d'exploiter le fait qu'en 1910 la population était de 1750 millions, ce qui conduit à l'équation en k suivante :

$$P(10) = 1650e^{k(10)} = 1750.$$

On la résout par rapport à k :

$$e^{10k} = \frac{1750}{1650},$$

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{1750}{1650} \approx 0,005884.$$

Le taux de croissance relatif tourne donc autour de 0,6 % l'an et le modèle complet est

$$P(t) = 1650e^{0,005884t}.$$

TABLE 2

Année	Modèle	Population
1900	1650	1650
1910	1750	1750
1920	1856	1860
1930	1969	2070
1940	2088	2300
1950	2214	2520
1960	2349	3020
1970	2491	3700
1980	2642	4450
1990	2802	5300
1996	2903	5770

La table 2 et la figure 1 permettent de comparer les prédictions du modèle et les données réelles. Vous remarquez que les prédictions deviennent fausses après environ 30 ans et que, pour l'année 1990, elles accusent un déficit de presque moitié.

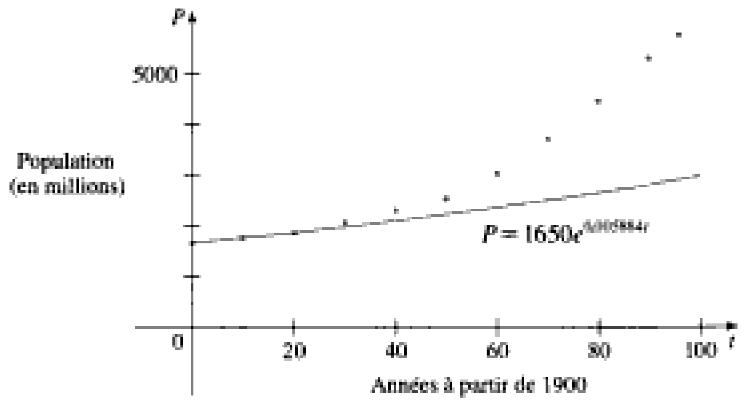


FIGURE 1
Un modèle possible de croissance de la population mondiale

On obtiendrait une autre estimation de k en utilisant l'effectif de 1950, plutôt que celui de 1910. En effet,

$$P(50) = 1650e^{50k} = 2520,$$

$$k = \frac{1}{50} \ln \frac{2520}{1650} \approx 0{,}008470.$$

Dans la section 1.7, nous avons modélisé les mêmes données avec une fonction exponentielle, mais selon la méthode des moindres carrés.

Le taux de croissance relatif est maintenant d'environ 0,85 % par an et le modèle correspondant

$$P(t) = 1650e^{0.00847t}.$$

Les prédictions de ce second modèle se lisent dans la table 3 et la figure 2. Elles se montrent plus précises sur une période plus longue mais elles sont aussi en deçà de la réalité pour les années récentes.

TABLE 3

Année	Modèle	Population
1900	1650	1650
1910	1796	1750
1920	1955	1860
1930	2127	2070
1940	2315	2300
1950	2520	2520
1960	2743	3020
1970	2985	3700
1980	3249	4450
1990	3536	5300
1996	3721	5770

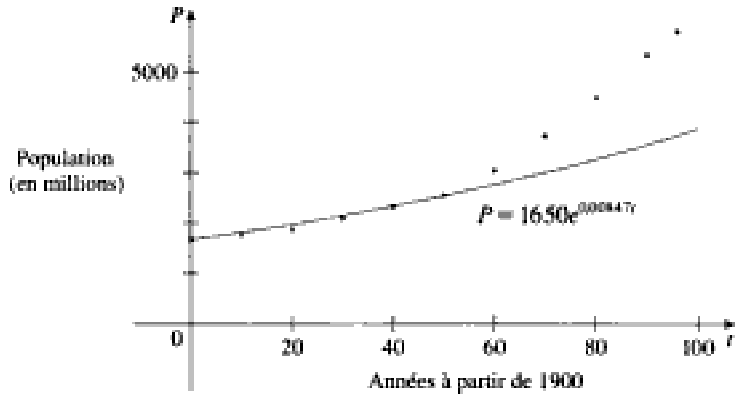


FIGURE 2 Un autre modèle de croissance de la population mondiale

EXEMPLE 2 ■ Servez-vous des données de la table 1 pour modéliser la population mondiale de la seconde moitié du 20ᵉ siècle. Quel est l'effectif que ce modèle prévoit pour 1993 et pour 2010 ?

SOLUTION Ici, $t = 0$ correspond à l'année 1950. Le problème de Cauchy est devenu

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = 2520,$$

et la solution

$$P(t) = 2520e^{kt}.$$

On évalue k sur la base de l'effectif en 1960 :

$$P(10) = 2520e^{10k} = 3020,$$

$$k = \frac{1}{10} \ln \frac{3020}{2520} \approx 0{,}018100.$$

Le taux de croissance relatif est maintenant d'environ 1,8 % par an et le modèle correspondant

$$P(t) = 2520e^{0.0181t}.$$

En 1993, la population mondiale était de

$$P(43) = 2520e^{0,0181(43)} \approx 5488 \text{ millions.}$$

En 2010, le modèle prévoit une population de

$$P(60) = 2520e^{0,0181(60)} \approx 7465 \text{ millions.}$$

Le graphique de la figure 3 montre que le modèle est assez bon jusqu'à ce jour, ce qui fait que l'estimation pour 1993 est assez fiable. En revanche, la prédiction pour 2010 est plus risquée.

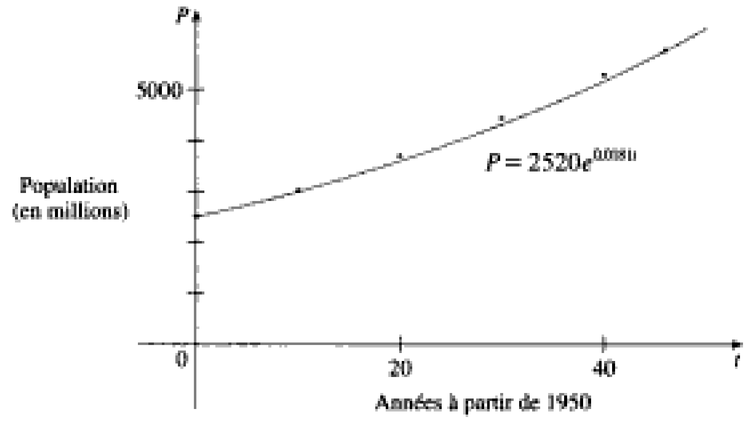


FIGURE 3
Un modèle de la croissance de la population mondiale de la seconde moitié du 20ème siècle

■ La désintégration radioactive

Les substances radioactives se désintègrent en émettant spontanément des rayonnements. On désigne par $m(t)$ ce qui reste au temps t d'une masse initiale m_0 d'une substance. Il a été démontré expérimentalement que la vitesse de désintégration relative

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

est constante. Ce qui s'écrit

$$\frac{dm}{dt} = km,$$

où k est une constante négative. En d'autres termes, les substances radioactives se désintègrent à une vitesse proportionnelle à la masse restante. Il peut donc être démontré, conformément à la formule (2), que la masse diminue exponentiellement selon la formule :

$$m(t) = m_0e^{kt}.$$

Les physiciens traduisent cette vitesse de désintégration en termes de **demi-vie**, ou temps que met n'importe quelle quantité donnée pour diminuer de moitié.

EXEMPLE 3 ■ La demi-vie du radium-226 ($^{226}_{88}$Ra) est 1590 ans.

a) Un échantillon de radium-226 a une masse de 100 mg. Écrivez une formule qui exprime la masse du $^{226}_{88}$Ra après t années.

b) Calculez la masse après 1000 années, au milligramme le plus proche.

c) Quand la masse sera-t-elle réduite à 30 mg ?

SOLUTION

a) Soit $m(t)$ la masse de radium-226 (en milligrammes) qui reste après t années. Alors $dm/dt = km$ et $m(0) = 100$. Selon l'équation (2), on a

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}.$$

Pour calculer la valeur de k, on se sert du fait que $m(1590) = \frac{1}{2}(100)$. D'où

$$100e^{1590k} = 50, \text{ ou } e^{1590k} = \frac{1}{2}.$$

De là, $1590k = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. Et finalement

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}.$$

Voici l'expression finale de $m(t)$:

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2/1590)t}.$$

Vu que $e^{\ln 2} = 2$, l'expression de $m(t)$ peut aussi prendre la forme

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}.$$

b) La masse après 1000 années est égale à

$$m(1000) = 100 \times e^{(-\ln 2/1590)1000} \approx 65 \text{ mg}.$$

c) Il faut déterminer la valeur de t telle que $m(t) = 30$, soit

$$100e^{-(\ln 2/1590)t} = 30 \qquad \text{ou encore} \qquad e^{-(\ln 2/1590)t} = 0{,}3.$$

La résolution par rapport à t de cette équation se fait en prenant le logarithme népérien des deux membres :

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0{,}3.$$

De là, $t = -1590\dfrac{\ln 0{,}3}{\ln 2} \approx 2762$ années.

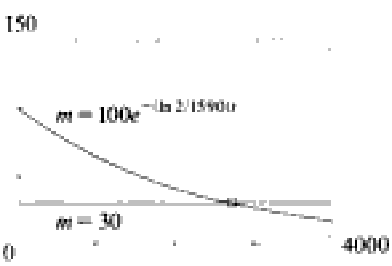


FIGURE 4

À titre de vérification du résultat de l'exemple 3, on peut faire dessiner par un logiciel adéquat la courbe représentative de $m(t)$ ainsi que la droite horizontale $m = 30$. Ces deux courbes se coupent aux environs de $t \approx 2800$, ce qui correspond à la réponse obtenue dans la partie c) (voyez la figure 4).

■ Intérêt composé en continu

EXEMPLE 4 ■ Si 1000 euros ont été déposés sur un compte rémunéré à un taux composé annuel de 6 %, le montant du compte atteindra, après 1 an, $1000(1{,}06) = 1060$ euros, après 2 ans, $[1000(1{,}06)]1{,}06 = 1123{,}6$ euros et après t années, $1000(1{,}06)^t$ euros.

De façon générale, si une somme A_0 est investie sur un compte rémunéré de la même façon à un taux r ($r = 0{,}06$ dans cet exemple), elle devient après t années $A_0(1+r)^t$. Il arrive toutefois qu'un intérêt soit composé plus souvent, disons n fois par an. Le taux d'intérêt sur chaque période est alors r/n et en t années, il y a nt périodes de composition. La somme initiale devient dans ces conditions

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

C'est ainsi que 1000 euros après 3 ans à 6 % deviennent

$$1000(1{,}06)^3 = 1191{,}02 \quad \text{si l'intérêt est composé annuellement}$$

$$1000(1{,}03)^6 = 1194{,}05 \quad \text{si l'intérêt est composé semestriellement}$$

$$1000(1{,}015)^{12} = 1195{,}62 \quad \text{si l'intérêt est composé trimestriellement}$$

$$1000(1{,}005)^{36} = 1196{,}68 \quad \text{si l'intérêt est composé mensuellement}$$

$$1000\left(1 + \frac{0{,}06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = 1197{,}20 \quad \text{si l'intérêt est composé quotidiennement}$$

Vous pouvez remarquer que l'intérêt payé augmente avec le nombre (n) de périodes de composition. Lorsque n tend vers l'infini, l'intérêt est *continu* et la valeur de l'investissement sera

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad (\text{où } m = n/r) \end{aligned}$$

Mais la limite contenue dans cette expression est égale au nombre e (voyez l'équation 6 dans la section 3.7). Après t années au taux d'intérêt continu r, la valeur de l'investissement est

$$A(t) = A_0 e^{rt}.$$

En dérivant cette équation, on obtient

$$\frac{dA}{dt} = rA_0 e^{rt} = rA(t),$$

qui montre que le taux d'accroissement d'un investissement assorti d'un intérêt continu est proportionnel à sa taille.

Revenons à l'exemple des 1000 euros investis pendant 3 ans au taux de 6 %. Si l'intérêt est continu, la valeur de cet investissement sera

$$\begin{aligned} A(3) &= 1000e^{(0{,}06)3} \\ &= 1000e^{0{,}18} = 1197{,}22 \text{ euros.} \end{aligned}$$

Si vous comparez cette valeur avec celle de l'investissement en cas d'intérêt composé quotidiennement, 1197,20, vous remarquez que la première diffère peu de la seconde et a l'avantage d'être beaucoup plus facile à calculer.

7.5 Exercices

1. Une population de protozoaires se développent à un taux relatif d'accroissement de 0,7944 par unité par jour. Le jour considéré comme initial, la population se compose de deux membres. Déterminez l'effectif après 6 jours.

2. La bactérie *Escherichia coli* est communément présente dans l'intestin de l'homme. Une cellule de cette bactérie dans un bouillon de culture se divise en deux cellules toutes les 20 minutes. La population initiale de la culture est de 100 cellules.

   a) Déterminez le taux de croissance relatif.

   b) Trouvez une expression du nombre de cellules après t heures.

   c) Calculez le nombre de cellules après 10 heures.

   d) Combien de temps faut-il pour que la population atteigne une effectif de 10 000 cellules ?

3. Une culture de bactéries démarre avec 500 bactéries et grandit à une vitesse proportionnelle à son effectif. Elle compte déjà 8000 bactéries après 3 heures.

   a) Trouvez une expression du nombre de bactéries après t heures.

   b) Calculez le nombre de bactéries après 4 heures.

   c) Combien de temps faut-il pour que l'effectif se monte à 30 000 ?

4. Une culture de bactéries grandit selon un taux relatif constant. L'effectif est 400 après 2 heures et 25 600 après 6 heures.

   a) Quelle était la population initiale de la culture ?

   b) Déterminez une expression de la population après t heures.

   c) À quel moment la population a-t-elle doublé ?

   d) Quand la population est-elle de 100 000 unités ?

5. Voici une table de la population mondiale, en millions, sur deux siècles.

Année	1750	1800	1850	1900	1950
Population	728	906	1171	1608	2517

   a) Construisez un modèle exponentiel basé sur les chiffres de 1750 et 1800 pour prédire la population mondiale en 1900 et en 1950. Comparez avec les chiffres réels.

   b) Construisez un modèle exponentiel basé sur les chiffres de 1850 et 1900 pour prédire la population mondiale en 1950. Comparez avec le chiffre réel.

   c) Construisez un modèle exponentiel basé sur les chiffres de 1900 et 1950 pour prédire la population mondiale en 1992. Comparez avec l'effectif réel de 5,4 milliards en 1992 et essayez d'expliquer l'écart.

6. La table présente les chiffres de la population des U.S.A. en millions, pour les années 1900-1990.

Année	Population
1900	76
1910	92
1920	106
1930	123
1940	131
1950	150
1960	179
1970	203
1980	227
1990	250

   a) Construisez un modèle exponentiel basé sur les chiffres recensés en 1900 et 1910 pour prédire la population mondiale en 1990. Comparez avec le chiffre réel et expliquez si possible l'écart.

   b) Construisez un modèle exponentiel basé sur les chiffres recensés en 1970 et 1980 pour prédire la population mondiale en 1990. Comparez avec le chiffre réel. Utilisez ce modèle pour prédire la population en 2005 et en 2010.

   c) Faites afficher dans une même fenêtre les deux exponentielles des parties a) et b), ainsi le graphique de la population réelle. Ces modèles sont-ils acceptables ?

7. Il est démontré expérimentalement que si la réaction chimique

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

se produit à 45°, le taux de réaction du pentoxyde d'azote est proportionnel à sa concentration selon la formule

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0{,}0005[N_2O_5]$$

(voyez l'exemple 4 dans la section 3.3).

   a) Exprimez la concentration $[N_2O_5]$ après t secondes sachant que la concentration initiale est C.

   b) Combien de temps faut-il pour réduire la concentration de $[N_2O_5]$ à 90 % de sa valeur intiale ?

8. Le Polomium-210 a une demi-vie de 140 jours.

   a) Trouvez une formule qui permette de calculer la masse qui reste après t jours d'une masse intiale de 200 mg.

   b) Quelle est la masse après 100 jours ?

   c) Quand la masse sera-t-elle réduite à 10 mg ?

   d) Dessinez le graphique de la fonction masse définie par la formule du point a).

9. Le Polomium-214 a une demi-vie très courte de $1{,}4 \times 10^{-4}$ s.

   a) Trouvez une formule qui permette de calculer la masse qui reste après t jours d'une masse intiale de 50 mg.

b) Quelle est la masse après un centième de seconde ?

c) Quand la masse sera-t-elle réduite à 40 mg ?

10. Un échantillon de radon-222 est réduit à 58 % de sa masse initiale en 3 jours.

a) Quelle est la demi-vie du radon-222 ?

b) Combien de temps faut-il pour qu'il n'en reste que 10 % ?

11. Les scientifiques sont capables de déterminer l'âge d'objets très anciens par une méthode appelée *datation par le carbone radioactif.* Le bombardement par les rayons cosmiques de la haute atmosphère transforme les noyaux d'azote en un isotope radioactif du carbone, ^{14}C, dont la demi-vie est de 5730 ans. La végétation absorbe le dioxyde de carbone présent dans l'atmosphère et l'animal vivant assimile le ^{14}C à travers la chaîne alimentaire. Quand une plante ou un animal meurt, il cesse de renouveler son carbone et la quantité de ^{14}C qu'il contient commence à diminuer par désintégration radioactive. Le niveau de radioactivité doit donc diminuer exponentiellement. Un fragment de parchemin a été découvert et il ne contient qu'environ 74 % de la radioactivité en ^{14}C de la matière végétale sur Terre aujourd'hui. Estimez l'âge du parchemin.

12. Une courbe qui passe par le point $(0, 5)$ a la propriété qu'en chacun de ses points, sa pente est le double de l'ordonnée du point. Quelle est l'équation de cette courbe ?

13. La loi du refroidissement de Newton affirme que la vitesse à laquelle un objet se refroidit est proportionnelle à la différence de température entre l'objet et son environnement. Une dinde rôtie sort d'un four au moment où il atteint 85 °C et est placée sur une table dans une pièce où il fait 23°C. Si on désigne par $u(t)$ la température de la dinde après t minutes, alors la loi de Newton se traduit par

$$\frac{du}{dt} = k(u - 23).$$

Cette équation peut être résolue comme une équation différentielle à variables séparées ou en faisant le changement de variables $y = u - 23$.

a) Écrivez le problème de Cauchy posé. Quelle en est la solution ?

b) Si la température de la dinde est de 65°C après une demi-heure, à quelle température est-elle après trois quarts d'heure ?

c) Quand la dinde sera-t-elle à la température de 37 °C ?

14. Un thermomètre qui sort d'une pièce où il fait 20 °C est placé à l'extérieur où la température n'est que de 5 °C. Après 1 minute, il indique 12 °C. Utilisez la loi du refroidissement de Newton pour répondre aux questions suivantes.

a) Quelle température peut-on lire sur le thermomètre une minute plus tard encore ?

b) À quel moment le thermomètre indiquera-t-il 6 °C ?

15. À température constante, le taux de variation de la pression atmosphérique P à l'altitude h est proportionnel à P. À 15 °C, la pression est de 101,3 kPa au niveau de la mer et de 84,14 kPa à 1000 m d'altitude.

a) Quelle est la pression à 3000 m d'altitude ?

b) Quelle est la pression au sommet du Mont McKinley à 6187 m d'altitude ?

16. a) Vous empruntez une somme de 500 euros pour deux ans au taux de 14 %. Calculez la somme due à la fin de la deuxième année si l'intérêt est composé a) annuellement, b) trimestriellement, c) mensuellement, d) journellement, d) chaque heure et e) en continu ?

b) Une somme de 500 euros est empruntée à un taux composé en continu. Si $A(t)$ désigne le montant dû à la fin de t années, où $0 \leqslant t \leqslant 2$, tracez les courbes représentatives de $A(t)$ dans un même écran dans le cas où le taux est 14 %, 10 % et 6 %.

17. a) Vous placez une somme de 3000 euros pour 5 ans au taux de 5 %. Calculez la valeur de l'investissement à la fin des 5 années si l'intérêt est composé a) annuellement, b) semestriellement, c) mensuellement, d) hebdomadairement, d) chaque jour et e) en continu ?

b) Si $A(t)$ désigne le montant de l'investissement au temps t et au cas où l'intérêt est composé en continu, écrivez une équation différentielle et une condition initiale vérifiée par $A(t)$.

18. Combien de temps faut-il pour qu'un investissement double de valeur dans le cas d'un intérêt de 6 % composé en continu ?

19. On envisage une population $P = P(t)$ caractérisée par des taux relatifs constants α et β de naissances et de décès respectivement, et par une émigration à un taux constant m, avec α, β et m constantes strictement positives. Dans cette situation, le taux de variation de la population au temps t est modélisé par l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{où } k = \alpha - \beta.$$

a) Déterminez la solution de cette équation qui satisfait à la condition initiale $P(0) = P_0$.

b) Quelle condition sur m garantit une expansion exponentielle de la population ?

c) Quelle condition sur m garantit une population stable ? Une population qui diminue ?

d) En 1847, l'Irlande comptait environ 8 millions d'habitants et l'écart entre les taux relatifs de naissances et de décès était 1,6 %. Entre 1840 et 1850, environ 210 000 Irlandais ont quitté leur pays chaque année pour fuir la famine due à une épidémie dans la culture de la pomme de terre. La population était-elle en expansion ou en déclin à cette époque ?

20. Soit c un nombre strictement positif. Une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

où k est une constante positive, est appelée une *équation du Jugement dernier* parce que l'exposant dans l'expression ky^{1+c} est plus grand que celui de la croissance naturelle (à savoir, ky).

a) Cherchez la solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = y_0$.

b) Démontrer qu'il existe une durée limitée $t = T$ telle que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.

c) Une race particulièrement prolifique de lapins croît à une vitesse exprimée par $ky^{1,01}$. Si deux lapins de cette race se reproduisent et forment un terrier de 16 lapins après 3 mois, quand a lieu le Jugement dernier ?

Projet appliqué

Calcul différentiel et intégral et base-ball

Dans ce projet nous examinons trois parmi les nombreuses applications du calcul différentiel et intégral au base-ball. La physique de ce jeu, et plus spécialement, l'impact entre la balle et la batte, est assez complexe et sa modélisation est présentée en détail dans le livre de Robert Adair, *The Physics of Baseball* (New York : Harper and Row, 1990).

Emplacement du batteur

Une vue d'en haut de la position d'une batte de base-ball, prise tous les cinquantièmes de seconde pendant une frappe habituelle (Adapté de *The Physics of Baseball*).

1. Vous serez sans doute surpris d'apprendre que l'impact entre la balle et la batte ne dure qu'un millième de seconde environ. Nous calculons la force moyenne exercée sur la batte pendant l'impact, en calculant d'abord la variation du moment de la balle. Le *moment* p d'un objet est le produit de sa masse m et de sa vitesse v, soit $p = mv$. Supposons qu'un objet, se déplaçant en ligne droite, soit poussé par une force $F = F(t)$, fonction continue du temps.

a) Montrez que la variation du moment dans l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ est égale à l'intégrale de F de t_0 à t_1 ; c'est-à-dire, montrez que :

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)dt.$$

Cette intégrale est appelée l'*impulsion* de la force sur l'intervalle de temps.

b) Le lanceur lance la balle à la vitesse de 144 km/h vers le batteur, qui renvoie la balle en ligne droite vers le lanceur. La balle est en contact avec la batte durant 0,001 s et quitte la batte à la vitesse de 180 km/h. Une balle de base-ball pèse 142 g.

- Calculer la variation du moment de la balle.
- Calculer la force moyenne sur la batte.

2. Nous nous intéressons maintenant au travail nécessaire pour lancer la balle à 164 km/h en examinant d'abord l'énergie cinétique. L'*énergie cinétique* K d'un objet de masse m et de vitesse v est donnée par $K = \frac{1}{2}mv^2$. Supposons qu'un objet de masse m, se déplaçant en ligne droite, soit poussé par une force $F = F(s)$ qui dépend de sa position s. Selon la deuxième loi de Newton

$$F(s) = ma = m\frac{dv}{dt},$$

où v et a désignent respectivement la vitesse et l'accélération de l'objet.

a) Montrez que le travail fait en déplaçant l'objet de la position s_0 à la position s_1 est égal à la variation de son énergie cinétique ; c'est-à-dire, montrez que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)ds = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

où $v_0 = v(s_0)$ et $v_1 = v(s_1)$ sont les vitesses de l'objet dans les positions s_0 et s_1.
Suggestion : par la règle de dérivation des fonctions composées,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}.$$

b) Combien de joules sont nécessaires pour lancer une balle de base-ball à la vitesse de 164 km/h ?

3. a) Un joueur arrête une balle à une distance de 90 m de la base initiale (où se trouve le receveur) et la lance directement au receveur à la vitesse de 30 m/s. Supposons que, à cause de la résistance de l'air, la vitesse de la balle suive l'équation différentielle $dv/dt = -v/10$. Combien de temps faut-il pour que la balle atteigne la base initiale ? (Ne pas tenir compte de la composante verticale de la trajectoire de la balle.)

b) L'entraîneur d'une équipe se demande si la balle ne pourrait pas arriver plus vite à la base initiale en la faisant transiter par un joueur intermédiaire, situé entre le joueur extérieur et la base. Ce joueur intermédiaire reçoit la balle, se retourne et la lance au receveur à une vitesse de 32 m/s. L'entraîneur estime à une demi-seconde le temps qu'il faut pour recevoir la balle, se retourner et la relancer. À quelle distance de la base initiale doit se placer le joueur intermédiaire pour minimiser le temps total du parcours de la balle ? Est-ce que l'entraîneur doit conseiller un lancer direct ou indirect ? Et quelle décision prendre si le joueur intermédiaire lance la balle à une vitesse de 35 m/s ?

c) Pour quelle vitesse de lancement du joueur intermédiaire les deux solutions (lancer direct ou indirect) sont-elles équivalentes du point de vue temps ?

7.6 L'équation logistique

Le modèle de croissance d'une population que nous allons étudier en détail dans cette section est plus sophistiqué que le modèle exponentiel. À cet effet, nous allons mettre en œuvre toutes les techniques dont nous disposons—les champs de directions de la section 7.2, la méthode d'Euler de la section 7.3 et la solution explicite de l'équation différentielle à variables séparées de la section 7.4. Nous proposerons dans les exercices d'autres modèles possibles dont certains tiennent compte de prélèvements ou de croissance saisonnière.

■ Le modèle logistique

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer dans la section 7.1, souvent, une population croît exponentiellement au début, puis se stabilise petit à petit et tend vers sa capacité maximale à cause de ressources limitées. On suppose donc, si $P(t)$ désigne l'effectif de la population au temps t, que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{si } P \text{ est petit.}$$

Cela revient à dire que le taux de croissance, du moins au début, est à peu près proportionnel à l'effectif. En d'autres mots, le taux de croissance relatif est presque constant tant que la population ne compte que peu d'individus. Cependant, nous voulons aussi refléter le fait que le taux de croissance relatif diminue lorsque la population P augmente et devient même négatif lorsque P dépasse sa capacité maximale K, ou maximum que l'environnement est capable de supporter à long terme. L'expression la plus simple du taux de croissance moyen qui reflète ces suppositions est

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right).$$

En multipliant par P les deux membres, on arrive à l'**équation différentielle logistique** :

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right).} \qquad (1)$$

Au vu de l'équation 1, on peut dire d'emblée que, si P est petit comparé à K, le rapport P/K est proche de 0 et $dP/dt \approx kP$. Par contre, si $P \to K$ (la population approche de sa capacité maximale), alors $P/K \to 1$ et donc $dP/dt \to 0$. Il est encore possible de savoir, directement à partir de l'équation 1, si la solution croît ou décroît. Si la valeur de P est située entre 0 et K, le membre de droite de l'équation est positif de sorte que $dP/dt > 0$ et la population augmente. Par contre, si la valeur de P est supérieur à la capacité maximale ($P > K$), alors $1 - P/K$ est négatif et la population diminue.

■ Par les champs de directions

Commençons l'étude plus approfondie de l'équation différentielle logistique en regardant ce qu'apporte un champ de directions.

EXEMPLE 1 ■ Dessinez un champ de directions de l'équation logistique avec $k = 0{,}08$ et capacité maximale $K = 1000$. Que pouvez-vous en déduire au sujet des solutions ?

SOLUTION L'équation logistique s'écrit dans ce cas

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right).$$

La figure 1 montre comment se présente un champ de directions de cette équation, dans le premier quadrant seulement, car des populations négatives n'ont pas de sens et que seules les valeurs positives de t sont à considérer.

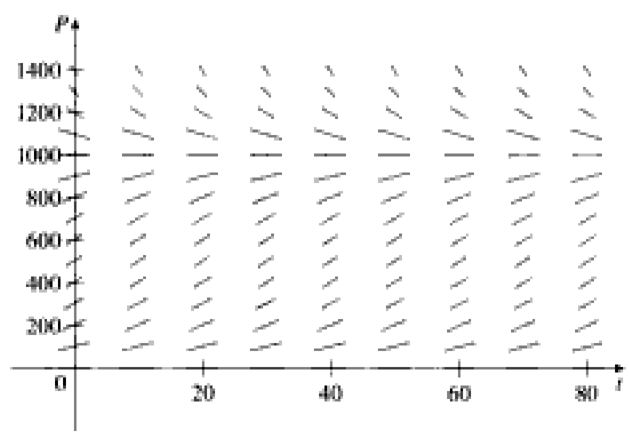


FIGURE 1
Le champ de directions de l'équation logistique de l'exemple 1

L'équation logistique est autonome (dP/dt ne dépend que de P et non de t) ce qui entraîne que les pentes sont les mêmes le long de n'importe quelle horizontale. Comme on s'y attendait, les pentes sont positives pour $0 < P < 1000$ et négatives pour $P > 1000$.

En outre, les pentes sont faibles lorsque P est proche de 0 ou de 1000 (la portée maximale). Remarquez encore que les solutions s'éloignent de la solution stationnaire $P = 0$ et se dirigent vers la solution stationnaire $P = 1000$.

La figure 2 montre des courbes intégrales tracées en suivant le champ de directions depuis $P(0) = 100$, $P(0) = 400$ et $P(0) = 1300$. Celles qui partent en dessous de $P = 1000$ sont croissantes tandis que celles qui partent au-dessus de $P = 1000$ sont décroissantes. Les pentes sont plus grandes quand $P \approx 500$ et, par conséquent, les courbes intégrales qui démarrent en dessous de $P = 1000$ ont un point d'inflexion quand $P \approx 500$. Du reste, on peut démontrer que toutes les courbes qui partent en dessous de $P = 500$ ont un point d'inflexion quand $P = 500$ exactement (voyez l'exercice 9).

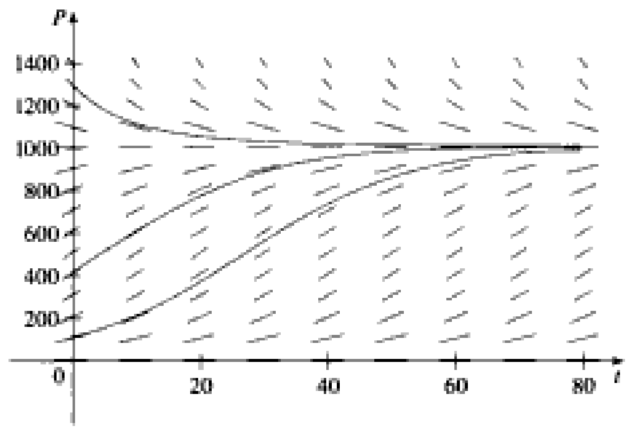


FIGURE 2
Courbes intégrales de l'équation logistique de l'exemple 1

Par la méthode d'Euler

Attachons-nous maintenant à obtenir des estimations numériques des solutions de l'équation différentielle logistique à des moments particuliers en exploitant la méthode d'Euler.

EXEMPLE 2 ■ Estimez les populations $P(40)$ et $P(80)$ où P est la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100.$$

en appliquant la méthode d'Euler pour des pas de 20, 10, 5, 1 et 0,1.

SOLUTION Pour $h = 20$, $t_0 = 0$, $P_0 = 100$ et

$$F(t, P) = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right),$$

on obtient, dans les même notations qu'à la section 7.3,

$$P_1 = 100 + 20F(0; 100) = 244$$

$$P_2 = 244 + 20F(20; 244) \approx 539{,}14$$

$$P_3 = 539{,}14 + 20F(40; 539{,}14) \approx 936{,}69$$

$$P_4 = 936{,}69 + 20F(60; 936{,}69) \approx 1031{,}57$$

Nos estimations des populations en $t = 40$ et $t = 80$ sont pour le moment

$$P(40) \approx 539 \qquad P(80) \approx 1032.$$

Avant d'envisager des pas plus petits, il convient de programmer une calculatrice ou un ordinateur. Les résultats sont rassemblés dans la table.

Pas	Estimation d'Euler de $P(40)$	Estimation d'Euler de $P(80)$
20	539	1032
10	647	997
5	695	991
1	725	986
0,1	731	985

La figure 3 montre la représentation graphique des approximations d'Euler pour les pas $h = 10$ et $h = 1$. Celle qui correspond à $h = 1$ ressemble manifestement beaucoup plus à la courbe que nous avions dessinée en suivant le champ de directions dans la figure 2.

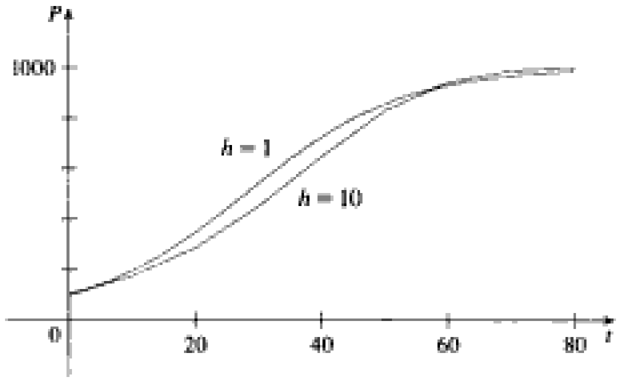


FIGURE 3
Approximations d'Euler de la courbe intégrale de l'exemple 2

■ La solution analytique

Comme l'équation logistique (1) est à variables séparées, on peut la résoudre explicitement par la méthode de la section 7.4. En intégrant les deux membres de

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

on a

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/K)} = \int k\,dt. \tag{2}$$

En vue d'intégrer le membre de gauche, on écrit

$$\frac{1}{P(1 - P/K)} = \frac{K}{P(K - P)}.$$

Cette expression devient plus simple lorsqu'elle est écrite sous la forme :

$$\frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}.$$

La méthode de décomposition en éléments simples (annexe F) est une des manières classiques de procéder dans ce type de problème.

ainsi que vous pouvez le vérifier en effectuant la somme des fractions du membre de droite. L'équation 2 devient alors

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = \int k\, dt,$$

et les calculs se poursuivent comme suit

$$\ln|P| - \ln|K - P| = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{K - P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{K - P}{P}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

3 $$\frac{K - P}{P} = Ae^{-kt},$$

où $A = \pm e^{-C}$. La résolution de l'équation 3 par rapport à P conduit à

$$\frac{K}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

ou finalement

$$P = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}.$$

En vue de déterminer la valeur de A, on pose $t = 0$ dans l'équation 3. Lorsque $t = 0$, alors $P = P_0$ (la population initiale) :

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A.$$

La solution de l'équation logistique est donc

4 $$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{où } A = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

EXEMPLE 3 ■ Écrivez la solution du problème de Cauchy

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100.$$

et utilisez-la pour déterminer $P(40)$ et $P(80)$. À quel moment la taille de la population atteindra-t-elle 900 ?

SOLUTION Cette équation différentielle est une équation logistique avec $k = 0{,}08$, capacité maximale $K = 1000$ et population initiale $P_0 = 100$. Selon l'équation 4, l'expression de la population en fonction du temps t est

$$P(t) = \frac{1000}{1 + Ae^{-0{,}08t}} \qquad \text{où } A = \frac{1000 - 100}{100} = 9.$$

D'où

$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0{,}08t}}.$$

La population au temps $t = 40$ et $t = 80$ se monte respectivement à

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3,2}} \approx 731,6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6,4}} \approx 985,3.$$

Comparez ces valeurs avec les estimations obtenues par la méthode d'Euler dans l'exemple 2.

$P(40) \approx 731 \qquad P(80) \approx 985.$

L'effectif de 900 est atteint lorsque

$$\frac{1000}{1 + Ae^{-0,08t}} = 900.$$

La résolution de cette équation par rapport à t passe par les calculs suivants :

$$1 + 9e^{-0,08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0,08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0,08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0,08} \approx 54,9$$

Comparez la solution de la figure 4 avec la plus basse des courbes que nous avons dessinées en suivant le champ de directions dans la figure 2.

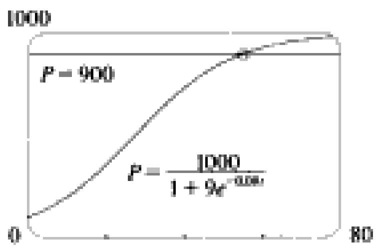


FIGURE 4

La population se monte donc à 900 quand t vaut approximativement 55. À titre de vérification, nous faisons dessiner la courbe intégrale dans la figure 4 et repérons où elle coupe la droite $P = 900$. Le curseur indique $t \approx 55$.

■ Comparaison entre les modèles de croissance naturelle et logistique

Dans les années'30, le biologiste G. F. Gause mena une expérience sur le protozoaire *Paramecium* et utilisa l'équation logistique pour modéliser ses données. La table que voici reprend les effectifs journaliers de la population de protozoaires. Il estima le taux de croissance relatif initial à 0,7944 et la capacité maximale à 64.

t (en jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observée)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

EXEMPLE 4 ■ Déterminez les modèles exponentiel et logistique des données de Gause. Comparez les valeurs annoncées avec les valeurs observées et commentez la concordance.

SOLUTION Étant donné le taux relatif de croissance $k = 0,7944$ et la population initiale $P_0 = 2$, le modèle exponentiel s'écrit

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0,7944t}.$$

Gause utilisa la même valeur de k pour son modèle logistique. (C'est raisonnable vu que $P_0 = 2$ est petit comparé à la capacité maximale $K = 64$. L'équation

$$\frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt}\bigg|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

montre que la valeur de k du modèle logistique est très proche de celle du modèle exponentiel.)

D'après l'équation 4, la solution de l'équation logistique est

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0{,}7944t}}$$

où

$$A = \frac{K - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31.$$

D'où

$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0{,}7944t}}.$$

Nous disposons maintenant dans la table les valeurs observées et les valeurs (arrondies à l'entier le plus proche) annoncées par le modèle logistique et le modèle exponentiel et nous les comparons.

t (en jours)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observée)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modèle logistique)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modèle exponentiel)	2	4	10	22	48	106	...										

La lecture de la table et l'observation de la courbe dans la figure 5 montrent que les résultats du modèle exponentiel sont comparables à ceux du modèle logistique plus sophistiqué pour les trois ou quatre premiers jours. À partir de $t = 5$ cependant le modèle exponentiel est désespérément inexact, alors que le modèle logistique colle assez bien aux observations.

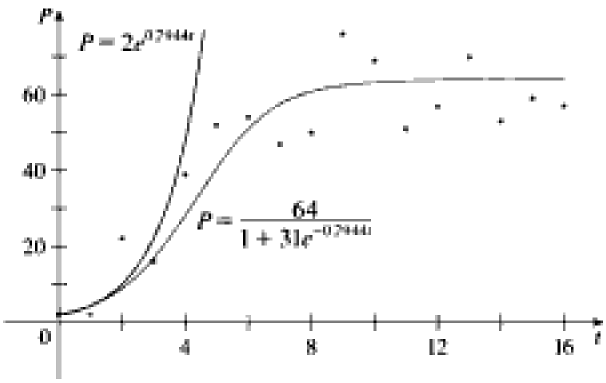


FIGURE 5
Les modèles exponentiel et logistique pour les données relatives au *Paramecium*

■ D'autres modèles de la croissance d'une population

D'autres modèles de la croissance d'une population existent à côté de la loi de croissance naturelle et de l'équation différentielle logistique. L'exercice 14 propose d'examiner la fonction de croissance de Gompertz et les exercices 15 et 16 étudient des modèles de croissance saisonniers.

Parmi les autres modèles, deux sont des variantes du modèle logistique. L'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - c,$$

a été utilisée pour modéliser des populations sujettes à des « prélèvements » d'une sorte ou d'une autre. (Pensez à une population de poissons, dont certains sont pêchés régulièrement.) Cette équation est étudiée dans les exercices 11 et 12.

Dans le cas de certaines espèces, il faut incorporer dans le modèle un seuil minimal m d'effectif sous lequel l'espèce est menacée de disparition. (Les adultes ne réussissent pas à trouver le partenaire convenable.) De telles populations sont modélisées par l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right),$$

où le facteur supplémentaire $1 - m/P$ prend en compte les conséquences d'une population clairsemée (voyez l'exercice 13).

7.6 Exercices

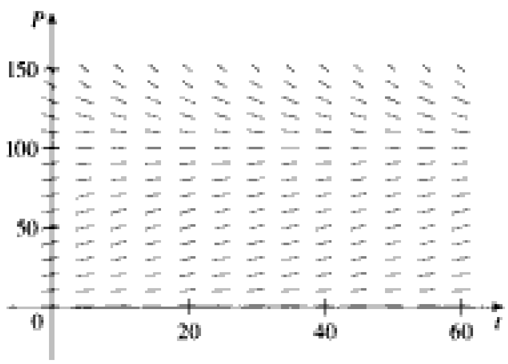
1. On considère une population qui se développe selon l'équation logistique

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}05P - 0{,}0005P^2,$$

où t est mesuré en semaines.

a) Quelle est la capacité maximale ? Quelle est la valeur de k ?

b) Voici un champ de directions de cette équation. Où les pentes sont-elles nulles ? Où sont-elles les plus fortes ? Quelles solutions sont croissantes ? Quelles solutions sont décroissantes ?



c) Suivez le champ de directions pour esquisser des solutions pour les populations initiales 20, 40, 60, 80, 120 et 140. Qu'est-ce que ces solutions ont en commun ? En quoi diffèrent-elles ? Quelles solutions présentent des points d'inflexion ? À quel niveau de population se présentent-ils ?

d) Quelles sont les solutions d'équilibre ? Quel rapport ont les autres solutions avec ces solutions d'équilibre ?

Une population grandit en suivant un modèle logistique caractérisé par une capacité maximale de 6000 et $k = 0{,}0015$ par an.

a) Écrivez l'équation différentielle logistique qui correspond à ces données.

b) Tracez un champ de directions (soit à la main, soit à l'aide d'un logiciel ad hoc). Que pouvez-vous en déduire au sujet des courbes intégrales ?

c) Prenez le champ de directions comme guide pour esquisser les courbes intégrales correspondant aux populations initiales 1000, 2000, 4000 et 8000. Qu'observez-vous au sujet de la concavité de ces courbes ? Quelle est la signification des points d'inflexion ?

d) Programmez une calculatrice ou un ordinateur pour qu'il calcule selon la méthode d'Euler avec un pas $h = 1$ une estimation de la population après 50 ans dans le cas d'une population initiale de 1000.

e) Écrivez une expression de la population en fonction du temps t, dans le cas où la population initiale est 1000. Quel effectif cette formule prévoit-elle après 50 ans ? Comparez avec votre estimation dans la partie d).

f) Faites un graphique de la formule de la partie e) et comparez-le avec la courbe intégrale tracée en réponse à la partie c).

3. La pêche des flétans du Pacifique est modélisée par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

où $y(t)$ est la biomasse (masse totale de l'ensemble de la population), mesurée en kilogrammes au moment t (mesuré en années). La capacité maximale est estimée à $K = 8 \times 10^7$ kg et $k = 0{,}71$ par an.

a) Calculez la biomasse un an plus tard, si $y(0) = 2 \times 10^7$ kg.

b) Combien de temps faudra-t-il pour que la biomasse atteigne 4×10^7 kg ?

4. La table reprend le nombre de cellules d'une levure mise en culture.

Temps (en heures)	Cellules de levure
0	18
2	39
4	80
6	171
8	336

Temps (en heures)	Cellules de levure
10	509
12	597
14	640
16	664
18	672

a) Placez les données dans un système d'axes et jugez de la capacité maximale de la population de cellules de levure.

b) Déduisez des données un taux de croissance relatif initial.

c) Formulez les modèles exponentiel et logistique qui s'adaptent à ces données.

d) Comparez les valeurs théoriques de ces modèles avec les valeurs observées, en dressant une table et graphiquement. Que pensez-vous de la manière dont ces modèles s'ajustent aux données ?

e) Utilisez le modèle logistique pour estimer le nombre de cellules après 7 heures.

5. La population mondiale s'élevait à 5,3 milliards en 1990. Le taux des naissances en 1990 se situe entre 35 et 40 millions par an et le taux des décès, entre 15 et 20 millions par an. On fait l'hypothèse que la Terre ne peut supporter que 100 milliards d'êtres humains.

a) Écrivez l'équation différentielle logistique qui correspond à ces données. (Parce que la population initiale est faible comparée à la capacité maximale, vous pouvez prendre k égal à l'estimation du taux de croissance relatif initial.)

b) D'après ce modèle quelle sera la population mondiale en 2050, 2100 et 2500 ?

c) Que deviennent ces prédictions si la capacité maximale n'est que de 50 milliards ?

6. a) À votre avis, quelle est la population maximale que le territoire des États-Unis peut supporter ? Formulez un modèle logistique de la population des U.S.A qui tient compte de votre supposition initiale et du fait qu'en 1980, elle se montait à 228 millions.

b) Déterminez la valeur de k dans votre modèle compte tenu du fait qu'en 1990 la population était de 250 millions.

c) D'après votre modèle, combien d'américains y aura-t-il en 2100 et en 2200 ?

d) Quand le nombre d'américains dépassera-t-il les 300 millions ?

7. On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation est proportionnelle au produit de la fraction y de ceux qui sont au courant de la rumeur par la fraction de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.

a) Écrivez une équation différentielle satisfaite par y.

b) Résolvez cette équation différentielle.

c) Une petite ville compte 1000 habitants. À 8 h du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. À midi, la moitié de la ville est au courant. Quand est-ce que 90 % de la population saura ?

8. Des biologistes ont empoissonné un lac de 400 unités et estiment que la capacité maximale de ce lac pour cette espèce est de 10 000 unités. Le nombre de poissons a triplé durant la première année.

a) Cherchez une expression de l'effectif de la population après t années si cette population est conforme au modèle logistique.

b) Combien de temps faudra-t-il pour qu'il y ait 5000 poissons dans le lac ?

9. a) Démontrez que si P satisfait à l'équation logistique (1), alors

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{2P}{K}\right)$$

b) Déduisez-en que c'est au moment où elle atteint la moitié de sa capacité maximale qu'une telle population croît le plus vite.

10. Pour une valeur fixée de K (par exemple, $K = 10$), la famille des fonctions logistiques décrites par l'équation 4 dépend de la valeur initiale P_0 et de la constante de proportionnalité k. Dessinez quelques-unes des fonctions de cette famille. Comment les graphiques changent-ils en fonction de P_0 ? Et lorsque k varie ?

11. On modifie l'équation différentielle logistique de l'exemple 1 de la manière suivante :

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15.$$

a) On désigne par $P(t)$ une population de poissons au moment t, où t est mesuré en semaines. Expliquez la signification du terme -15.

b) Construisez un champ de directions de cette équation différentielle.

c) Quelles sont les solutions d'équilibre ?

d) Suivez le champ de directions pour dessiner plusieurs courbes intégrales. Décrivez l'évolution de la population de poissons en fonction de diverses populations initiales.

e) Résolvez l'équation différentielle explicitement, soit par la méthode de décomposition en éléments simples, soit à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique. Choisissez les populations initiales 200 et 300. Dessinez les solutions et comparez avec vos courbes de la partie d).

12. Considérez l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

comme modèle d'une popultion de poissons, où t est mesuré en semaines et où c est une constante.

a) Servez-vous d'un logiciel de calcul symbolique pour dessiner les champs de directions pour différentes valeurs de c.

b) Selon les champs de directions de la partie a), déterminez les valeurs de c pour lesquelles il y a au moins une solution d'équilibre. Pour quelles valeurs de c la population de poissons disparaît-elle certainement ?

c) Utilisez l'équation différentielle pour démontrer ce que vous avez observé graphiquement.

d) Quel prélèvement hebdomadaire maximum conseilleriez-vous ?

13. Beaucoup d'observations tendent à prouver que certaines espèces seraient en voie d'extinction si leur effectif passait en dessous d'un seuil minimal m. Ce fait peut être inséré dans l'équation logistique par l'adjonction du facteur $(1 - m/P)$. Il en résulte un modèle logistique modifié traduit par l'équation

différentielle

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right).$$

a) Utilisez l'équation différentielle pour démontrer que n'importe quelle solution est croissante si $m < P < K$ et décroissante si $0 < P < m$.

b) Dans le cas où $k = 0{,}08$, $K = 1000$ et $m = 200$, dessinez une champ de directions et suivez-le pour tracer quelques courbes intégrales. Décrivez l'évolution de la population pour quelques populations initiales différentes. Quelles sont les solutions d'équilibre ?

c) Résolvez l'équation différentielle explicitement, soit par la méthode de décomposition en éléments simples, soit à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique. Choisissez une population initiale P_0.

d) Utilisez la solution de la partie c) pour montrer que si $P_0 < m$, l'espèce va disparaître. (*Suggestion :* montrez que le numérateur dans votre expression de $P(t)$ est nul pour une certaine valeur de t.)

14. Un autre modèle de fonction de croissance d'une population limitée est donné par la **fonction de Gompertz**, qui est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dP}{dt} = c \ln\left(\frac{K}{P}\right) P,$$

où c est une constante et K la capacité maximale.

a) Résolvez l'équation différentielle.

b) Calculez $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

c) Tracez la fonction de croissance de Gompertz dans le cas $K = 1000$, $P_0 = 100$ et $c = 0{,}05$ et comparez avec la fonction logistique de l'exemple 3. En quoi se ressemblent-elles ? En diffèrent-elles ?

d) De l'exercice 9, nous tenons que la fonction logistique croît le plus vite quand $P = K/2$. Déduisez de l'équation différentielle de Gompertz que la fonction de Gompertz croît le plus rapidement quand $P = K/e$.

15. Dans un **modèle de croissance saisonnier**, il faut qu'intervienne une fonction périodique qui rende compte des variations saisonnières du taux de croissance. Ces variations sont dues, par exemple, à une disponibilité périodique de la nourriture.

a) Cherchez la solution du modèle de croissance saisonnier

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0,$$

où k, r et ϕ sont des constantes positives.

b) En dessinant la solution pour plusieurs valeurs de k, r et ϕ, expliquez comment les valeurs de k, r et ϕ affectent la solution. Que pouvez-vous dire de $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

16. L'équation différentielle de l'exercice 15 est changée en

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0.$$

a) Résolvez l'équation différentielle à l'aide d'une table de primitives ou d'un logiciel de calcul symbolique.

b) Dessinez la solution pour plusieurs valeurs de k, r et ϕ. Comment les valeurs de k, r et ϕ affectent-elles la solution ? Que pouvez-vous dire de $\lim_{t\to\infty} P(t)$ dans ce cas ?

7.7 Les systèmes proie-prédateur

L'éventail de modèles de croissance envisagés jusqu'ici concernait une seule espèce vivant seule dans un certain milieu. Dans cette section, nous allons aborder des modèles plus réalistes qui tiennent compte de l'interaction de deux espèces dans le même habitat. Nous allons voir que ces modèles prennent la forme d'un couple d'équations différentielles liées.

La première situation est celle dans laquelle une espèce, appelée la *proie*, dispose de nourriture en suffisance et l'autre espèce, appelée le *prédateur*, se nourrit de la proie. Lapins et loups dans une forêt isolée, petits poissons et requins, pucerons et coccinelles, bactéries et amibes sont des exemples de situations proie-prédateur. Notre modèle aura deux variables indépendantes, toutes deux fonctions du temps. Nous appelons $L(t)$ (L pour lapins) le nombre de proies et $R(t)$ (R pour renards) le nombre de prédateurs au temps t.

En l'absence de prédateurs, la nourriture suffisante engendrerait une croissance exponentielle de la population des proies, c'est-à-dire,

$$\frac{dL}{dt} = kL \qquad \text{où } k \text{ est une constante positive.}$$

En l'absence de proies, la population des prédateurs chuterait selon un taux proportionnel à sa taille, c'est-à-dire,

$$\frac{dR}{dt} = -rR \qquad \text{où } r \text{ est une constante positive.}$$

Les deux espèces en présence, on peut supposer que la principale cause de décès des proies est d'être mangées par le prédateur et que les taux de naissance et de décès des prédateurs dépendent de la quantité de nourriture disponible, à savoir le nombre de proies. Il est raisonnable de supposer que les deux espèces se rencontrent à un rythme proportionnel à la taille des deux populations, proportionnel donc au produit LR. (Plus les populations en présence sont nombreuses, plus les occasions de rencontre se multiplient.) Voici un système de deux équations différentielles qui incluent ces hypothèses :

R représente le prédateur. L représente la proie.

1

$$\frac{dL}{dt} = kL - aLR$$

$$\frac{dR}{dt} = -rR + bLR$$

où k, r, a et b sont des constantes positives. Remarquez que le terme $-aLR$ tempère le taux de croissance naturelle des proies tandis que le terme bLR favorise le taux de croissance naturelle des prédateurs.

Les équations de Lotka-Volterra furent proposées comme modèle pour expliquer les variations de population de requins et de petits poissons dans la mer Adriatique par le mathématicien italien Vito Volterra (1860-1940).

Les équations (1) sont connues sous le nom d'**équations proie-prédateur** ou **équations de Lotka-Volterra**. Une **solution** de ce système d'équations comprend une paire de fonctions $L(t)$ et $R(t)$ qui décrivent les populations de proies et de prédateurs en fonction du temps. Étant donné que le système est couplé (L et R interviennent dans les deux équations) il n'est pas correct de résoudre l'une des équations, puis l'autre ; il faut les résoudre simultanément. Malheureusement, il est souvent difficile d'obtenir des formules explicites de L et de R en fonction de t. Néanmoins ces équations se laissent étudier graphiquement.

EXEMPLE 1 ■ Des populations de lapins et de renards sont décrites par les équations de Lotka-Volterra avec $k = 0{,}08$, $a = 0{,}001$, $r = 0{,}02$ et $b = 0{,}00002$.

a) Déterminez les solutions constantes (appelées **solutions d'équilibre**) et interprétez la réponse.

b) Déduisez du système d'équations différentielles une expression de dR/dL.

c) Dessinez un champ de directions de l'équation différentielle résultante dans le plan OLR. Prenez ce champ de directions comme guide pour esquisser quelques courbes intégrales.

d) On suppose qu'à un moment donné il y a 1000 lapins et 40 renards. Dessinez la solution correspondante et utilisez-la pour décrire les variations dans les tailles des deux populations.

e) Utilisez la partie d) pour tracer les courbes de L et R en fonction de t.

SOLUTION

a) Avec les valeurs données des constantes, les équations de Volterra s'écrivent

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}08L - 0{,}001LR$$
$$\frac{dR}{dt} = -0{,}02R + 0{,}00002LR$$

Quand les deux dérivées sont nulles, c'est-à-dire quand

$$L' = L(0{,}08 - 0{,}001R) = 0$$

$$R' = R(-0{,}02 + 0{,}00002L) = 0,$$

les deux fonctions L et R seront constantes. Une des solutions de ce système est $L = 0$ et $R = 0$. (C'est tout à fait compréhensible : s'il n'y a ni lapin ni loup, les populations n'augmenteront certainement pas.) L'autre solution constante est

$$R = \frac{0{,}08}{0{,}001} = 80 \qquad L = \frac{0{,}02}{0{,}00002} = 1000.$$

Les populations stationnaires se composent de 80 renards et de 1000 lapins. Cela veut dire que 1000 lapins suffisent à maintenir une population constante de 80 renards. Il n'y a ni trop de renards (ce qui ferait diminuer le nombre de lapins), ni trop peu de renards (ce qui ferait augmenter le nombre de lapins).

b) La Règle de dérivation des fonctions composées permet d'éliminer la variable t :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dL}\frac{dL}{dt},$$

de sorte que

$$\frac{dR}{dL} = \frac{dR/dt}{dL/dt} = \frac{-0{,}02R + 0{,}00002LR}{0{,}08L - 0{,}001LR}.$$

c) En regardant R comme une fonction de L, cette dernière équation est une équation différentielle

$$\frac{dR}{dL} = \frac{-0{,}02R + 0{,}00002LR}{0{,}08L - 0{,}001LR}.$$

Le champ de directions de cette équation différentielle apparaît dans la figure 1 et dans la figure 2 sont tracées quelques courbes intégrales qui suivent les pentes qu'il indique en chaque point. En parcourant une courbe intégrale, on peut observer l'évolution au cours du temps de la relation entre L et R. Il s'avère que

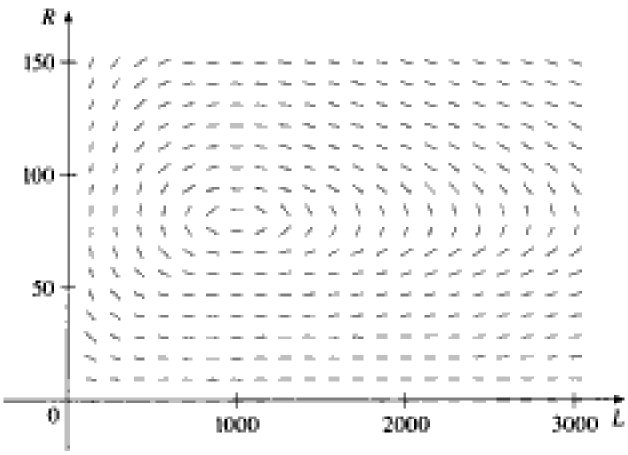


FIGURE 1 Le champ de directions du système proie-prédateur

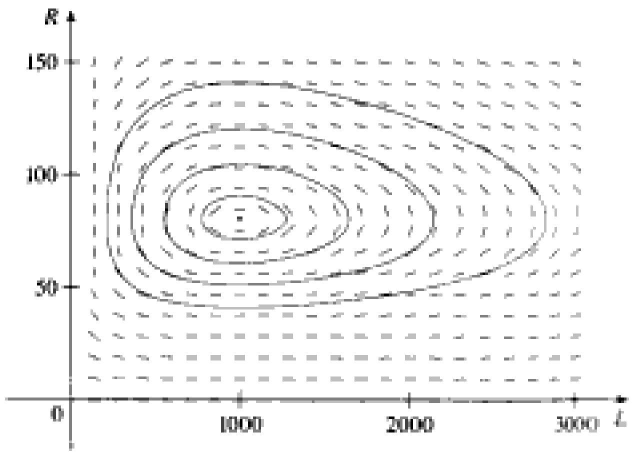


FIGURE 2 Portrait de phase du système

ces courbes sont fermées au sens où, en se déplaçant sur l'une des courbes, on revient toujours au même point. De plus, il n'est pas difficile d'observer que le point $(1000, 80)$ est à l'intérieur de toutes ces courbes intégrales. Ce point est appelé *un point d'équilibre* parce qu'il correspond à la solution d'équilibre $L = 1000$ et $R = 80$.

Lorsqu'on représente des solutions d'un système d'équations différentielles dans une figure comme la figure 2, on parle du plan OLR comme du plan de phase et on appelle les courbes intégrales, les **orbites**. Une orbite est donc un chemin tracé par les solutions (L, R) au cours du temps. Un **portrait de phase** comporte des points d'équilibre et des orbites représentatives, comme dans la figure 2.

d) Supposer qu'à un moment donné il y a 1000 lapins et 40 renards revient à considérer la courbe intégrale qui passe par le point $P_0(1000, 40)$. La figure 3 montre cette orbite sans le fond du champ de directions. Au départ de P_0, au fil du temps, tourne-t-on sur l'orbite dans le sens des aiguilles d'une montre ou l'inverse ? Pour le savoir, on remplace L par 1000 et R par 40 dans la première équation différentielle et on obtient

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}08(1000) - 0{,}001(1000)(40) = 80 - 40 = 40.$$

Puisque $dL/dt > 0$, on conclut que L croît en P_0 et donc que l'orbite est parcourue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

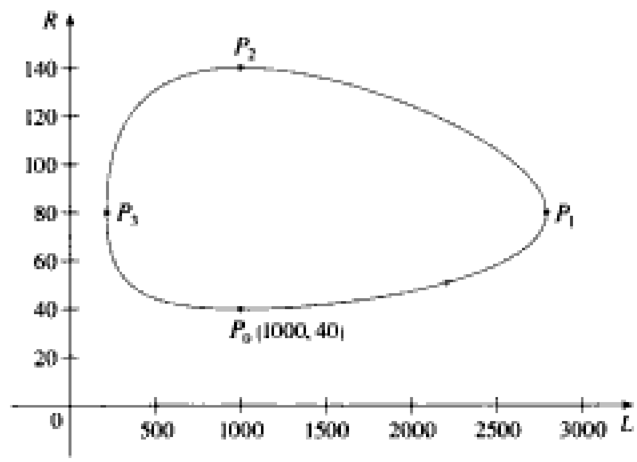


FIGURE 3
L'orbite qui passe par (1000, 40)

Nous voyons qu'en P_0 les renards ne sont pas assez nombreux pour maintenir les populations en équilibre et donc la population de lapins est en augmentation. Il s'ensuit davantage de renards et en fin de compte il y a tellement de renards que les lapins ont du mal à les éviter. Le nombre de lapins se met à chuter (en P_1, où nous estimons que la population de lapins atteint son maximum aux alentours de 2800). De ce fait, un peu plus tard, la population de renards commence elle aussi à diminuer (en P_2, où $R = 1000$ et $W \approx 140$). C'est tout bénéfice pour les lapins qui recommencent à proliférer (en P_3, où $R = 80$ et $L \approx 210$). Par conséquent, la population de renards va finir par augmenter aussi. Cela se produit au moment où les populations sont revenues à leurs valeurs initiales $L = 1000$ et $R = 40$, et le cycle complet recommence.

e) Suite à la description dans la partie d) des croissances et décroissances successives des populatons de lapins et de renards, il est possible d'esquisser grossièrement les graphiques de $L(t)$ et de $R(t)$. Si on fait correspondre les points P_1, P_2 et P_3 dans la figure 3 aux temps t_1, t_2 et t_3, on arrive aux courbes de L et R de la figure 4.

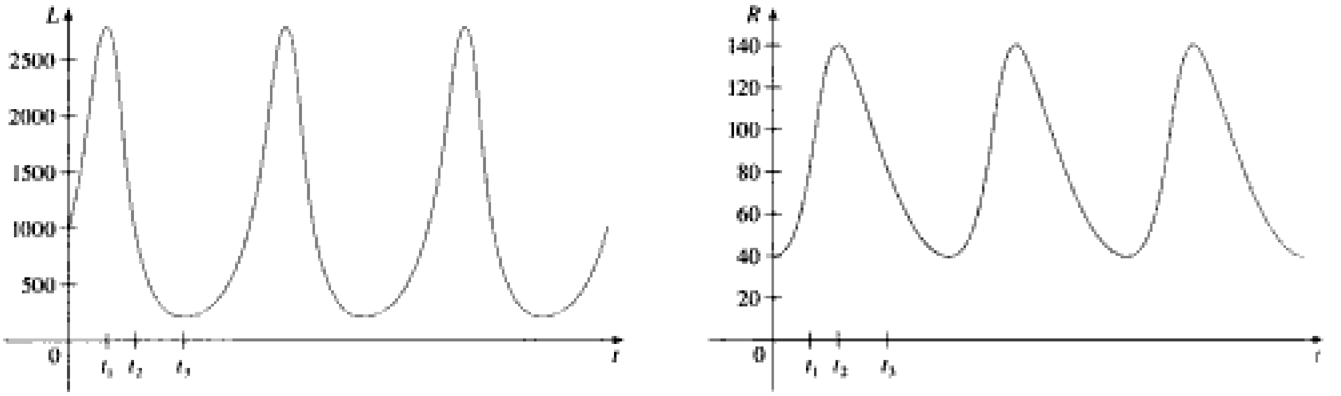


FIGURE 4

Les graphiques des populations de lapins et de renards en fonction du temps

Afin de comparer ces courbes, on les superpose dans un même système d'axes, mais avec des échelles différentes pour le nombre de lapins et de renards (voyez la figure 5). Remarquez que les lapins atteignent leur effectif maximum environ un quart de cycle avant les renards.

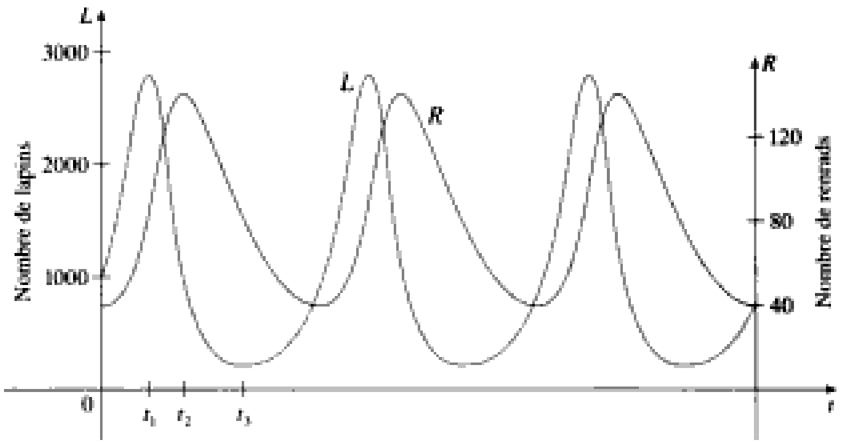


FIGURE 5

Comparaison des populations de lapins et de renards

Une part importante du processus de modélisation consiste, ainsi que nous le mentionnions déjà à la page 76, à interpréter nos conclusions mathématiques comme des prédictions réelles et à confronter les prédictions aux données réellement observées. La Compagnie Hudson's Bay, qui commença à faire du commerce de fourrure au Canada en 1670, détient des données qui remontent à 1840. La figure 6 montre des graphiques du nombre de fourrures de lièvre et de son prédateur, le lynx du Canada, échangées par la compagnie sur une période de 90 années. Vous pouvez constater que les oscillations couplées des populations de lièvres et de lynx, annoncées par le modèle de Lotka-Volterra, ont effectivement eu lieu et que la période de ces cycles est d'environ 10 ans.

Bien que le modèle relativement simple de Lotka-Volterra ait eu quelque succès pour expliquer l'évolution de populations couplées et pour faire des prédictions, des modèles plus sophistiqués ont vu le jour. Une façon de modifier les équations de Lotka-Volterra est de supposer, qu'en l'absence de prédateurs, la proie se développe en nombre suivant un modèle logistique de capacité maximale K. Alors le système (1) des

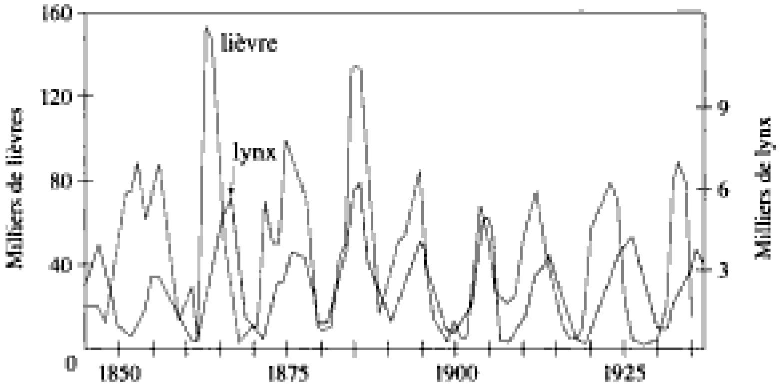


FIGURE 6
Abondance relative de lièvres et de lynx selon les archives de la compagnie Hudson's Bay

équations de Lotka-Volterra est remplacé par le système des équations différentielles

$$\frac{dL}{dt} = kL\left(1 - \frac{L}{K}\right) - aLR \qquad \frac{dR}{dt} = -rR + bLR$$

Ce modèle est étudié dans les exercices 9 et 10.

D'autres modèles ont encore été créés pour décrire et anticiper des niveaux de populations de deux espèces en concurrence sur les mêmes ressources ou au contraire solidaires d'un bien-être réciproque. Il est question de ces modèles dans l'exercice 2.

7.7 Exercices

1. Pour chaque système proie-prédateur, déterminez laquelle des variables x ou y désigne la taille de la population de proies ou de prédateurs. La prolifération des proies est-elle freinée seulement par la présence des prédateurs ou aussi par d'autres facteurs ? Les prédateurs se nourrissent-ils seulement des proies ou ont-ils d'autres sources de nourriture ? Expliquez.

a) $\dfrac{dx}{dt} = -0{,}05x + 0{,}0001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0{,}1y - 0{,}005xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}2x - 0{,}0002x^2 - 0{,}006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = -0{,}015y + 0{,}00008xy$

2. Chaque système d'équations différentielles est un modèle pour deux espèces qui, soit sont en concurrence sur les mêmes ressources, soit coopèrent en vue d'un bénéfice réciproque (par exemple, des plantes à fleurs et des insectes qui participent à la fécondation en transportant le pollen). Décidez si chaque système décrit une concurrence ou au contraire une coopération et expliquez pourquoi il s'agit d'un bon modèle. (Posez-vous la question de l'effet qu'aurait l'accroissement de la taille d'une espèce sur le taux de croissance de l'autre.)

a) $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}12x - 0{,}0006x^2 + 0{,}00001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0{,}08y + 0{,}00004xy$

b) $\dfrac{dx}{dt} = 0{,}15x - 0{,}0002x^2 - 0{,}0006xy$

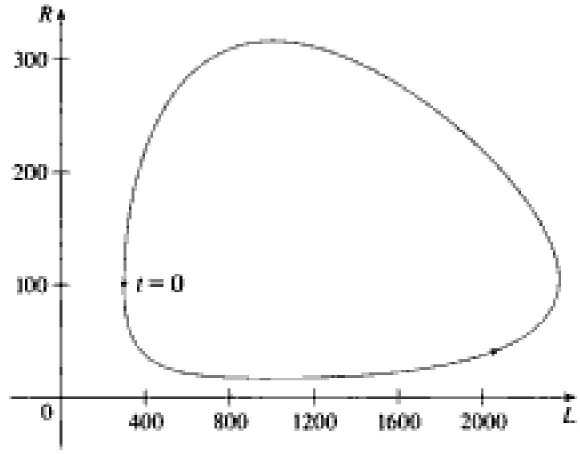
$\dfrac{dy}{dt} = 0{,}2y - 0{,}00008y^2 - 0{,}0002xy$

3-4 ■ Voici une orbite pour des populations de lapins (L) et de renards (R).

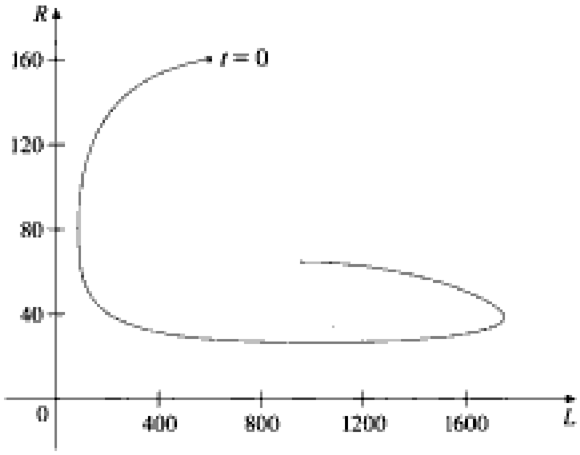
a) Décrivez les variations de taille dans le temps de chaque population.

b) Grâce à votre description essayez de tracer les courbes qui représentent cette évolution de L et de R en fonction de t.

3.

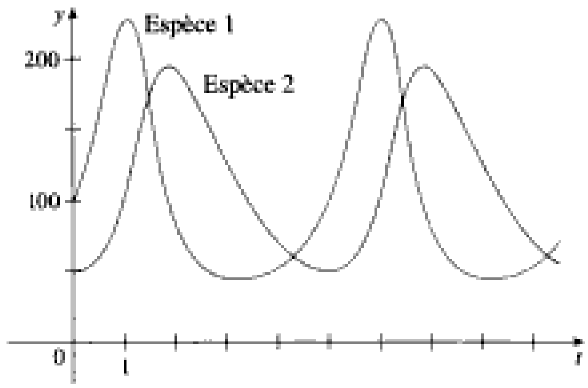


4.

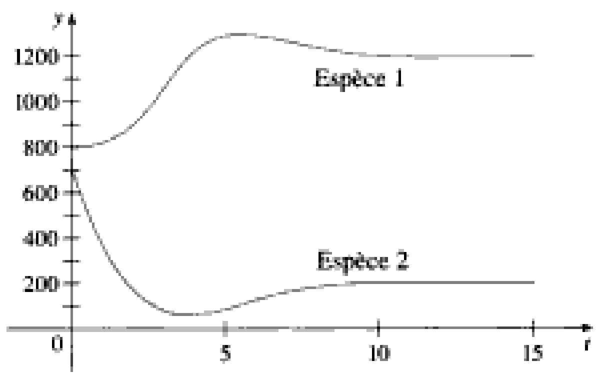


5-6 ■ Lisez les graphiques des populations de deux espèces pour en déduire une orbite correspondante.

5.



6.



7. Dans l'exemple 1 b), nous sommes arrivés à l'équation différentielle

$$\frac{dR}{dL} = \frac{-0{,}02R + 0{,}00002LR}{0{,}08L - 0{,}001LR}$$

pour décrire les populations de renards et de lapins. Montrez que

$$\frac{L^{0,02}R^{0,08}}{e^{0,00002L}e^{0,001R}} = C$$

où C est une constante, en résolvant cette équation différentielle à variables séparées.

Il n'est pas possible d'exprimer R comme une fonction explicite de L (ou vice versa). Si vous disposez d'un logiciel qui trace des graphiques de fonctions définies implicitement, commandez-lui la courbe intégrale qui passe par le point $(1000, 40)$ et comparez-la avec celle de la figure 3.

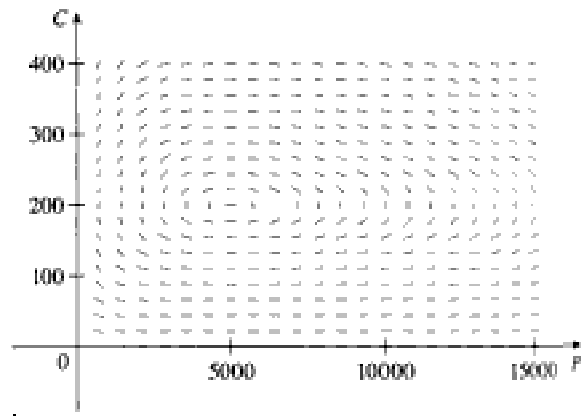
8. Des populations de pucerons et de coccinelles sont modélisées par les équations

$$\frac{dP}{dt} = 2P - 0{,}01PC$$
$$\frac{dC}{dt} = -0{,}5C + 0{,}0001PC$$

a) Déterminez les solutions d'équilibre et expliquez leur signification.

b) Calculez une expression de dC/dP.

c) Le champ de directions de l'équation différentielle de la partie b) figure ci-dessous. Utilisez-le pour esquisser un portrait de phase. Précisez ce que les orbites ont en commun



d) À un moment donné, appelé moment $t = 0$, il y a 1000 pucerons et 200 coccinelles. Dessinez l'orbite correspondante et utilisez-la pour décrire comment les deux populations évoluent.

e) Servez-vous de la partie d) pour tracer grossièrement l'allure des courbes représentatives des populations de pucerons et de coccinelles en fonction de t. Quel est le lien entre ces courbes ?

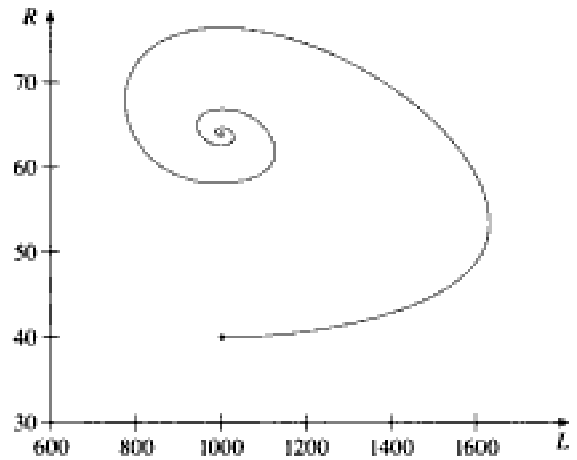
9. L'exemple 1 était consacré à l'étude des équations de Lotka-Volterra qui modélisent des populations de lapins et de renards. Modifions ces équations comme suit :

$$\frac{dL}{dt} = 0{,}08L(1 - 0{,}0002L) - 0{,}001LR$$
$$\frac{dR}{dt} = -0{,}02R + 0{,}00002LR$$

a) D'après ces équations que devient la population des lapins en l'absence de renards ?

b) Cherchez toutes les solutions d'équilibre et expliquez leur signification.

c) La figure exhibe l'orbite qui part du point $(1000, 40)$. Expliquez ce qui se passe en fin de compte pour les populations de lapins et de renards.



d) Tracez des courbes qui montrent l'évolution des populations de lapins et de renards en fonction du temps.

10. Il était question dans l'exercice 8 d'un système d'équations de Lotka-Volterra qui modélise des populations de pucerons et de coccinelles. On modifie ce système comme suit :

$$\frac{dP}{dt} = 2P(1 - 0{,}0001P) - 0{,}01PC$$
$$\frac{dC}{dt} = -0{,}5C + 0{,}0001PC$$

a) Que prévoit le modèle pour les pucerons en l'absence de coccinelles ?

b) Déterminez les solutions d'équilibre.

c) Déterminez une expression de dC/dP.

d) Servez-vous d'un logiciel de calcul algébrique pour faire tracer un champ de directions de l'équation différentielle de la partie c). Utilisez-le ensuite pour esquisser un portrait de phase. Précisez ce que les orbites ont en commun.

e) À un moment donné, appelé moment $t = 0$, il y a 1000 pucerons et 200 coccinelles. Dessinez l'orbite correspondante et utilisez-la pour décrire comment les deux populations évoluent.

f) Servez-vous de la partie d) pour tracer grossièrement l'allure des courbes représentatives des populations de pucerons et de coccinelles en fonction de t. Quel est le lien entre ces courbes ?

Chapitre 7 Révision

CONTRÔLE DES CONCEPTS

1. a) Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?
   b) Qu'est-ce que l'ordre d'une équation différentielle ?
   c) Qu'est-ce qu'une condition initiale ?
2. Que pouvez-vous dire au sujet des solutions de l'équation différentielle $y' = x^2 + y^2$ à la simple lecture de l'équation ?
3. Qu'est-ce qu'un champ de directions de l'équation différentielle $y' = F(x, y)$?
4. Expliquez le fonctionnement de la méthode d'Euler.
5. Qu'est-ce qu'une équation différentielle à variables séparées ? Comment en trouve-t-on les solutions ?
6. a) Écrivez une équation différentielle qui exprime la loi de croissance naturelle.
   b) Dans quelles circonstances est-elle un bon modèle de croissance d'une population ?
   c) Quelles sont les solutions de cette équation ?
7. a) Écrivez l'équation logistique.
   b) Dans quelles circonstances est-elle un bon modèle de croissance d'une population ?
8. a) Écrivez des équations de Lotka-Volterra pour modéliser des populations de petits poissons (P) et de requins (R).
   b) D'après ces équations, comment évolue chaque population en l'absence de l'autre ?

▲ VRAI-FAUX ▲

Dites si la proposition est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquez pourquoi. Si elle est fausse, expliquez pourquoi et donnez un exemple qui contredit la proposition.

1. Toutes les solutions de l'équation différentielle $y' = -y^4$ sont des fonctions décroissantes.
2. La fonction $f(x) = (\ln x)/x$ est une solution de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$.
3. L'équation $y' = x + y$ est à variables séparées.
4. L'équation $y' = 3^y - 2x + 6xy - 1$ est à variables séparées.
5. Si y est la solution du problème de Cauchy

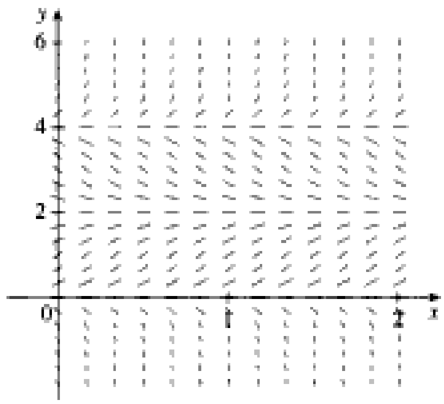
$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1,$$

alors $\lim_{t \to \infty} y = 5$.

EXERCICES

1. a) Voici un champ de directions de l'équation différentielle $y' = y(y-2)(y-4)$. Tracez le graphique de la solution qui vérifie chaque condition initiale.

- $y(0) = -0{,}3$
- $y(0) = 1$
- $y(0) = 3$
- $y(0) = 4{,}3$



b) Si la condition intiale est de la forme $y(0) = c$, quelles sont les valeurs de c telles que $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existe ? Quelles sont les solutions stationnaires ?

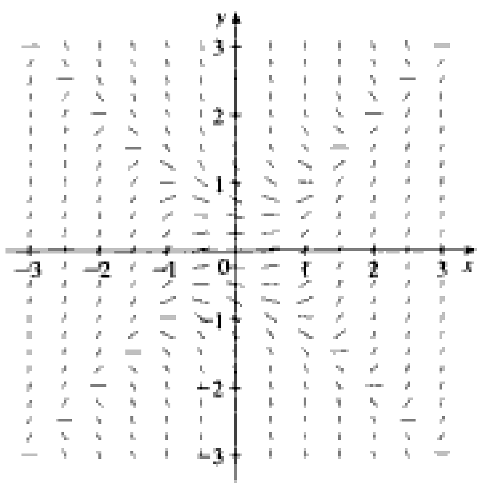
2. a) Tracez un champ de directions de l'équation différentielle $y' = x/y$. Ensuite, suivez-en les directions pour tracer les quatre solutions qui satisfont aux conditions initiales $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$ et $y(-2) = 1$.

b) Confirmez votre réponse à la partie a) en résolvant l'équation différentielle explicitement. De quel type sont les courbes intégrales ?

3. a) Un champ de directions de l'équation différentielle $y' = x^2 - y^2$ est présenté ci-après. Dessinez la solution du problème de Cauchy

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1.$$

Estimez sur le graphique la valeur de $y(0,3)$.



b) Calculez une valeur approchée de $y(0,3)$ par la méthode d'Euler avec un pas de 0,1, si $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy posé dans la partie a). Comparez les deux valeurs approchées.

c) Les centres des segments horizontaux du champ de directions de la partie a) appartiennent à des droites, lesquelles ? Que se passe-t-il aux points où les courbes intégrales traversent ces droites ?

4. a) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de 0,2 pour obtenir une valeur approchée de $y(0,4)$, où $y(x)$ est la solution du problème de Cauchy

$$y' = 2xy \qquad y(0) = 1.$$

b) Répétez la partie a) avec un pas de 0,1.

c) Déterminez la solution exacte de l'équation différentielle et comparez la valeur en 0,4 avec les approximations calculées précédemment.

5. Résolvez l'équation $y' = 2 + 2x^2 + y + x^2y$.

6-7 ■ Résolvez le problème de Cauchy.

6. $1 + x = 2xyy'$, $x > 0$, $y(1) = -2$

7. $xyy' = \ln x$, $y(1) = 2$

8. Résolvez le problème de Cauchy $2yy' = xe^x$, $y(0) = 1$ et dessinez la solution.

9-10 ■ Déterminez les trajectoires orthogonales de la famille de courbes.

9. $kx^2 + y^2 = 1$

10. $y = \dfrac{k}{1 + x^2}$

11. Une culture de bactéries comporte 1000 bactéries au départ et le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries. Après 2 heures, la population se monte à 9000 unités.

a) Écrivez une expression du nombre de bactéries après t heures.

b) Combien y a-t-il de bactéries après 3 heures ?

c) Après combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il doublé ?

12. Un isotope du strontium, ^{90}Sr, a une demi-vie de 25 ans.

a) Quelle masse d'un échantillon de 18 mg reste-t-il après t années ?

b) Après combien de temps ne restera-t-il que 2 mg ?

13. Soit $C(t)$ la concentration d'un médicament dans le sang. À mesure que l'organisme élimine le médicament, $C(t)$ diminue à une vitesse proportionnelle à la quantité de médicament présente à ce moment. Donc, $C'(t) = -kC(t)$, où k est une constante positive, appelée *constante d'élimination* du médicament.

a) Donnez une expression de la concentration au temps t, si C_0 est la concentration initiale.

b) S'il faut 30 h pour que la moitié du médicament soit éliminée par l'organisme, combien faut-il de temps pour que 90 % soit éliminé ?

14. a) La population mondiale était de 4,45 milliards en 1980 et de 5,3 milliards en 1990. Formulez un modèle exponentiel sur ces données et utilisez-le pour prédire la population mondiale en 2020.

b) Selon le modèle de la partie a), quand la population mondiale dépassera-t-elle 10 milliards ?

c) Construisez un modèle logistique de la population mondiale basé sur les données de la partie a). La capacité maximale est jugée à 100 milliards. D'après ce modèle logistique, quelle sera la population mondiale en 2020 ? Comparez avec l'estimation du modèle exponentiel.

d) Selon le modèle logistique, quand la population mondiale dépassera-t-elle 10 milliards ? Comparez avec la prédiction de la partie b).

15. Le modèle de croissance de von Bertalanffy est connu pour prédire la longueur $L(t)$ d'un poisson sur une période de temps. On désigne par L_∞ la longueur maximale que le poisson d'une certaine espèce peut atteindre. L'hypothèse sur laquelle repose ce modèle est que le taux de croissance est proportionnel à $L_\infty - L$, c'est-à-dire à ce qui manque au poisson pour atteindre sa taille adulte.

a) Formulez une équation différentielle et résolvez-la pour disposer d'une expression de $L(t)$.

b) Pour le cas particulier du hareng de la mer du Nord, il est connu que $L_\infty = 53$ cm, que $L(0) = 10$ cm et que la constante de proportionnalité vaut 0,2. Quelle est l'expression de $L(t)$ avec ces données ?

16. Une citerne contient 100 L d'eau pure. De la saumure qui contient 0,1 kg de sel par litre est introduite dans la citerne à raison de 10 L/min. La solution est bien mélangée et rejetée de la citerne selon le même débit. Combien de sel y a-t-il dans la citerne après 6 minutes ?

17. La manière dont une épidémie se répand est modélisée sur l'hypothèse que le taux de propagation est proportionnel à la fois au nombre de personnes infectées et non infectées. Dans une ville isolée qui compte 5000 habitants, 160 ont contracté la maladie au début de la semaine et 1200 à la fin de la semaine. Dans combien de temps est-ce que 80 % de la population sera infectée ?

18. Des populations d'oiseaux et d'insectes sont modélisées par les équations

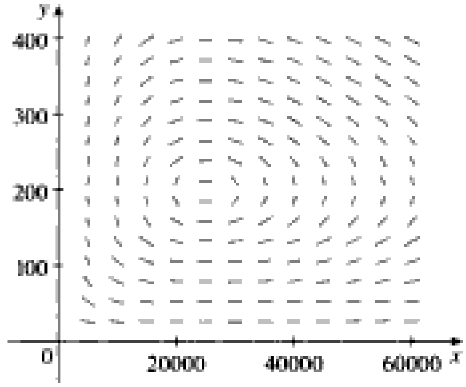
$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x - 0{,}002xy \qquad \frac{dy}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy.$$

a) Laquelle des variables, x ou y, représente la population d'oiseaux et laquelle, celle des insectes ? Expliquez.

b) Trouvez les solutions stationnaires et expliquer leur signification.

c) Cherchez une expression de dy/dx.

d) Voici le champ de directions de l'équation différentielle de la partie c). Utilisez-le pour guider le tracé de l'orbite qui correspond aux populations initiales de 100 oiseaux et 40 000 insectes. Parcourez cette orbite pour décrire l'évolution des deux populations.



e) Servez-vous de la description de la partie d) pour dessiner grosso modo l'évolution des populations d'oiseaux et d'insectes en fonction du temps. Qu'est-ce qui lie ces graphiques ?

19. Les équations du modèle de l'exercice 18 sont modifiées comme suit :

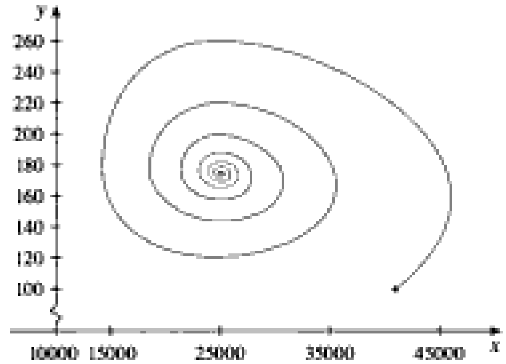
$$\frac{dx}{dt} = 0{,}4x(1 - 0{,}000005x) - 0{,}002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0{,}2y + 0{,}000008xy$$

a) D'après ces équations qu'arrive-t-il à la population d'insectes en l'absence d'oiseaux.

b) Déterminez les solutions d'équilibre et expliquez leur signification.

c) La figure montre l'orbite qui part de la situation initiale où il y a 100 oiseaux et 40 000 insectes. Que se passe-t-il pour ces deux populations en fin de compte ?



d) Tracez les courbes qui retracent l'évolution des populations d'insectes et d'oiseaux au cours du temps.

20. Barbara pèse 60 kg et suit un régime à 1600 calories par jour, desquelles 850 servent au métabolisme de base. Elle dépense environ 15 cal/kg/jour fois son poids en faisant de l'exercice. En supposant que 1 kg de graisse correspond à 10 000 calories et que le stockage des calories issues des graisses se fait à 100 %, formulez une équation différentielle qui traduise ces données et résolvez-la pour arriver à une expression du poids en fonction du temps. Le poids de Barbara tend-il en fin de compte vers un poids stable ?

Pleins feux sur la résolution de problèmes

1. Déterminez toutes les fonctions f telles que f' soit continue et que

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}dt \qquad \text{quel que soit } x \text{ réel.}$$

2. Un étudiant qui ne se souvient pas de la règle de dérivation d'un produit commet la faute $(fg)' = f'g'$. Mais il a de la chance car il arrive tout de même à la bonne réponse. La fonction f de son problème est la fonction $f(x) = e^{x^2}$ et le domaine de définition, l'intervalle $]\frac{1}{2}, \infty[$. Quelle était la fonction g ?

3. Si f est une fonction qui vérifie les propriétés $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et $f(a + b) = f(a)f(b)$, quels que soient les nombres réels a et b, démontrez que $f'(x) = f(x)$ pour tout x et donc que $f(x) = e^x$.

4. Cherchez toutes les fonctions f qui satisfont à l'équation

$$\left(\int f(x)dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}dx\right) = -1.$$

5. Un ingénieur de projet doit présenter à sa société, en vue d'une nouvelle installation d'alumine, des estimations concernant la capacité d'un silo destiné à contenir du minerai de bauxite jusqu'à ce qu'il se transforme en alumine. Le minerai présente l'apparence d'une fine poudre rose et est déversé au sommet du silo. Le silo est un cylindre de 30 m de haut et de 60 m de rayon à la base. Le tapis roulant transporte 1700π m^3/h et le minerai se dépose en formant un cône dont le rayon est égal à une fois et demi la hauteur.

a) Si, à un moment t, le tas fait 18 m de haut, combien de temps faudra-t-il pour qu'il atteigne le sommet du silo ?

b) La direction désire savoir combien de place il restera au sol quand le tas aura 18 m de haut. À quelle vitesse la surface du tas grandit-elle à cette hauteur ?

c) On suppose qu'un camion commence à enlever le minerai à raison de 566π m^3/h au moment où le tas mesure 27 m de haut. On suppose aussi que le tas garde sa forme. Combien de temps faudra-t-il pour que le tas atteigne le sommet du silo dans ces conditions ?

6. La neige s'est mise à tomber durant la matinée du 2 février et continua de tomber dans l'après-midi. Un chasse-neige s'est mis au travail à midi pour enlever la neige de la route à un rythme constant. Il parcourut 6 km entre midi et 13 h, et seulement 3 km entre 13 et 14 h. Quand la neige s'était-elle mise à tomber ? [*Suggestion :* Pour commencer, compter le temps t en heures à partir de midi ; poser $x(t)$ la distance parcourue par le chasse-neige au temps t ; la vitesse du chasse-neige est dx/dt. Soit b le nombre d'heures avant midi durant lesquelles la neige est tombée. Chercher une expression de la hauteur de la neige au temps t. Ensuite, utiliser l'information donnée que le taux d'enlèvement de la neige R (en m^3/h) est constant.]

7. Un chien aperçoit un lapin qui court en ligne droite à travers un champ et se met à le poursuivre. Dans un système de coordonnées rectangulaires (comme dans la figure), on suppose :

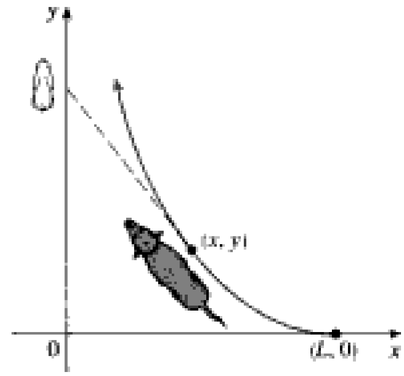
- que le lapin est à l'origine et le chien au point $(L, 0)$ à l'instant où le chien voit le lapin ;
- que le lapin court le long de l'axe Oy et que le chien court toujours tourné vers le lapin ;
- que le chien court à la même vitesse que le lapin.

a) Montrez que la trajectoire du chien est une courbe représentative de la fonction $y = f(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

b) Déterminez la solution de l'équation de la partie a) qui vérifie la condition initiale $y = y' = 0$ quand $x = L$. [*Suggestion :* Posez $z = dy/dx$ dans l'équation différentielle et résolvez l'équation différentielle du premier ordre qui en résulte pour trouver z ; ensuite, intégrez z pour trouver y.]

c) Le chien réussit-il à rattraper le lapin ?



8. a) On suppose que le chien du problème 7 court deux fois plus vite que le lapin. Déterminez une équation différentielle dont la trajectoire du chien soit une solution. Résolvez-la ensuite pour déterminer l'endroit où le chien attrape le lapin.

b) On suppose que le chien court deux fois moins vite que le lapin. Trouvez une expression de la distance entre le chien et le lapin. Où se trouvent-ils au moment où ils sont le plus près l'un de l'autre ?

Il a été brièvement question des suites infinies et des séries dans *Un aperçu du calcul différentiel et intégral* en relation avec les paradoxes de Zénon et la représentation décimale des nombres. Elles tirent leur importance de l'idée qu'a eue Newton de représenter une fonction comme somme d'une série infinie. Dans le calcul des aires, par exemple, il a souvent intégré une fonction en l'exprimant d'abord comme une série, puis en intégrant chaque terme de la série. Nous allons adopter cette idée dans la section 8.7 en vue d'intégrer des fonctions comme e^{-x^2}. (Rappelez-vous que précédemment nous n'avons pas réussi à effectuer cette intégration.) Comme beaucoup de fonctions qui interviennent en physique mathématique et en chimie, telles les fonctions de Bessel, sont définies par des sommes de séries, il est important de se familiariser avec les concepts de base de la convergence des suites infinies et des séries.

Les physiciens aussi font usage des séries, mais d'une autre façon, ainsi que nous le verrons dans la section 8.9. Quand ils étudient des domaines aussi divers que l'optique, la relativité restreinte et l'électromagnétisme, ils analysent les phénomènes en remplaçant une fonction par les premiers termes de la série qui la représente.

8

Les suites infinies et les séries

8.1 Les suites

Une **suite** peut être vue comme une liste de nombres écrits dans un ordre bien défini :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Le nombre a_1 s'appelle le *premier terme*, a_2, *le deuxième terme*, et en général, a_n est le $n^{\text{ième}}$ terme. Comme nous ne traiterons que des suites infinies, chaque terme a_n aura un successeur a_{n+1}.

Vous remarquez qu'à chaque entier positif n correspond un nombre a_n, ce qui fait qu'une suite peut être définie comme une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers strictement positifs. Mais au lieu de noter $f(n)$ la valeur de la fonction en n, selon la notation en usage pour les fonctions, elle est habituellement notée a_n.

NOTATION ● La suite $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ est aussi notée

$$\{a_n\} \qquad \text{ou} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

EXEMPLE 1 ■ Certaines suites peuvent être définies par la formule de leur $n^{\text{ième}}$ terme. Dans les exemples que voici, nous donnons trois descriptions de la suite : une dans la notation qui vient d'être proposée, une autre qui consiste en la formule de définition et une troisième qui consiste à écrire en extension les termes de la suite. Notez que n ne doit pas forcément prendre 1 comme première valeur.

a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

c) $\{\sqrt{n-3}\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\qquad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\}$

d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

EXEMPLE 2 ■ Voici quelques suites qui ne sont pas définies par une simple équation.

a) La suite $\{p_n\}$, où p_n désigne la population mondiale recensée le premier janvier de l'année n.

b) Si on désigne par a_n le chiffre qui occupe la $n^{\text{ième}}$ place dans l'expression décimale du nombre e, alors $\{a_n\}$ est une suite bien définie dont les premiers termes sont

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

c) La **suite de Fibonacci** $\{f_n\}$ est définie de façon récurrente par les conditions

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3.$$

Chaque terme est la somme des deux termes précédents. Les quelques premiers termes sont

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Cette suite date du treizième siècle quand un mathématicien italien, connu sous le nom de Fibonacci, se pencha sur un problème d'élevage de lapins (voyez l'exercice 35).

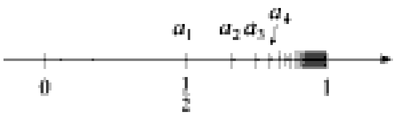


FIGURE 1

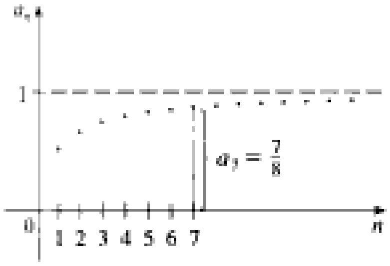


FIGURE 2

Une suite, comme celle de l'exemple 1 a), $a_n = n/(n+1)$, peut être représentée graphiquement, soit en marquant ses termes sur une droite réelle, comme dans la figure 1, soit en dessinant son graphique, comme dans la figure 2. Vous remarquez que, vu qu'une suite est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers strictement positifs, son graphique est fait de points isolés, de coordonnées

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

Les figures 1 et 2 montrent que les termes de la suite $a_n = n/(n+1)$ s'approchent de 1 lorsque n devient grand.

Effectivement, la différence

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

peut être rendue aussi petite que l'on veut en prenant n suffisamment grand. Cela s'écrit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

De façon générale, la notation

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

signifie que la suite $\{a_n\}$ tend vers L lorsque n devient grand. Remarquez que la définition suivante de la limite d'une suite est très semblable à la définition d'une limite d'une fonction à l'infini, donnée dans la section 2.5.

L'annexe D propose une définition plus précise de la limite d'une suite.

1 Définition Une suite $\{a_n\}$ admet la **limite** L et cela s'écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ lorsque } n \to \infty$$

lorsque les termes a_n peuvent être rendus aussi proches que l'on veut de L en prenant n suffisamment grand. Lorsque $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, on dit que la suite **converge** (ou est **convergente**). Sinon, on dit que la suite **diverge** (ou est **divergente**).

La figure 3 illustre la définition 1 en exhibant les représentations graphiques de deux suites qui admette L comme limite.

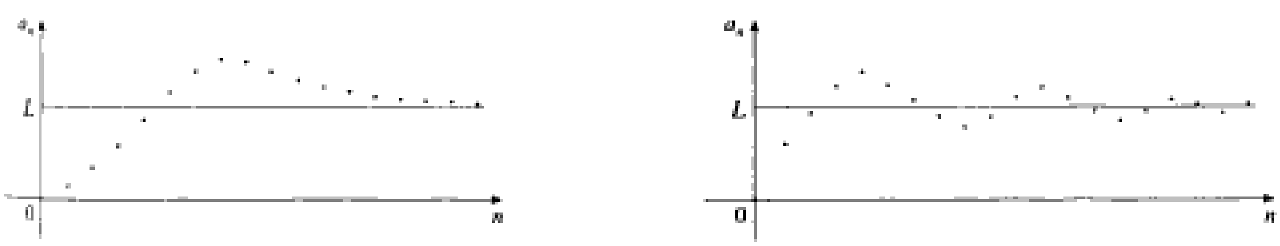


FIGURE 3 Graphiques de deux suites telles que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

La figure 7 montre le graphique de la suite de l'exemple 6 et celui-ci confirme la réponse.

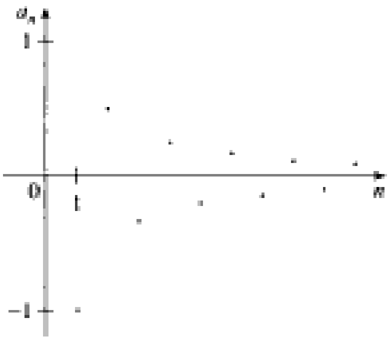


FIGURE 7

EXEMPLE 6 ■ Calculez $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ si elle existe.

SOLUTION

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Par conséquent, en raison du Théorème 4,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

EXEMPLE 7 ■ Étudiez la convergence de la suite $a_n = n!/n^n$, où $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

SOLUTION À nouveau le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini lorsque $n \to \infty$, mais ici il n'y a pas de fonction associée à laquelle appliquer la Règle de l'Hospital ($x!$ n'est pas défini lorsque x n'est pas un entier). On écrit en extension quelques termes de la suite pour tenter de sentir comment va la suite lorsque n devient grand :

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}$$

5 $$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}$$

Produire des graphiques de suites

Certains logiciels de calcul algébrique disposent de commandes spécialement destinées à créer des suites et à en produire le graphique. Avec beaucoup de calculatrices graphiques, par contre, les représentations graphiques des suites sont effectuées à partir des équations paramétriques. La suite de l'exemple 7 peut être dessinée en entrant les équations paramétriques

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

et en choisissant le mode point au départ de $t = 1$, avec un pas égal à 1 pour la variable t. Voilà le résultat dans la figure 8.

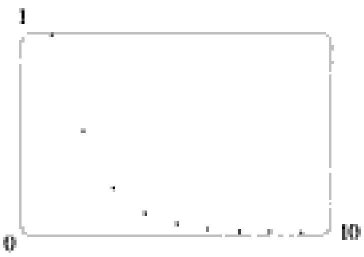


FIGURE 8

À voir ces expressions et le graphique de la figure 8, il semble que les termes décroissent et peut-être tendent vers 0. En vue de confirmer cette impression, on observe que, suivant l'équation 5,

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}\right)$$

et de là, que

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or, on sait que $1/n \to 0$ quand $n \to \infty$. D'où, $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$ par application du Théorème du sandwich.

EXEMPLE 8 ■ Pour quelles valeurs de r la suite $\{r^n\}$ est-elle convergente ?

SOLUTION On sait, depuis la section 2.5 et les graphiques des fonctions exponentielles à la section 1.5, que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ pour $a > 1$ et que $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ pour $0 < a < 1$. De là, en posant $a = r$ et en utilisant le théorème 2, on a

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Dans les cas $r = 1$ et $r = 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Quand $-1 < r < 0$, alors $0 < |r| < 1$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0,$$

et, selon le théorème 4, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Quand $r = -1$, alors $\{r^n\}$ diverge comme expliqué dans l'exemple 5. La figure 9 montre les graphiques qui correspondent aux différentes valeurs de r. (Le cas $r = -1$ est représenté dans la figure 6.)

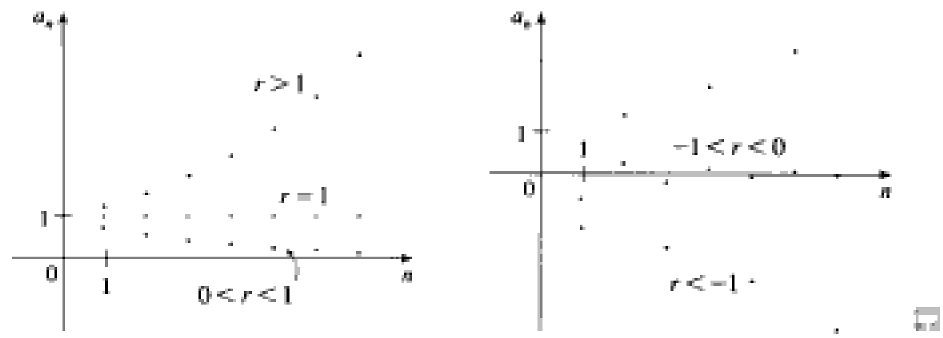


FIGURE 9
La suite $a_n = r^n$

Les résultats de l'exemple 8 sont rassemblés dans un cadre pour y faire référence ultérieurement.

9 La suite $\{r^n\}$ est convergente si $-1 < r \leqslant 1$ et divergente pour toutes les autres valeurs de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

Définition Une suite $\{a_n\}$ est dite **strictement croissante** lorsque $a_n < a_{n+1}$ quel que soit $n \geqslant 1$, c'est-à-dire, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Elle est dite **strictement décroissante** si $a_n > a_{n+1}$ quel que soit $n \geqslant 1$. Une suite est dite **strictement monotone** si elle est soit croissante, soit décroissante.

EXEMPLE 9 ■ La suite $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ est strictement décroissante car

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{n+6}$$

quel que soit $n \geqslant 1$. (Le membre de droite est plus petit car son dénominateur est plus grand.)

EXEMPLE 10 ■ Montrez que la suite $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ est strictement décroissante.

SOLUTION 1 Il faut démontrer que $a_{n+1} < a_n$, c'est-à-dire

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}.$$

Cette inégalité est équivalente à celle que l'on obtient en effectuant le produit croisé :

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} &\Leftrightarrow (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1] \\ &\Leftrightarrow n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n \\ &\Leftrightarrow 1 < n^2+n \end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 1$, il est évident que l'inégalité $n^2 + n > 1$ est vérifiée. Dès lors, $a_{n+1} < a_n$ et la suite $\{a_n\}$ est strictement décroissante.

SOLUTION 2 On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{quand } x^2 > 1.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]1, \infty[$ et il s'ensuit que $f(n) > f(n+1)$. Par conséquent $\{a_n\}$ est strictement décroissante.

Définition Une suite $\{a_n\}$ est **bornée supérieurement** s'il existe un nombre M tel que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Elle est **bornée inférieurement** s'il existe un nombre m tel que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Si elle est bornée supérieurement et inférieurement, alors $\{a_n\}$ est une **suite bornée**.

Par exemple, la suite $a_n = n$ est bornée inférieurement $(a_n > 0)$ mais pas supérieurement. La suite $a_n = n/(n+1)$ est bornée parce que $0 < a_n < 1$ quel que soit n.

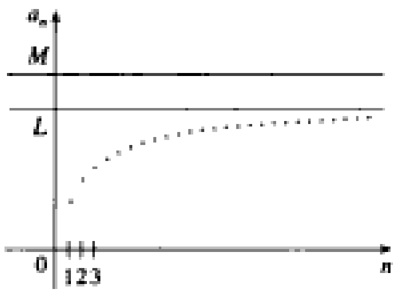


FIGURE 10

On sait qu'une suite bornée n'est pas nécessairement convergente [$a_n = (-1)^n$ satisfait à $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$ mais est divergente, d'après l'exemple 5] et qu'une suite monotone n'est pas non plus nécessairement convergente ($a_n = n \to \infty$). Mais une suite qui est à la fois bornée *et* monotone est nécessairement convergente. Ce fait est énoncé sans preuve dans le théorème 7, mais il est possible d'accepter intuitivement que ce soit vrai en regardant la figure 10. Si $\{a_n\}$ est strictement croissante et si $a_n \leqslant M$ quel que soit n, alors les termes sont obligés de s'entasser et de s'approcher d'un nombre L.

7 Théorème d'une suite monotone Toute suite bornée et monotone est convergente.

EXEMPLE 11 ■ Étudiez la suite $\{a_n\}$ définie par la relation de récurrence

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUTION On commence par calculer quelques termes :

$$a_1 = 2 \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(2+6) = 4 \quad a_3 = \tfrac{1}{2}(4+6) = 5 \quad a_4 = \tfrac{1}{2}(5+6) = 5{,}5$$

$$a_5 = 5{,}75 \qquad a_6 = 5{,}875 \qquad a_7 = 5{,}9375 \qquad a_8 = 5{,}96875$$

Le Principe de récurrence est souvent requis pour traiter des suites définies par récurrence. Voyez à la page 88 l'énoncé de ce principe.

Ces premiers termes laissent penser que la suite est strictement croissante et ils ont l'air de s'approcher de 6. En vue de confirmer que la suite est strictement croissante, on fait appel au Principe de récurrence pour démontrer que $a_{n+1} > a_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Cette inégalité est vraie pour $n = 1$ puisque $a_2 = 4 > a_1$. Si on suppose que c'est vrai pour $n = k$, alors on a

$$a_{k+1} > a_k,$$

d'où

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6,$$

et

$$\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6).$$

Donc

$$a_{k+2} > a_{k+1}.$$

On a déduit que $a_{n+1} > a_n$ est vrai pour $n = k + 1$. Par conséquent, en vertu du Principe de récurrence, l'inégalité est vraie pour tout n.

Ensuite, on vérifie que $\{a_n\}$ est bornée en montrant que $a_n < 6$ pour tout n. (Comme la suite est strictement croissante, on sait du même coup qu'elle est bornée inférieurement : $a_n \geqslant a_1 = 2$ pour tout n.) Vu que $a_1 < 6$, la proposition est vraie pour $n = 1$. On la suppose vraie pour $n = k$, c'est-à-dire

$$a_k < 6,$$

D'où

$$a_k + 6 < 12,$$

et

$$\frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(12).$$

Donc

$$a_{k+1} < 6.$$

Ceci montre, grâce au Principe de récurrence, que $a_n < 6$ pour tout n.

Une fois établi que la suite est croissante et bornée, le Théorème de la suite monotone garantit qu'elle a une limite. Ce que le théorème ne dit pas, c'est quelle est cette limite. Mais puisqu'on sait que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, on peut reprendre la relation de récurrence qui définit la suite et écrire

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + 6) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \frac{1}{2}(L + 6).$$

Puisque $a_n \to L$, $a_{n+1} \to L$ aussi (quand $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$ également). On a donc

$$L = \frac{1}{2}(L + 6).$$

La résolution de cette équation par rapport à L conduit à $L = 6$, comme prévu.

8.1 Exercices

1. a) Qu'est-ce qu'une suite ?
   b) Que veut dire $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
   c) Que veut dire $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?
2. a) Qu'est-ce qu'une suite convergente ? Donnez deux exemples.
   b) Qu'est-ce qu'une suite divergente ? Donnez deux exemples.
3. Énumérez les 6 premiers termes de la suite définie par
   $$a_n = \frac{n}{2n+1}.$$
   La suite semble-t-elle avoir une limite ? Si oui, déterminez-la.
4. Énumérez les 8 premiers termes de la suite définie par $\{\sin(n\pi/2)\}$. La suite semble-t-elle avoir une limite ? Si oui, déterminez-la. Si non, expliquez pourquoi.

5-8 ■ Trouvez une formule pour le terme général a_n de la suite, en supposant que la régularité observée dans les premiers termes se poursuive.

5. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$
6. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$
7. $\left\{\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \frac{5}{36}, \frac{6}{49}, \ldots\right\}$
8. $\{0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots\}$

9-26 ■ Décidez si la suite converge ou diverge. Si elle converge, trouvez sa limite.

9. $a_n = \dfrac{1}{5^n}$
10. $a_n = 4\sqrt{n}$
11. $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$
12. $a_n = \dfrac{4n - 3}{3n + 4}$

13. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

14. $\{\text{arctg } 2n\}$

15. $a_n = \cos(n\pi/2)$

16. $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{1+n^3}$

17. $\left\{\dfrac{\pi^n}{3^n}\right\}$

18. $\left\{\dfrac{3+(-1)^n}{n^2}\right\}$

19. $\left\{\dfrac{\ln(n^2)}{n}\right\}$

20. $\{(-1)^n \sin(1/n)\}$

21. $\{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\}$

22. $\left\{\dfrac{\ln(2+e^n)}{3n}\right\}$

23. $a_n = n2^{-n}$

24. $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

25. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

26. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

27-32 ■ Sur la base d'une représentation graphique de la suite, décidez si la suite est convergente ou divergente. Si la suite est convergente, devinez la valeur de la limite en vous fiant au graphique et ensuite démontrez votre conjecture. (Voyez la note en marge de la page 564 à propos de la représentation graphique des suites.)

27. $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$

28. $a_n = 2 + (-2/\pi)^n$

29. $\left\{\text{arctg}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)\right\}$

30. $\left\{\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}\right\}$

31. $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$

32. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n)^n}$

33. a) Dites si la suite est convergente ou divergente :

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \text{ pour } n \geqslant 1.$$

b) Qu'est-ce qui change si le premier terme est $a_1 = 2$?

34. a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, que vaut $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$?

b) Une suite $\{a_n\}$ est définie par

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 1/(1+a_n) \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Calculez les dix premiers termes de la suite avec 5 décimales correctes. La suite semble-t-elle converger ? Si oui, déterminez la limite avec 3 décimales correctes.

c) En supposant que la suite de la partie b) a une limite, utilisez la partie a) pour trouver sa valeur exacte. Comparez-la avec l'estimation que vous en avez calculée.

35. a) Fibonacci s'est posé le problème suivant : on suppose que les lapins vivent éternellement et que chaque mois, chaque paire de lapins donne naissance à une nouvelle paire de lapins, qui devient productive à son tour à l'âge de deux mois. Si au départ, il y a une paire de nouveaux nés, combien de paires de lapins y a-t-il le $n^{\text{ième}}$ mois ? Démontrez que la réponse est f_n, où $\{f_n\}$ est la suite de Fibonacci définie dans l'exemple 2 c).

b) Soit $a_n = f_{n+1}/f_n$. Montrez que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Si on suppose que la suite $\{a_n\}$ est convergente, déterminez sa limite.

36. Déterminez la limite de la suite

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}.$$

37-40 ■ Déterminez si la suite est strictement croissante, décroissante ou non monotone.

37. $a_n = \dfrac{1}{3n+5}$

38. $a_n = 3 + (-1)^n/n$

39. $a_n = \dfrac{n-2}{n+2}$

40. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{5n+3}$

41. On suppose savoir que la suite $\{a_n\}$ est une suite décroissante et que tous ses termes sont compris entre 5 et 8. Expliquez pourquoi la suite a une limite. Que pouvez-vous dire au sujet de la valeur de la limite ?

42. Une suite $\{a_n\}$ est donnée par $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

a) Démontrez, par récurrence ou autrement, que $\{a_n\}$ est strictement croissante et bornée supérieurement par 3. Concluez que $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

b) Déterminez $\lim_{n\to\infty} a_n$.

43. Démontrez que la suite définie par

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = 3 - 1/a_n$$

est strictement croissante et que $a_n < 3$ pour tout n. Déduisez-en que $\{a_n\}$ est convergente et déterminez sa limite.

44. Démontrez que la suite définie par

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = 1/(3 - a_n)$$

satisfait à $0 < a_n \leqslant 2$ et est strictement décroissante. Déduisez-en que cette suite est convergente et déterminez sa limite.

45. On sait que $\lim_{n\to\infty}(0{,}8)^n = 0$ [suivant (6) avec $r = 0{,}8$]. Utilisez les logarithmes pour déterminer quelle est la valeur de n suffisamment grande pour assurer que $(0{,}8)^n < 0{,}000001$.

46. a) Soit $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a))$, …, $a_{n+1} = f(a_n)$, où f est une fonction continue. Montrez que, si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $f(L) = L$.

b) Illustrez la partie a) en choisissant $f(x) = \cos x$, $a = 1$ et en calculant la valeur de L avec 5 décimales correctes.

47. Soit a et b des nombres positifs tels que $a > b$. Soit a_1 leur moyenne arithmétique et b_1 leur moyenne géométrique :

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}.$$

On répète cette procédure de sorte qu'en général

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

a) Démontrez par le Principe de récurrence que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

b) Déduisez-en que $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont convergentes.

c) Démontrez que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. La valeur commune de cette limite fut appelée par Gauss la moyenne **arithmético-géométrique** des nombres a et b.

48. Une suite est définie de façon récurrente par

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}.$$

Calculez les huit premiers termes de la suite $\{a_n\}$. Que remarquez-vous à propos des termes d'indice pair et impair ? En considérant séparément les termes d'indice pair et d'indice impair, démontrez que la suite $\{a_n\}$ est convergente et montrez que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

Ce qui précède explique le **développement en fraction continue**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

Sujet d'étude

Les suites logistiques

Une suite que l'on rencontre en écologie pour modéliser la croissance d'une population est définie par l'**équation aux différences logistique**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n),$$

où p_n mesure la taille de la population de la $n^{\text{ième}}$ génération d'une espèce isolée. Pour que les nombres soient plus faciles à gérer, p_n est exprimé comme une fraction de la taille maximale de la population. D'où $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Remarquez que la forme de cette équation est la même que celle de l'équation différentielle logistique dont il a été question dans la section 7.6. Le modèle discret–celui qui se présente sous forme de suites au lieu de fonctions continues– est préférable pour modéliser des populations d'insectes pour lesquels la reproduction et les décès revêtent un caractère saisonnier.

Un écologiste qui s'intéresse à la taille d'une population au cours du temps pose les questions suivantes : La population va-t-elle se stabiliser autour d'une valeur limite ? Son évolution sera-t-elle cyclique ? Ou va-t-elle au contraire se comporter de façon aléatoire ?

Écrivez un programme qui calcule les n premiers termes de cette suite définie par l'équation aux différences logistique et dont la valeur initiale est p_0, avec $0 < p_0 < 1$. Utilisez ce programme pour répondre aux questions que voici.

1. Calculez 20 ou 30 termes de la suite qui commence par $p_0 = \frac{1}{2}$ et pour deux valeurs de k différentes comprises entre 1 et 3. Représentez ces suites graphiquement. Ont-elles l'air de converger ? Recommencer pour une autre valeur de p_0 comprise entre 0 et 1. La limite dépend-elle du choix de p_0 ? Dépend-elle du choix de k ?
2. Calculez des termes de la suite où k a une valeur comprise entre 3 et 3,4 et représentez-les graphiquement. Que remarquez-vous à propos du comportement des termes ?
3. Testez encore pour des valeurs de k comprises entre 3,4 et 3,5. Que se passe-t-il ?
4. Calculez et représentez graphiquement au moins 100 termes pour des valeurs de k comprises entre 3,6 et 4 et commentez le comportement de la suite. Que se passe-t-il si vous remplacez p_0 par 0,001 ? Ce type de comportement est qualifié de *chaotique* et typique de populations d'insectes sous certaines conditions.

8.2 Les séries

Si on se met à additionner les termes d'une suite infinie $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, on obtient une expression de la forme

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \cdots \tag{1}$$

qui porte le nom de **série infinie** (ou seulement **série** tout court) et qui s'écrit plus brièvement avec le symbole $\sum$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum a_n.$$

Mais cela a-t-il un sens de parler d'une somme d'une infinité de termes?

Comment pourrait-on obtenir une valeur finie pour la somme

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

puisqu'en additionnant les premiers termes on arrive aux résultats provisoires 1, 3, 6, 10, 15, 21,...et après le $n^{\text{ième}}$ terme, à $n(n+1)/2$, qui devient très grand lorsque n augmente.

Par contre, si on commence à additionner les termes de la série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

on obtient $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$ La table met en évidence que les sommes partielles obtenues en additionnant de plus en plus de termes s'approchent constamment de 1. (Voyez aussi la figure 11 dans *Un aperçu du calcul différentiel et intégral*, à la page 7.) Effectivement, en additionnant suffisamment de termes de la série, on peut rendre les sommes partielles aussi proches de 1 que l'on veut. Il semble donc raisonnable de dire que la somme de cette série infinie vaut 1 et d'écrire

n	Somme des n premiers termes
1	0,50000000
2	0,75000000
3	0,87500000
4	0,93750000
5	0,96875000
6	0,98437500
7	0,99218750
10	0,99902344
15	0,99996948
20	0,99999905
25	0,99999997

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1.$$

C'est la même idée qui préside lorsqu'on veut savoir si oui ou non une série générale telle que (1) a une somme. On considère les **sommes partielles**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

et, en général,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Ces sommes partielles forment elles-mêmes une suite $\{s_n\}$, qui peut avoir une limite ou ne pas en avoir. Dans le cas où $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe (est un nombre fini), alors, tout comme dans l'exemple précédent, on l'appelle la somme de la série infinie $\sum a_n$.

2 Définition Étant donné une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, on désigne par s_n sa somme partielle d'ordre n :

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Si la suite $\{s_n\}$ est convergente et si $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe en tant que nombre réel, alors la série $\sum a_n$ est dite **convergente** et on écrit

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Le nombre s est appelée la **somme** de la série. Sinon, la série est dite **divergente**.

Écrire $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ revient donc à affirmer que l'addition d'un nombre suffisant de termes de la série conduit à un résultat aussi proche que l'on veut de s. Remarquez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

EXEMPLE 1 ■ La **série géométrique** est un exemple important de série infinie

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

Chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par le rapport commun r. (On vient déjà d'envisager le cas particulier $a = \frac{1}{2}$ et $r = \frac{1}{2}$.)

Au cas où $r = 1$, alors $s_n = a + a + \cdots + a \to \pm\infty$. La série géométrique diverge donc puisque $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas.

Au cas où $r \neq 1$, on a

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

et

$$rs_n = \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

La soustraction membre à membre de ces équations conduit à

$$s_n - rs_n = a - ar^n,$$

3
$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Or, lorsque $-1 < r < 1$, d'après la formule 6 dans la section 8.1, $r^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}.$$

La série géométrique est donc convergente quand $|r| < 1$ et sa somme vaut $a/(1 - r)$.

Au cas où $r \leqslant -1$ ou $r > 1$, la suite $\{r^n\}$ est divergente et donc, en vertu de l'équation (3), $\lim_{n\to\infty} s_n$ n'existe pas. La série géométrique est par conséquent divergente dans ces cas-là.

Les résultats de l'exemple 1 sont résumés dans le cadre que voici.

4 La série géométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

est convergente lorsque $|r| < 1$ et sa somme est égale à

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1$$

Lorsque $|r| \geqslant 1$, la série géométrique est divergente.

EXEMPLE 2 ■ Calculez la somme de la série géométrique

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

SOLUTION Le premier terme est $a = 5$ et le rapport commun est $r = -\frac{2}{3}$. Vu que $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la série est convergente, en vertu de (4), et sa somme vaut

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3.$$

Au fond, qu'est-ce que cela veut dire que la somme de la série de l'exemple 2 vaut 3 ? Il est évident qu'il n'est pas possible de faire la somme au sens propre d'une infinité de termes, un à un. Pourtant, conformément à la définition 2, la somme totale est la limite de la suite des sommes partielles. En effectuant la somme de suffisamment de termes, on peut faire en sorte que le résultat soit aussi proche que l'on veut du nombre 3. La table présente la liste des dix premières sommes partielles s_n et la figure 1 montre de quelle manière la suite des sommes partielles s'approchent de 3.

n	s_n
1	5,000000
2	1,666667
3	3,888889
4	2,407407
5	3,395062
6	2,736626
7	3,175583
8	2,882945
9	3,078037
10	2,947975

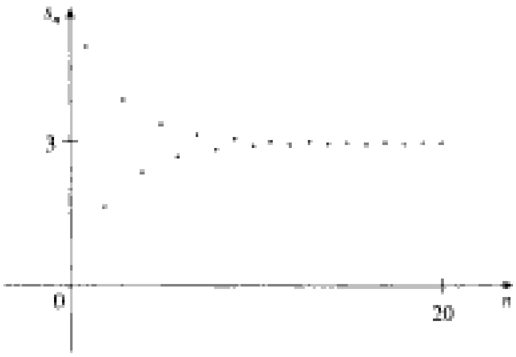


FIGURE 1

EXEMPLE 3 ■ La série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$ est-elle convergente ou divergente ?

SOLUTION Réécrivons le $n^{\text{ième}}$ terme de la série sous la forme ar^{n-1} :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

Une autre façon d'identifier a et r est d'écrire explicitement quelques termes de la série :

$$4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \cdots$$

Nous reconnaissons maintenant une série géométrique dans laquelle $a = 4$ et $r = \frac{4}{3}$. Vu que $r > 1$, la série diverge d'après (4).

EXEMPLE 4 ■ Écrivez le nombre $2{,}3\overline{17} = 2{,}3171717\ldots$ sous la forme d'un rapport d'entiers.

SOLUTION

$$2{,}3171717\ldots = 2{,}3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Après le premier terme, on a affaire à une série géométrique dans laquelle $a = 17/10^3$ et $r = 1/10^2$. Par conséquent

$$2{,}3\overline{17} = 2{,}3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2{,}3 + \frac{\dfrac{17}{1000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}.$$

EXEMPLE 5 ■ Quelle est la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, où $|x| < 1$?

SOLUTION Remarquez que cette série commence par $n = 0$ et son premier terme est donc $x^0 = 1$. (Dans le cadre des séries, on adopte la convention que $x^0 = 1$, même lorsque $x = 0$.) D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Il s'agit d'une série géométrique dans laquelle $a = 1$ et $r = x$. Comme $|r| = |x| < 1$, elle converge et, d'après (4),

$$\boxed{5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

EXEMPLE 6 ■ Démontrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculez sa somme.

SOLUTION Cette fois, il ne s'agit pas d'une série géométrique et donc, retournant à la définition d'une série convergente, nous calculons les sommes partielles.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Cette somme se simplifie si chaque terme est décomposé en éléments simples comme ceci

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Cette méthode a déjà été utilisée dans l'exemple 7 de la section 5.5. La décomposition en éléments simples est étudiée dans l'annexe F.

On a donc

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Remarquez que les termes se simplifient deux par deux. C'est un exemple d'une **somme télescopique** : suite à toutes les simplifications, la somme se réduit (comme les éléments du tube d'une ancienne lunette d'approche s'emboîtent) à seulement deux termes.

La figure 2 illustre l'exemple 6 en présentant les graphiques de la suite des termes $a_n = 1/[n(n+1)]$ et de la suite $\{s_n\}$ des sommes partielles. Remarquez que $a_n \to 0$ et $s_n \to 1$. Les exercices 44 et 45 proposent deux interprétations géométriques de l'exemple 6.

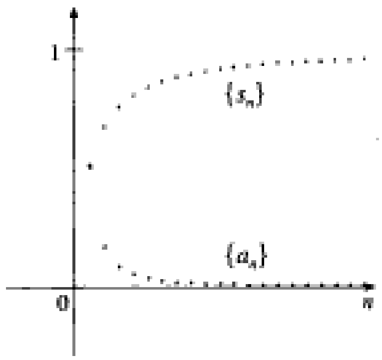


FIGURE 2

De là

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Par conséquent, la série donnée est convergente et vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

EXEMPLE 7 ■ Montrez que la **série harmonique**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

est divergente.

SOLUTION

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

De même, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, et de façon générale,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}.$$

La méthode exposée dans l'exemple 7 pour montrer la divergence de la série harmonique est due au savant français Nicole Oresme (1323-1382).

Ceci montre que $s_{2^n} \to \infty$ quand $n \to \infty$ et donc que $\{s_n\}$ est divergente. Il s'ensuit que la série harmonique diverge.

6 Théorème Si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Démonstration Soit $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Alors, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Étant donné que $\sum a_n$ est convergente, la suite $\{s_n\}$ est convergente. Soit $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Comme $n - 1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, on a aussi $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$

■

REMARQUE 1 • À toute *série* $\sum a_n$ sont associées deux *suites* : la suite $\{s_n\}$ de ses sommes partielles et la suite $\{a_n\}$ de ses termes. Dans le cas où $\sum a_n$ est convergente, la limite de la suite $\{s_n\}$ est s (la somme de la série) et, ainsi que l'affirme le théorème 6, la limite de la suite $\{a_n\}$ est 0.

REMARQUE 2 • La réciproque du théorème 6 n'est en général pas vraie. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, on ne peut pas conclure que $\sum a_n$ converge. Pour preuve, la série harmonique $\sum 1/n$ où $a_n = 1/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ alors qu'il résulte de l'exemple 7 que $\sum 1/n$ est divergente.

7 Le Test de divergence Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas ou si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente.

Le Test de divergence découle du théorème 6 parce que, si la série n'est pas divergente, elle est convergente et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EXEMPLE 8 ■ Démontrez que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{5n^2+4}$ diverge.

SOLUTION

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

La série est donc divergente, conformément au Test de divergence.

REMARQUE 3 • Dès qu'on trouve que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, on sait que $\sum a_n$ ne converge pas. Par contre, lorsqu'on trouve $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, on ne sait *rien* sur la convergence ou la divergence de $\sum a_n$. Rappelez-vous l'avertissement de la remarque 2 : Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la série $\sum a_n$ peut converger ou peut diverger.

8 Théorème $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes, alors le sont aussi les séries $\sum ca_n$ (où c est une constante), $\sum(a_n + b_n)$ et $\sum(a_n - b_n)$ et

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

Ces propriétés des séries convergentes découlent des Lois des limites pour les suites convergentes dans la section 8.1. Voici par exemple comment démontrer la deuxième propriété.

Soit

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

La somme partielle d'ordre n de la série $\sum(a_n + b_n)$ est

$$u_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i),$$

et, grâce à l'équation 9 de la section 5.2, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i\\ &= \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum(a_n + b_n)$ est convergente et sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ ■

EXEMPLE 9 ■ Calculez la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$.

SOLUTION D'une part, la série $\sum 1/2^n$ est une série géométrique dans laquelle $a = 1/2$ et $r = 1/2$. Aussi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

D'autre part, dans l'exemple 6, on a trouvé que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Dès lors, par le théorème 8, la série donnée est convergente et sa valeur est

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right) &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\\ &= 3 \cdot 1 + 1 = 4\end{aligned}$$

REMARQUE 4 ● Un nombre fini de termes ne peut pas affecter la convergence d'une série. Supposons, par exemple, que nous soyons capables de montrer que la série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

est convergente. Comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1},$$

il s'ensuit que la série complète $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3 + 1)$ est convergente. De même, si on sait que la série $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ converge, on sait que la série complète

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

converge également.

8.2 Exercices

1. a) Quelle est la différence entre une suite et une série ?
   b) Qu'est-ce qu'une série convergente ? Qu'est-ce qu'une série divergente ?

2. Expliquez ce que veut dire l'égalité $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3-8 ■ Calculez au moins dix sommes partielles de la série. Faites apparaître dans une même fenêtre la représentation graphique de la suite des termes et de la suite des sommes partielles. La série semble-t-elle converger ou diverger ? Si elle est convergente, calculer sa somme. Si elle est divergente, expliquez pourquoi.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

6. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n(n-1)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1,5}} - \frac{1}{(n+1)^{1,5}}\right)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1}$

9. Soit $a_n = \frac{2n}{3n+1}$.
   a) Examinez si $\{a_n\}$ est convergente.
   b) Examinez si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.

10. a) Expliquez la différence entre
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j.$$
   b) Expliquez la différence entre
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_j.$$

11-28 ■ Examinez si la série est convergente ou divergente. Si elle est convergente, calculez sa somme.

11. $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \cdots$

12. $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \cdots$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n}}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}8^{n+1}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^n}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} [2(0,1)^n + (0,2)^n]$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3(n+1)(n+2)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right)$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 + 2^{-n}}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} n$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

29-32 ■ Écrivez le nombre sous la forme du quotient de deux entiers.

29. $0,\overline{5} = 0,5555\ldots$

30. $0,\overline{15} = 0,15151515\ldots$

31. $0,\overline{307} = 0,307307307307\ldots$

32. $4,\overline{1570} = 4,157015701570\ldots$

33-36 ■ Déterminez les valeurs de x pour lesquelles la série converge. Calculez sa somme pour ces valeurs de x.

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$

34. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

35. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$

36. $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^n x$

LCS 37-38 ■ Utilisez la commande de décomposition en fractions simples de votre logiciel de calcul symbolique pour obtenir une expression convenable des sommes partielles. Exploitez cette expression pour calculez la somme de la série. Vérifiez votre réponse en faisant calculer cette somme directement par votre logiciel de calcul symbolique.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n-3)}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n^2+n)^2}$

39. Si la $n^{\text{ième}}$ somme partielle d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est
$$s_n = \frac{n-1}{n+1},$$
déterminez a_n et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

40. Si la $n^{\text{ième}}$ somme partielle d'une série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est
$$s_n = 3 - n2^{-n},$$
déterminez a_n et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

41. Quand de l'argent est dépensé pour payer des biens et des services, ceux qui encaissent cet argent en dépensent à leur tour une partie. Les personnes qui ont encaissé cet argent, dépensé pour la deuxième fois, en dépenseront elles aussi une partie, etc.

Les économistes appellent cette réaction en chaîne l'*effet multiplicateur*. Dans une communauté hypothétique isolée, le gouvernement amorce le processus en dépensant E euros. On suppose que celui qui encaisse de cet argent en dépenses $100c\%$ et en épargne $100s\%$. Les valeurs c et s sont appelées *propension marginale à consommer* et *propension marginale à épargner* et, bien sûr, $c + s = 1$.

a) Soit S_n la somme totale dépensée après n transactions. Écrivez une expression de S_n.

b) Montrez que $\lim_{n\to\infty} S_n = kE$, où $k = 1/s$. Le nombre k est appelé le *multiplicateur*. Que vaut le multiplicateur si la propension marginale à consommer est 80% ?

REMARQUE • Les gouvernements se servent de ce principe pour justifier le déficit des finances publiques. Les banques utilisent ce principe pour prêter plus qu'elles n'ont en dépôt.

42. Une balle a la propriété que chaque fois qu'elle tombe d'une hauteur h sur une surface dure, elle rebondit d'une hauteur rh, où $0 < r < 1$. On suppose que la balle est lâchée d'une hauteur initiale de H mètres.

a) Quelle distance totale parcourerait la balle si elle rebondissait indéfiniment ?

b) Quelle serait la durée totale de son mouvement ?

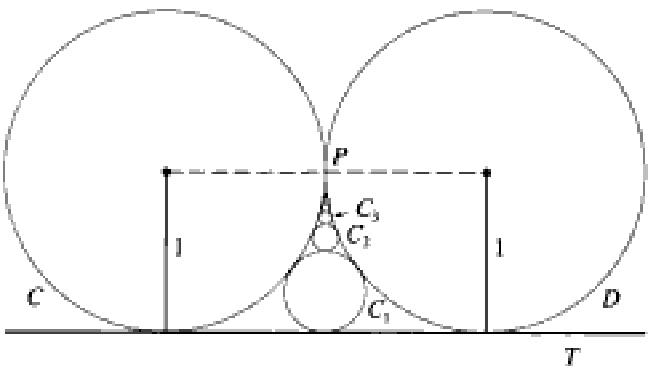
c) On suppose que chaque fois que la balle frappe la surface à la vitesse v, elle rebondit avec une vitesse $-kv$, où $0 < k < 1$. Combien de temps faut-il pour que la balle s'arrête ?

43. Quelle est la valeur de c telle que $\sum_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n} = 2$?

. Tracez dans une même fenêtre les courbes $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. En calculant les aires des régions comprises entre les courbes successives, donnez une démonstration géométrique du résultat établi dans l'exemple 6, à savoir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

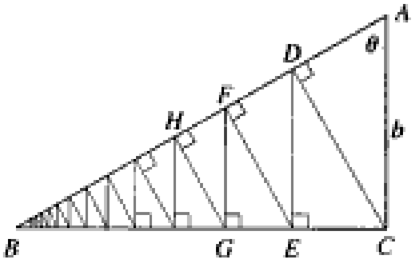
45. La figure montre deux cercles C et D de rayon 1 qui se touchent en P. T est une tangente commune ; C_1 est le cercle qui touche C, D et T ; C_2 est le cercle qui touche C, D et C_1 ; C_3 est le cercle qui touche C, D et C_2. En continuant ainsi indéfiniment, on produit une infinité de cercles $\{C_n\}$. Cherchez une expression du diamètre de C_n et démontrez géométriquement d'une autre manière encore le résultat de l'exemple 6.



46. Voici un triangle rectangle ABC dont l'angle en A mesure θ et dont le côté AC est de longueur b. On abaisse la perpendiculaire CD à AB, puis la perpendiculaire DE à BC, puis la perpendiculaire EF à AB, ces constructions se poursuivant indéfiniment, comme dans la figure. Déterminez la longueur totale de toutes les perpendiculaires

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en fonction de b et de θ.



47. Qu'est-ce qui est faux dans les calculs suivants ?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensait que ceci était une preuve de l'existence de Dieu car « quelque chose avait été créé de rien »).

48. Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) est convergente, démontrez que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ est divergente.

49. Si $\sum a_n$ est convergente et $\sum b_n$ divergente, montrez que $\sum(a_n + b_n)$ est divergente. [*Suggestion :* raisonnez par l'absurde.]

50. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont toutes deux divergentes, est-ce que $\sum(a_n + b_n)$ est nécessairement divergente ?

51. On suppose qu'une série $\sum a_n$ a des termes positifs et que ses sommes partielles s_n satisfont à l'inégalité $s_n \leqslant 1000$ quel que soit n. Expliquez pourquoi $\sum a_n$ est forcément convergente.

52. Il a été question de la suite de Fibonacci dans la section 8.1. Elle est définie par

$$f_1 = 1, \qquad f_2 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3.$$

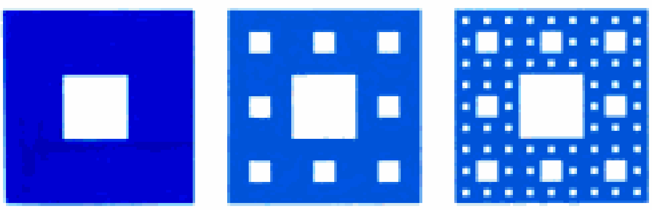
Démontrez chacun des résultats suivants.

a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

3. L'**ensemble de Cantor**, du nom du mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918), est construit comme ceci. On part de l'intervalle fermé $[0, 1]$ et on lui enlève l'intervalle ouvert $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Il reste les deux intervalles $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$, que l'on divise en trois et desquels on enlève un intervalle ouvert central. Il reste quatre intervalles desquels on retire comme précédemment un intervalle ouvert au milieu de longueur un tiers de leur longueur. On continue ainsi indéfiniment. L'ensemble de Cantor est l'ensemble des nombres de $[0, 1]$ qui reste après que tous ces intervalles aient été enlevés.
   a) Démontrez que la longueur totale de tous les intervalles qui ont été enlevés mesure 1. Malgré cela, l'ensemble de Cantor contient encore une infinité de nombres. Donnez des exemples de nombres qui appartiennent à l'ensemble de Cantor.
   b) Le **tapis de Sierpinski** est le correspondant à deux dimensions de l'ensemble de Cantor. Il est construit en supprimant le carré central d'un carré de côté 1 partitionné en 9 carrés isométriques, puis en supprimant les carrés centraux des huit carrés restants après qu'ils aient été eux aussi partitionnés en 9, etc. (La figure montre les trois premières étapes de la construction.) Montrez que la somme des aires qui ont été enlevées vaut 1. Cela implique que l'aire du tapis de Sierpinski vaut 0.



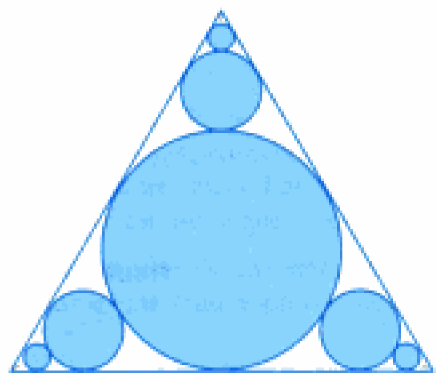
54. a) Une suite $\{a_n\}$ est définie par la formule de récurrence $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ pour $n \geqslant 3$, où a_1 et a_2 sont des nombres réels quelconques. Étudiez quelques-unes des suites qui découlent de différentes valeurs de a_1 et a_2 et utilisez votre calculatrice pour conjecturer la limite de la suite.
   b) Déterminez $\lim_{n\to\infty} a_n$ en termes de a_1 et a_2 en cherchant l'expression de $a_{n+1} - a_n$ en termes de $a_2 - a_1$ et en sommant.

55. Considérez la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$

   a) Calculez les sommes partielles s_1, s_2, s_3 et s_4 ; reconnaissez-vous les dénominateurs ? Écrivez une formule générale pour s_n en exploitant la régularité observée dans les premiers termes.
   b) Démontrez par induction que votre réponse est correcte quel que soit n.
   c) Montrez que la série est convergente et calculez sa somme.

56. La figure montre une infinité de cercles qui s'approchent des sommets d'un triangle équilatéral, chaque cercle touchant les autres cercles et les côtés du triangle. Si le côté du triangle mesure 1 unité de longueur, calculez l'aire totale qu'occupent les cercles.



8.3 Le test de l'intégrale et le test de comparaison ; calculer la somme

Calculer la somme exacte d'une série est, en général, une tâche difficile. Si nous avons su le faire pour les séries géométriques et pour la série $\sum 1/[n(n+1)]$ c'est parce que dans ces deux cas nous disposions d'une expression simple de la $n^{\text{ième}}$ somme partielle s_n. Mais il n'est habituellement pas facile de calculer $\lim_{n\to\infty} s_n$. Voilà pourquoi, dans cette section et dans la suivante, nous mettons au point des tests qui permettent de savoir si une série est convergente ou divergente sans en calculer explicitement la somme. Dans certains cas, notre méthode va même nous conduire à une bonne estimation de la somme.

Cette section n'envisage que les séries à termes positifs, celles dont la suite des sommes partielles est donc strictement croissante. Décider pour ces séries si elles sont convergentes ou non revient alors, en vertu du Théorème de la suite monotone, à examiner seulement si les sommes partielles sont bornées ou non.

■ Tester avec une intégrale

Examinons la série dont les termes sont les inverses des carrés des entiers positifs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1,4636
10	1,5498
50	1,6251
100	1,6350
500	1,6429
1000	1,6439
5000	1,6447

Bien qu'il n'y ait pas de formule simple pour la somme s_n des n premiers termes, la table calculée par ordinateur de quelques termes de la suite s_n suggère que cette suite tend vers une valeur proche de 1,64 lorsque n tend vers l'infini. Il semble donc que la série soit convergente.

Nous pouvons renforcer cette intuition grâce à un argument géométrique. La figure 1 montre la courbe $y = 1/x^2$ et des rectangles situés sous cette courbe. La base de chaque rectangle mesure 1 unité de longueur ; la hauteur est égale à la valeur de la fonction $y = 1/x^2$ en l'extrémité droite de l'intervalle. La somme des aires de ces rectangles est donc égale à

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

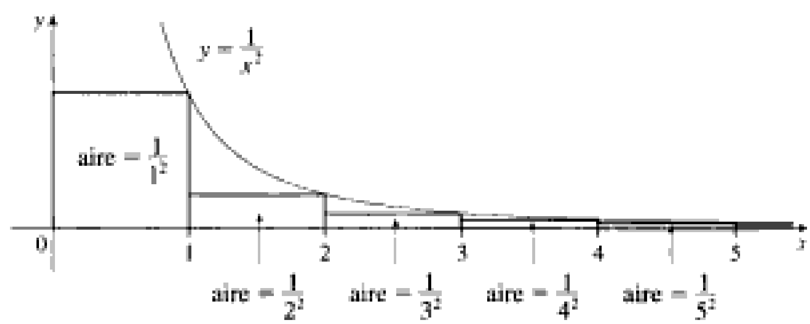


FIGURE 1

L'aire totale des rectangles, à l'exception du premier, est inférieure à l'aire sous la courbe $y = 1/x^2$ pour $x \geqslant 1$, dont la valeur est donnée par l'intégrale $\int_1^{\infty} (1/x^2)\,dx$. Dans la section 5.9, nous avons découvert que cette intégrale impropre était convergente et valait 1. La figure suggère donc que toutes les sommes partielles sont inférieures à

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 2.$$

Comme les sommes partielles sont bornées, la série est convergente. La somme de la série, (la limite des sommes partielles) est aussi inférieure à 2 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

[La valeur exacte de la somme de cette série, à savoir $\pi^2/6$, fut trouvée par le mathématicien suisse Leohnard Euler (1707-1783) mais la démonstration de ce résultat dépasse l'objectif de ce livre.]

Examinons maintenant la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3,2317
10	5,0210
50	12,7524
100	18,5896
500	43,2834
1000	61,8010
5000	139,9681

À en juger aux quelques valeurs de s_n qui figurent dans la table, il ne semble pas que cette suite s'approche d'un nombre fini. Nous sommes donc d'avis que la série donnée ne converge pas. À nouveau, nous faisons appel à une illustration graphique pour en être plus sûrs. La figure 2 montre la courbe $y = 1/\sqrt{x}$ et des rectangles dont le bord supérieur se trouve *au-dessus* de la courbe.

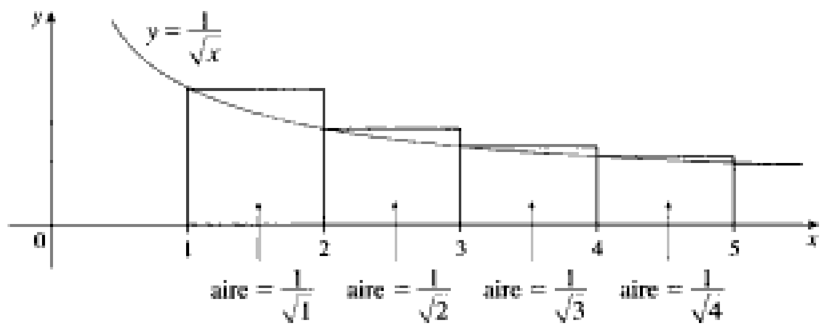


FIGURE 2

La base de chaque rectangle mesure 1 unité de longueur ; la hauteur est égale à la valeur de la fonction $y = 1/\sqrt{x}$ en l'extrémité *gauche* de l'intervalle. La somme des aires de tous ces rectangles est donc égale à

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

L'aire totale des rectangles est supérieure à l'aire sous la courbe $y = 1/\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 1$, donnée par la valeur de l'intégrale $\int_1^{\infty} (1/\sqrt{x})dx$. Nous savons depuis la section 5.9 que cette intégrale impropre est divergente. En d'autres mots, l'aire sous la courbe est infinie. La somme de la série est donc infinie c'est-à-dire que la série est divergente.

Voici le test dont la démonstration consiste en une sorte de raisonnement géométrique semblable à celui que nous avons tenu à propos des deux suites précédentes.

Le Test de l'intégrale On suppose que f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$ et soit $a_n = f(n)$. Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente si et seulement si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ est convergente. En d'autres mots :

a) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ est convergente, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente.

b) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ est divergente, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente.

REMARQUE • Dans le Test de l'intégrale, il n'est pas nécessaire de faire partir la série ou l'intégrale à $n = 1$. Par exemple, pour tester la série

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2}, \text{ on se sert de } \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx.$$

De plus, il n'est pas nécessaire que f soit toujours décroissante. Ce qui est important est qu'elle le soit *finalement*, c'est-à-dire qu'elle soit décroissante pour des valeurs de x plus grandes qu'un certain nombre N. Alors, $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ est convergente, et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est aussi convergente par référence à la remarque 4 de la section 8.2.

EXEMPLE 1 ■ Déterminez si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ converge ou diverge.

SOLUTION La fonction $f(x) = (\ln x)/x$ est positive et continue pour $x > 1$ parce que la fonction logarithme est continue. Mais le caractère monotone de f n'étant pas évident, on calcule sa dérivée

$$f'(x) = \frac{x(1/x) - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

D'où, $f'(x) < 0$ quand $\ln x > 1$, c'est-à-dire $x > e$. Il s'ensuit que f est décroissante quand $x > e$ et on peut appliquer le Test de l'intégrale :

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\bigg]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty.$$

Comme l'intégrale impropre est divergente, la série $\sum(\ln n)/n$ est aussi divergente conformément au Test de l'intégrale.

EXEMPLE 2 ■ Pour quelles valeurs de p la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge-t-elle ?

SOLUTION Lorsque $p < 0$, $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = \infty$. Lorsque $p = 0$, $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) = 1$. À chaque fois, $\lim_{n\to\infty}(1/n^p) \neq 0$, ce qui empêche la série donnée de converger en vertu du Test de divergence [voyez (7) dans la section 8.2].

Lorsque $p > 0$, la fonction $f(x) = 1/x^p$ est manifestement continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$. Or, il a été établi dans la section 5.9, équation (2), que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \text{ converge si } p > 1 \text{ et diverge si } p \leqslant 1.$$

Par application du Test de l'intégrale, la série $\sum 1/n^p$ est convergente lorsque $p > 1$ et divergente lorsque $0 < p \leqslant 1$. (Dans le cas $p = 1$, il s'agit de la série harmonique étudiée à l'exemple 7 de la section 8.2.)

Les séries de l'exemple 2 portent le nom de **séries de Riemann**. Leur importance dans toute la suite du chapitre justifie de reprendre les conclusions de l'exemple 2 dans un cadre en vue de s'y référer ultérieurement.

1 La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente lorsque $p > 1$ et divergente lorsque $p \leqslant 1$.

■ Test de comparaison

La série

2 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

fait penser à la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, qui est une série géométrique pour laquelle $a = 1/2$ et $r = 1/2$ et qui est donc convergente. Vu que la série (2) ressemble à cette série géométrique, on est tenté de penser qu'elle converge aussi. Et c'est le cas, en effet. L'inégalité

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

met en évidence que les termes de la série donnée sont inférieurs à ceux de la série géométrique, ce qui entraîne que toutes ses sommes partielles seront également inférieures à 1 (la somme de la série géométrique). De ce fait, les suites partielles forment une suite croissante et bornée, donc convergente. Il s'ensuit encore que la somme de la série est inférieure à la somme de la série géométrique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1.$$

Un raisonnement semblable sert à démontrer le test suivant, qui ne s'applique qu'aux séries à termes positifs. La première partie dit que si on a affaire à une série dont les termes sont *plus petits* que ceux d'une série connue convergente, alors la série en question est aussi convergente. La deuxième partie dit que si on part d'une série dont les termes sont *plus grands* que ceux d'une série connue divergente, alors elle est aussi divergente.

Le Test de comparaison Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ soient des séries à termes positifs.

a) Si $\sum b_n$ est convergente et $a_n \leqslant b_n$ quel que soit n, alors $\sum a_n$ est aussi convergente.

b) Si $\sum b_n$ est divergente et $a_n \geqslant b_n$ quel que soit n, alors $\sum a_n$ est aussi divergente.

…ries de référence pour le Test de comparaison

L'emploi du Test de comparaison est subordonné à la connaissance d'un certain nombre de séries $\sum b_n$ qui servent de repère. La plupart du temps, il s'agit d'une série de Riemann [$\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$ et diverge si $p \leqslant 1$; voyez (1)] ou d'une série géométrique [$\sum ar^{n-1}$ converge si $|r| < 1$ et diverge si $|r| \geqslant 1$; voyez (4) dans la section 8.2].

EXEMPLE 3 ■ Déterminez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

SOLUTION Comme, pour de grandes valeurs de n, le terme dominant du dénominateur est $2n^2$, on compare la série donnée à la série $\sum 5/(2n^2)$. On observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2},$$

parce que le membre de gauche a un plus grand dénominateur. (Dans les notations du Test de comparaison, a_n est le membre de gauche et b_n est le membre de droite.) D'autre part, on sait aussi que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

est convergente (série de Riemann avec $p = 2 > 1$). Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

est convergente, d'après la partie a) du Test de comparaison.

Bien que la condition $a_n \leqslant b_n$ ou $a_n \geqslant b_n$ du Test de comparaison soit posée pour tout n, il suffit de la vérifier pour $n \geqslant N$, où N est un certain entier fixé, parce que la convergence d'une série n'est pas affectée par un nombre fini de termes. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant.

EXEMPLE 4 ■ Testez du point de vue de la convergence la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

SOLUTION On a déjà soumis cette série au Test de l'intégrale, dans l'exemple 1, mais on peut aussi la tester en la comparant à la série harmonique. On observe que $\ln n > 1$ pour $n \geqslant 3$ et de là

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 3.$$

Or, $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série de Riemann avec $p = 1$). D'où la série donnée est divergente, selon le Test de comparaison.

REMARQUE ● Pour que le Test de comparaison soit concluant, il faut que les termes d'une série soient plus petits que ceux d'une série convergente ou plus grands que ceux d'une série divergente. S'ils sont plus grands que ceux d'une série convergente ou plus petits que ceux d'une série divergente, le Test de comparaison n'est pas d'application. Considérons, par exemple, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}.$$

L'inégalité

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

est inutile pour ce qui est du Test de comparaison parce que $\sum b_n = \sum (\frac{1}{2})^n$ est convergente et $a_n > b_n$. Néanmoins, on pressent que $\sum 1/(2^n - 1)$ est convergente car elle ressemble beaucoup à la série géométrique convergente $\sum (\frac{1}{2})^n$. Dans de tels cas, on peut employer le test suivant.

Forme limite du test de comparaison Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ soient des séries à termes positifs. Si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c,$$

où c est un nombre fini et $c > 0$, alors, ou les deux séries convergent, ou les deux séries divergent.

Sans vouloir démontrer cette Forme limite du test de comparaison, ce qu'elle affirme semble raisonnable parce que, pour n grand, $a_n \approx cb_n$.

EXEMPLE 5 ■ Testez du point de vue de la convergence la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$.

SOLUTION Nous mettons en œuvre la Forme limite du test de comparaison avec

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}.$$

Nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1.$$

Puisque cette limite existe et que $\sum 1/2^n$ est une série géométrique convergente, la série donnée converge en raison de la Forme limite du test de comparaison.

Estimer la somme d'une série

On suppose avoir su montrer, par le Test de l'intégrale, que la série $\sum a_n$ est convergente et on souhaite maintenant trouver une valeur approchée de la somme s de la série. N'importe quelle somme partielle d'ordre n est évidemment une valeur approchée de s puisque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Mais de quelle qualité est cette approximation ? Pour le savoir, il faut avoir une idée de la grandeur du **reste**

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

Le reste R_n est l'erreur commise lorsqu'on retient la somme partielle d'ordre n comme approximation de la somme totale.

On utilise la même notation et la même idée que dans le Test de l'intégrale. En comparant, dans la figure 3, les aires des rectangles avec l'aire sous la courbe $y = f(x)$ pour $x > n$, on voit que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^{\infty} f(x)dx.$$

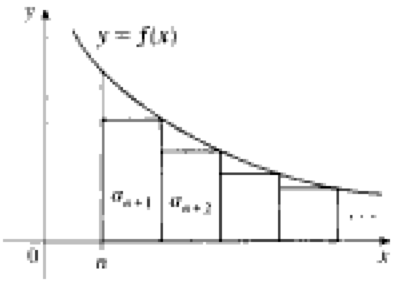


FIGURE 3

De même, on voit dans la figure 4 que

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx.$$

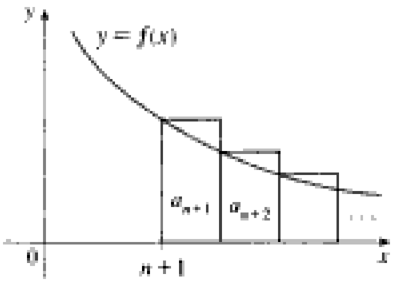


FIGURE 4

On a ainsi démontré l'estimation de l'erreur que voici.

3 **Estimation de l'erreur liée au Test de l'intégrale** Si $\sum a_n$ converge en raison du Test de l'intégrale et si $R_n = s - s_n$, alors

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^{\infty} f(x)dx.$$

EXEMPLE 6 ■

a) Quelle valeur approchée de $\sum 1/n^3$ fournit la somme des 10 premiers termes ? Estimez l'erreur que comporte cette approximation.

b) Combien de termes faut-il retenir pour que la somme soit précise à moins de 0,0005 près ?

SOLUTION Pour les deux parties a) et b) il faut connaître $\int_n^\infty f(x)dx$, avec $f(x) = 1/x^3$. On calcule cette intégrale

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

a) $$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{10^3} \approx 1{,}1975$$

D'après l'estimation du reste (3), on a

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}.$$

L'erreur ne dépasse donc pas 0,005.

b) Une précision à moins de 0,0005 signifie qu'il faut trouver une valeur de n telle que $R_n \leqslant 0{,}0005$. Comme

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2},$$

il faut que $\frac{1}{2n^2} < 0{,}0005$. La résolution de cette inégalité conduit à

$$n^2 > \frac{1}{0{,}001} = 1000 \qquad \text{ou} \qquad n > \sqrt{1000} \approx 31{,}6.$$

Il faudra donc additionner 32 termes pour être sûr d'une précision de l'ordre de 0,0005.

En additionnant s_n de chaque côté de l'inégalité (3), on obtient

4 $$\boxed{s_n + \int_{n+1}^\infty f(x)dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_n^\infty f(x)dx,}$$

parce que $s_n + R_n = s$. L'inégalité (4) donne une borne inférieure et une borne supérieure de s. Ce sont de meilleures approximations de la somme de la série que les sommes partielles.

EXEMPLE 7 ■ Employez (4) avec $n = 10$ pour estimer la valeur de la série $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}$.

SOLUTION L'inégalité (4) devient ici

$$s_{10} + \int_{11}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx.$$

De l'exemple 6, on sait que

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2},$$

d'où

$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}.$$

On introduit $s_{10} \approx 1{,}197532$,

$$1{,}201664 \leqslant s \leqslant 1{,}202532.$$

En prenant comme valeur approchée de s le point milieu de cet intervalle, l'erreur ne dépasse pas la moitié de la longueur de l'intervalle. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1{,}2021 \qquad \text{avec une erreur } < 0{,}0005.$$

Si on compare l'exemple 7 à l'exemple 6, on voit que l'estimation améliorée issue de (4) peut être beaucoup meilleure que l'estimation $s \approx s_n$. Pour que l'erreur ne dépasse pas 0,0005, il fallait retenir 32 termes dans l'exemple 6 contre seulement 10 dans l'exemple 7.

On suppose avoir su montrer par le Test de comparaison que la série $\sum a_n$ converge, confrontée à une série $\sum b_n$. Dans ce cas, on peut estimer la somme $\sum a_n$ en comparant les restes, comme l'explique l'exemple suivant.

EXEMPLE 8 ■ Additionner les 100 premiers termes de la série $\sum 1/(n^3+1)$ pour obtenir une valeur approchée de sa somme. Estimer l'erreur dont est affectée cette valeur approchée.

SOLUTION La convergence de la série donnée découle du Test de comparaison et de l'inégalité

$$\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}.$$

Le reste T_n associé à la série $\sum 1/n^3$ qui a servi de repère dans la comparaison a été estimé dans l'exemple 6. On avait trouvé

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}.$$

Par conséquent, le reste R_n de la série donnée vérifie

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

Pour $n = 100$, cela donne

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0{,}00005.$$

Une calculatrice programmable ou un ordinateur fournit la somme partielle d'ordre 100 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3+1} \approx 0{,}6864538$$

qui est la valeur exacte à moins de 0,00005 près.

8.3 Exercices

1. Faites un dessin qui montre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,3}}\, dx$$

Que pouvez-vous en conclure au sujet de la série ?

2. On suppose que f est une fonction continue, positive et décroissante pour $x \geqslant 1$ et que $a_n = f(n)$. À l'aide d'un dessin, classez les trois quantités suivantes en ordre croissant :

$$\int_1^n f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{n-1} a_i \qquad \sum_{i=2}^{n} a_i$$

3. On suppose que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries à termes positifs et que $\sum b_n$ est convergente.

a) Si $a_n > b_n$ quel que soit n, que pouvez-vous dire au sujet de $\sum a_n$? Pourquoi ?

b) Si $a_n < b_n$ quel que soit n, que pouvez-vous dire au sujet de $\sum a_n$? Pourquoi ?

4. On suppose que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries à termes positifs et que $\sum b_n$ est divergente.

a) Si $a_n > b_n$ quel que soit n, que pouvez-vous dire au sujet de $\sum a_n$? Pourquoi ?

b) Si $a_n < b_n$ quel que soit n, que pouvez-vous dire au sujet de $\sum a_n$? Pourquoi ?

5. Il est important de bien distinguer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^b \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b^n.$$

Quel nom donne-t-on à la première série ? Et à la seconde ? Pour quelle valeur de b la première série converge-t-elle ? Pour quelle valeur de b la seconde série converge-t-elle ?

6-22 ■ Déterminez si la série est convergente ou divergente.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n^2}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n + 5}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 5^n}{4^n}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{1 + 3^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n}{\sqrt[3]{n^{10} - 4n^2}}$

23. Déterminez les valeurs de p pour lesquelles la série suivante est convergente :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

24. a) Calculer la somme partielle s_{10} de la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estimez l'erreur commise en prenant s_{10} comme valeur approchée de la somme de la série.

b) Employez la formule (4) avec $n = 10$ pour obtenir une meilleure valeur approchée de la somme.

c) Déterminez une valeur de n telle que s_n soit exacte à moins de 0,00001.

25. a) Utilisez la somme des 10 premiers termes pour estimer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. Est-ce une bonne estimation ?

b) Améliorez cette estimation en utilisant (4) avec $n = 10$.

c) Déterminez une valeur de n qui garantira que l'erreur dans l'approximation $s \approx s_n$ est inférieure à 0,001.

26. Calculez avec trois décimales exactes la valeur de la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$.

27. Estimez $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ à 0,01 près.

28. Combien de termes de la série $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ faudrait-il additionner pour obtenir la valeur de sa somme à moins de 0,01 près ?

29-30 ■ Utilisez les 10 premiers termes pour approcher la somme de la série. Estimez l'erreur.

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + n^2}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

31. a) Utilisez la courbe $y = 1/x$ pour montrer que si s_n est la somme partielle d'ordre n de la série harmonique, alors

$$s_n \leqslant 1 + \ln n.$$

b) La série harmonique diverge, mais très lentement. Utilisez la partie a) pour montrer que la somme du premier million de termes est inférieure à 15 et la somme du premier milliard de termes est inférieure à 22.

32. a) Démontrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ est convergente.

b) Trouvez une borne supérieure de l'erreur commise lors de l'approximation $s \approx s_n$.

c) À partir de quelle valeur de n cette borne supérieure est-elle inférieure à 0,05 ?

d) Calculez s_n pour cette valeur de n.

33. L'écriture décimale $0,d_1d_2d_3\ldots$ d'un nombre, (où d_i est un des chiffres $0, 1, 2, \ldots, 9$) signifie

$$0,d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Montrez que cette série converge toujours.

34. Déterminez toutes les valeurs positives de b pour lesquelles la série $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

35. Sachant que $\sum a_n$ est une série à termes positifs convergentes, est-il vrai que $\sum \sin(a_n)$ est aussi convergente ?

36. Montrez que si $a_n > 0$ et $\sum a_n$ convergente, alors $\sum \ln(1 + a_n)$ est convergente.

8.4 D'autres tests de convergence

Les tests de convergence que nous avons présentés jusqu'à présent ne s'appliquaient qu'aux séries à termes positifs. Dans cette section, nous apprenons comment traiter des séries dont les termes ne sont pas nécessairement positifs.

■ Les séries alternées

Une **série alternée** est une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs. En voici deux exemples :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

Nous voyons sur ces exemples que le terme d'ordre n d'une série alternée est de la forme

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

où b_n est un nombre positif. (En fait, $b_n = |a_n|$.)

Le test que voici certifie que si les termes d'une série alternée pris en valeur absolue décroissent vers 0, alors la série converge.

Le Test des séries alternées Si la série alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfait à

a) $b_{n+1} \leqslant b_n$ pour tout n

b) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

alors la série est convergente.

Nous ne démontrerons pas formellement ce test, mais la figure 1 illustre l'idée centrale de la démonstration. Nous reportons $s_1 = b_1$ sur un axe gradué. Pour reporter s_2, il faut retrancher b_2. Donc s_2 est à gauche de s_1. Ensuite, pour reporter s_3, il faut ajouter b_3, donc s_3 est à droite de s_2. Mais comme $b_3 < b_2$, s_3 est à gauche de s_1. En continuant de cette manière, nous constatons que les sommes partielles oscillent d'avant en arrière, d'un pas de plus en plus petit puisque b_n tend vers 0. Les sommes partielles paires $s_2, s_4, s_6, \ldots$ forment une suite croissante, tandis que les sommes partielles impaires $s_1, s_3, s_5, \ldots$ forment une suite décroissante. Il semble dès lors plausible que ces deux suites tendent vers un certain nombre s, qui est la somme de la série.

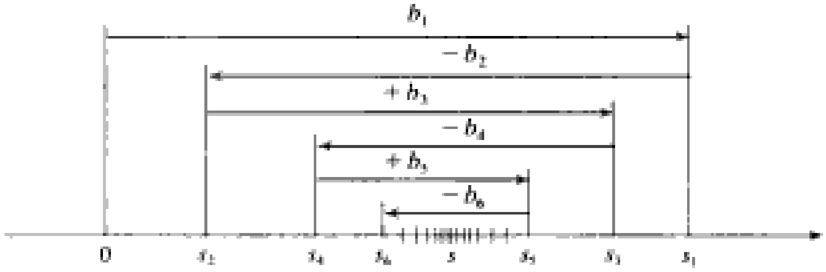


FIGURE 1

La figure 2 illustre l'exemple 1 en montrant les points représentatifs des termes $a_n = (-1)^{n-1}/n$ et des sommes partielles s_n. Remarquez que les valeurs de s_n zigzaguent d'un côté à l'autre de la valeur limite qui se situe aux alentours de 0.7. La somme exacte de cette série vaut $\ln 2 \approx 0.693$.

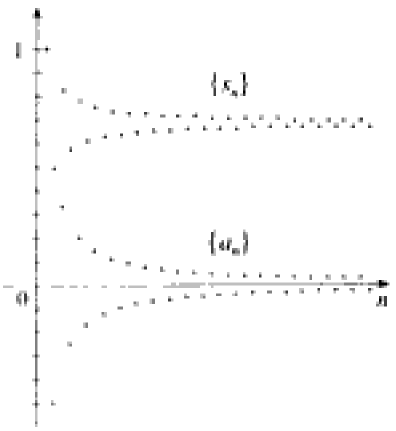


FIGURE 2

EXEMPLE 1 ■ La série harmonique alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

satisfait à

a) $b_{n+1} < b_n$ parce que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0.$

En conformité avec le Test des séries alternées, la série est convergente. ■

EXEMPLE 2 ■ La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ est alternée, mais

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}.$$

De ce fait, la condition b) n'est pas satisfaite. À la place, nous cherchons la limite du terme général de la série :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}.$$

Comme la limite n'existe pas, la série diverge en raison du Test de divergence. ■

EXEMPLE 3 ■ Testez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ est convergente ou divergente.

SOLUTION Puisque la série donnée est alternée, nous essayons de vérifier les conditions a) et b) du Test des séries alternées.

Contrairement à la situation de l'exemple 1, il n'est pas évident que la suite donnée par $b_n = n^2/(n^3+1)$ soit décroissante. Cependant, si nous considérons la fonction associée $f(x) = x^2/(x^3+1)$, nous trouvons que

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}.$$

Au lieu de vérifier la condition a) du Test des séries alternées en calculant la dérivée, nous aurions pu vérifier que $b_{n+1} < b_n$ directement en utilisant la méthode de la solution 1 de l'exemple 10 dans la section 8.1.

Comme seuls les x positifs sont envisagés, nous constatons que $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, c'est-à-dire $x > \sqrt[3]{2}$. Donc f est décroissante sur l'intervalle $]\sqrt[3]{2}, \infty[$. Cela veut dire que $f(n+1) < f(n)$ et de là, que $b_{n+1} < b_n$ à partir de $n = 2$. (L'inégalité $b_2 < b_1$ peut être vérifiée directement mais ce qui compte, c'est que la suite $\{b_n\}$ soit finalement décroissante.)

La condition b) est facilement vérifiée :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = 0.$$

Par conséquent, la série donnée est convergente en vertu du Test des séries alternées.

L'erreur dont est affectée la somme partielle d'ordre n lorsqu'elle est prise comme valeur approchée de la somme s est le reste $R_n = s - s_n$. Le théorème suivant affirme que dans le cas des séries alternées qui satisfont aux conditions du Test des séries alternées, l'erreur est inférieure à b_{n+1} qui est la valeur absolue du premier terme négligé.

Théorème sur l'estimation d'une série alternée Si $s = \sum(-1)^{n-1}b_n$ est la somme d'une série alternée qui satisfait à

$$\text{a) } 0 < b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{et} \qquad \text{b) } \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

alors

$$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}.$$

Il est facile de vérifier géométriquement sur la figure 1 pourquoi ce résultat est vrai. Par exemple, $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$ etc.

EXEMPLE 4 ■ Quelle est la valeur avec trois décimales correctes de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ (par définition, $0! = 1$) ?

SOLUTION On commence par observer que la série est convergente, conformément au Test des séries alternées, parce que

a) $\dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!(n+1)} < \dfrac{1}{n!}$;

b) comme $0 < \dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{n!} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Afin de se faire une idée de combien de termes il va falloir retenir pour arriver à l'approximation demandée, on écrit en extension quelques termes de la série :

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

On remarque que

$$b_7 = \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} = 0{,}0002,$$

et que

$$s_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 0{,}368056.$$

Or, par le Théorème sur l'estimation d'une série alternée, on sait que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0{,}0002.$$

Une telle erreur n'affectant pas la troisième décimale, on a

$$s \approx 0{,}368$$

valeur correcte jusqu'à la troisième décimale.

Dans la section 8.7, on va démontrer que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ pour tout x. Ainsi, la valeur obtenue dans cet exemple n'est autre qu'une approximation de e^{-1}.

REMARQUE ● Cette règle qui dit que l'erreur (en retenant s_n pour approcher s) est inférieure au premier terme négligé n'est valide que pour les séries alternées qui satisfont au Théorème sur l'estimation d'une série alternée. Cette règle ne s'applique pas à d'autres types de séries.

■ La convergence absolue

À n'importe quelle série $\sum a_n$ on peut associer la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

dont les termes sont les valeurs absolues des termes de la série originale.

Nous disposons de tests pour les séries à termes positifs et pour les séries alternées. Mais quoi faire avec les séries dont le signe des termes change irrégulièrement ? L'exemple 7 va montrer que l'idée de l'absolue convergence est parfois utile dans ce cas.

Définition Une série $\sum a_n$ est dite **absolument convergente** lorsque la série des valeurs absolues $\sum |a_n|$ est convergente.

Remarquez que si $\sum a_n$ est une série à termes positifs, alors $|a_n| = a_n$ et la convergence absolue n'est rien de plus que la convergence.

EXEMPLE 5 ■ La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

est absolument convergente parce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

est une série de Riemann convergente ($p = 2$).

EXEMPLE 6 ■ Nous savons que la série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

est convergente (voyez l'exemple 1), mais elle n'est pas absolument convergente parce que la série des valeurs absolues correspondante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

est la série harmonique (ou série de Riemann avec $p = 1$), divergente donc.

L'exemple 6 montre qu'il est possible qu'une série soit convergente sans être absolument convergente. Cependant, le théorème suivant montre que l'absolue convergence entraîne la convergence.

1 Théorème Si une série $\sum a_n$ est absolument convergente alors, elle est convergente.

Pour voir pourquoi le Théorème 1 est vrai, observons d'abord que l'inégalité

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

est vraie parce que $|a_n|$ est égal soit à a_n, soit à $-a_n$. Ensuite, si $\sum a_n$ est absolument convergente, $\sum |a_n|$ l'est, et de là, $\sum 2|a_n|$ aussi. Par application du Test de comparaison sur l'inégalité qui précède, on peut donc conclure à la convergence de la série $\sum(a_n + |a_n|)$. De là, en écrivant $\sum a_n$ comme ceci

$$\sum a_n = \sum(a_n + |a_n|) - \sum |a_n|,$$

on voit qu'elle est convergente en tant que différence de deux séries convergentes. ■

La figure 3 montre les points représentatifs des a_n et des sommes partielles s_n de la série de l'exemple 7. Il ne s'agit pas d'une série alternée bien que cette série comporte des termes positifs et des termes négatifs.

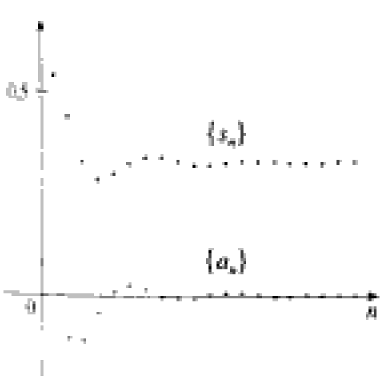


FIGURE 3

EXEMPLE 7 ■ Dites si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

est convergente ou divergente.

SOLUTION La série a des termes positifs et des termes négatifs mais n'est pas alternée. (Le premier terme est positif, les trois suivants sont négatifs et les trois suivants sont positifs. Le signe change irrégulièrement.) Le Test de comparaison s'applique aisément à la série des valeurs absolues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}.$$

En effet, puisque $|\cos n| \leqslant 1$ quel que soit n, on a

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Vu que $\sum 1/n^2$ est convergente (série de Riemann avec $p = 2$), $\sum |\cos n|/n^2$ l'est aussi par comparaison. La série donnée est donc absolument convergente, et de là, convergente par le Théorème 1.

■ Test du quotient

Le test que voici est efficace pour déterminer si une série donnée est absolument convergente.

Le Test du quotient

a) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est absolument convergente (et donc convergente).

b) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente.

La démontration du Test du quotient repose sur la comparaison de la série donnée avec une série géométrique. Il n'est pas étonnant qu'interviennent des séries géométriques parce que, rappelons-le, elles sont caractérisées par le fait que le rapport r des termes consécutifs est constant et elles sont convergentes lorsque $|r| < 1$. Ici, dans la partie a) du Test, le rapport des termes consécutifs n'est pas constant mais il tend vers L, et donc, pour n grand, ce rapport $|a_{n+1}/a_n|$ est presque constant et la série converge lorsque $L < 1$.

REMARQUE • Au cas où $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, le Test du quotient ne mène à aucune conclusion. Par exemple, pour la série convergente $\sum 1/n^2$, on a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{lorsque } n \to \infty$$

alors que pour la série divergente $\sum 1/n$, on a aussi

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Par suite, au cas où $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la série peut aussi bien converger que diverger. Le Test du quotient n'est donc pas concluant et il faut se tourner vers un autre test.

EXEMPLE 8 ■ Vérifiez si la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ est absolument convergente.

SOLUTION On recourt au Test du quotient avec $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1.$$

La série proposée est donc absolument convergente, en vertu du Test du quotient, et par conséquent convergente.

Le calcul des sommes

Nous avons déjà utilisé diverses méthodes pour calculer la somme d'une série – la méthode dépendant du test de convergence exploité. Qu'en est-il du calcul de la somme des séries testées par le Test du quotient ? Deux possibilités se présentent : si la série est alternée, comme celle de l'exemple 8, il vaut mieux se tourner vers le Théorème de calcul des séries alternées. Si les termes sont tous positifs, alors il existe des méthodes spéciales expliquées dans l'exercice 34.

EXEMPLE 9 ■ Testez la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUTION Puisque les termes $n^n/n!$ sont positifs, il n'est pas nécessaire d'introduire des valeurs absolues.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

(Voyez l'équation 6 dans la section 3.7). Vu que $e > 1$, la série proposée est, en vertu du Test du quotient, divergente.

REMARQUE • Bien que le Test du quotient ait fonctionné dans l'exemple 9, il est plus facile d'employer directement le Test de divergence. Vu que

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

il suit que a_n ne tend pas vers 0 lorsque $n \to \infty$. Et par suite, la série proposée est divergente en raison du Test de divergence.

8.4 Exercices

1. a) Qu'est-ce qu'une série alternée ?

   b) Sous quelles conditions une série alternée converge-t-elle ?

   c) Si ces conditions sont satisfaites, que pouvez-vous dire à propos du reste après n termes ?

2. Que pouvez-vous dire à propos de la série $\sum a_n$ dans chacun des cas suivants ?

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0{,}8$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

3-8 ■ Testez la convergence ou la divergence.

3. $\frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{3}{7} - \frac{4}{8} + \frac{5}{9} - \cdots$

4. $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} - \dfrac{1}{\ln 5} + \dfrac{1}{\ln 6} - \cdots$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5n+1}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n^2}{n^2+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n^2+1}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

9. La somme partielle d'ordre 50, s_{50}, de la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ est-elle une surestimation ou une sous-estimation de la somme totale ? Expliquez.

10. Calculez les 10 premières sommes partielles de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

et représentez la suite des termes et la suite des sommes partielles dans une même fenêtre. Estimez l'erreur commise en utilisant la dixième somme partielle comme valeur approchée de la somme totale.

11. Pour quelles valeurs de p la série suivante est-elle convergente ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

12-14 ■ Combien de termes de la série faut-il additionner pour obtenir la somme avec la précision indiquée ?

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ (erreur $< 0{,}001$)

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n}}{n!}$ (erreur $< 0{,}01$)

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n}{4^n}$ (erreur $< 0{,}002$)

15-16 ■ Représentez la suite des termes et la suite des sommes partielles dans une même fenêtre. Utilisez le graphique pour estimer grossièrement la somme de la série. Ensuite, calculez la somme avec 4 décimales correctes, grâce au Théorème sur l'estimation d'une série alternée.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}$

17-18 ■ Calculez une valeur approchée de la somme de la série à la précision indiquée.

17. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^n n!}$ (quatre décimales exactes)

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^6}$ (cinq décimales exactes)

19-28 ■ Dites si la série est absolument convergente.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n}}{n^3}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{n}}{n!}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n^2}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^{n-1}}{(n+1)^2 4^{n+2}}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{n 3^{2n}}$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/6)}{n\sqrt{n}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!\, 10^n}$

28. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots$
$\qquad + \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)} + \cdots$

29. Les termes d'une série sont définis par une relation de récurrence

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n.$$

Déterminez si la série $\sum a_n$ converge ou diverge.

30. Une série $\sum a_n$ est définie par

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n.$$

Déterminez si la série $\sum a_n$ converge ou diverge.

31. Le Test du quotient n'apporte aucune conclusion pour certaines des séries suivantes. Lesquelles ?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

32. Pour quels entiers positifs k la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

converge-t-elle ?

33. a) Démontrez que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge pour tout x.

b) Tirez la conclusion que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ pour tout x.

34. Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et soit $r_n = a_{n+1}/a_n$. Si on suppose que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, alors $\sum a_n$ est convergente conformément au Test du quotient. Comme d'habitude, on désigne par R_n le reste après n termes, c'est-à-dire

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

a) Si $\{r_n\}$ est une suite décroissante et $r_{n+1} < 1$, démontrez, en sommant une série géométrique, que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}.$$

b) Si $\{r_n\}$ est une suite croissante, démontrez que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}.$$

35. a) Calculez la somme partielle s_5 de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Grâce à l'exercice 34, faites-vous une idée de l'erreur commise en retenant s_5 comme valeur de la somme de la série.

b) Calculez une valeur de n qui garantirait que s_n est une valeur approchée à moins de 0,00005. Calculez cette valeur approchée.

36. Calculez la somme des 10 premiers termes de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Grâce à l'exercice 34, faites-vous une idée de l'erreur commise.

8.5 Les séries entières

Une **série entière** est une série de la forme

1
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

où x est une variable et où les c_n sont des constantes, appelées les coefficients de la série. Chaque fois qu'une valeur est attribuée à x, la série (1) est une série de constantes qui peut être testée quant à sa convergence ou à sa divergence. La somme de la série est une fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

dont le domaine de définition est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série converge. Remarquez que f ressemble à un polynôme. La seule différence est que f a un nombre infini de termes.

Si par exemple $c_n = 1$ pour tout n, la série entière devient la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

qui est convergente quand $-1 < x < 1$ et divergente quand $|x| \geqslant 1$ (voyez l'équation 5 dans la section 8.2).

Plus généralement, une série de la forme

2
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

est appelée une **série entière en** $(x - a)$ ou une **série entière centrée en** a ou une **série entière autour de** a. Remarquez que l'écriture du terme correspondant à $n = 0$ dans les équations 1 et 2 repose sur la convention $(x-a)^0 = 1$, même quand $x = a$.

Remarquez aussi que quand $x = a$, tous les termes sont nuls pour $n \geqslant 1$, ce qui rend la série (2) toujours convergente en $x = a$.

EXEMPLE 1 ■ Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ converge-t-elle ?

SOLUTION On utilise le Test du quotient. En notant a_n, comme d'habitude, le $n^{\text{ième}}$ terme de la série, $a_n = n!x^n$. Si $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| \\ &= \lim_{n \to \infty} (n+1)|x| = \infty. \end{aligned}$$

La série diverge donc quand $x \neq 0$, selon le Test du quotient. La série donnée ne converge qu'en $x = 0$.

EXEMPLE 2 ■ Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ converge-t-elle ?

SOLUTION Soit $a_n = (x-3)^n/n$. Alors,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right| \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \to |x-3| \qquad \text{lorsque } n \to \infty. \end{aligned}$$

Selon le Test du quotient, la série proposée est absolument convergente, et de là convergente, quand $|x-3| < 1$ et divergente quand $|x-3| > 1$. Or,

$$|x-3| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff 2 < x < 4.$$

D'où, la série est convergente quand $2 < x < 4$ et divergente quand $x < 2$ ou $x > 4$.

Vu que le Test du quotient ne donne aucune information quand $|x-3| = 1$, il faut envisager séparément $x = 2$ et $x = 4$. Si on remplace x par 4 dans la série, elle devient $\sum 1/n$. C'est la série harmonique, divergente donc. Si on remplace x par 2 dans la série, elle devient $\sum (-1)^n/n$ qui, d'après le Test des séries alternées, est convergente. Finalement, la série proposée converge pour $2 \leqslant x < 4$.

Nous allons voir que le principal rôle d'une série entière est de représenter certaines des plus importantes fonctions qui interviennent en mathématiques, en physique et en chimie. En particulier, la somme de la série entière de l'exemple suivant est appelée la **fonction de Bessel**, du nom de l'astronome allemand Friedrich Bessel (1784-1846), et la fonction citée dans l'exercice 21 est un autre exemple d'une fonction de Bessel. En fait, ces fonctions ont fait leur apparition quand Bessel résolut l'équation de Kepler qui décrivait le mouvement des planètes. Depuis lors, ces fonctions ont été appliquées dans beaucoup de situations différentes qui relèvent de la physique, comme par exemple, la répartition de la température sur une plaque circulaire ou la forme d'une peau de tambour qui vibre.

EXEMPLE 3 ■ Déterminez le domaine de définition de la fonction de Bessel d'indice 0 définie par

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

SOLUTION Soit $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{quel que soit } x.$$

C'est ainsi que, suivant le Test du quotient, la série converge pour toutes les valeurs de x. En d'autres mots, le domaine de définition de la fonction de Bessel J_0 est $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$.

On se souvient que la somme d'une série est égale à la limite de la suite des sommes partielles. Aussi, quand on définit la fonction de Bessel dans l'exemple 3 comme la somme d'une série, on veut dire que, pour tout nombre réel x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{où} \qquad s_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}.$$

Les premières sommes partielles sont

$$s_0(x) = 1 \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_6(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} \qquad s_8(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147\,456}$$

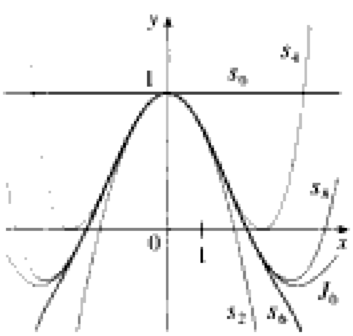


FIGURE 1
Les sommes partielles de la fonction de Bessel J_0

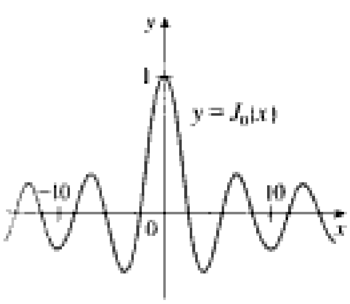


FIGURE 2

La figure 1 montre les courbes représentatives de ces sommes partielles, qui sont des polynômes. Elles sont toutes des approximations de la fonction J_0, mais plus le nombre de termes est grand, meilleure est l'approximation. La figure 2 montre une image plus complète de la fonction de Bessel.

Si on regarde les ensembles des valeurs de x pour lesquelles les séries envisagées jusqu'ici étaient convergentes, on s'aperçoit qu'ils ont tous la forme d'un intervalle [un intervalle borné pour la série géométrique et la série de l'exemple 2, un intervalle infini $]-\infty, \infty[$ dans l'exemple 3 et un intervalle dégénéré $[0, 0] = \{0\}$ dans l'exemple 1]. Le théorème suivant, qui ne sera pas démontré, établit qu'il en est toujours ainsi.

3 Théorème Il y a trois situations possibles pour ce qui est de l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles une série donnée $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge,

- La série ne converge qu'en $x = a$.
- La série converge pour tout x.
- Il existe un nombre R tel que la série converge pour $|x-a| < R$ et diverge pour $|x-a| > R$.

Le nombre R s'appelle, dans le cas 3 le **rayon de convergence** de la série entière. Par convention, on dit que $R = 0$ dans le premier cas et que $R = \infty$ dans le deuxième cas. L'**intervalle de convergence** d'une série entière est l'intervalle de toutes les valeurs de x pour lesquelles la série est convergente. Dans le premier cas, l'intervalle de convergence est réduit au seul point a. Dans le deuxième cas, l'intervalle est $]-\infty, \infty[$. Dans le troisième cas, notez que l'inégalité $|x - a| < R$ peut être récrite $a - R < x < a + R$. Quand x est l'une des extrémités, c'est-à-dire quand $x = a \pm R$, tout peut arriver– la série peut converger en une des extrémités ou en les deux, elle peut diverger en les deux extrémités. Ce qui fait que, dans le troisième cas, l'intervalle de convergence peut être de l'une des quatre formes suivantes :

$$]a - R, a + R[\qquad]a - R, a + R] \qquad [a - R, a + R[\qquad [a - R, a + R]$$

La figure 3 illustre la situation.

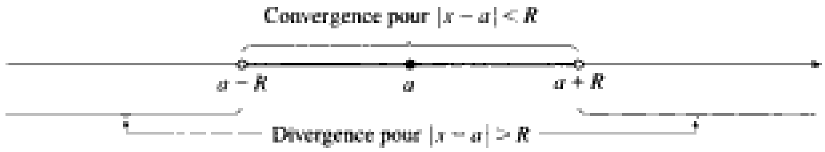


FIGURE 3

Voici ce qu'il en est du rayon de convergence et de l'intervalle de convergence dans chacun des exemples envisagés jusqu'à présent.

	Série	Rayon de convergence	Intervalle de convergence
Séries géométriques	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$]-1, 1[$
Exemple 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Exemple 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4[$
Exemple 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$]-\infty, \infty[$

Dans la plupart des cas, le rayon de convergence peut être déterminé par le Test du quotient. Mais le Test du quotient échoue toujours quand x est l'une des extrémités de l'intervalle de convergence, il faut donc prévoir un autre test pour savoir ce qui se passe aux extrémités.

EXEMPLE 4 ■ Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n + 1}}$$

SOLUTION Soit $a_n = (-3)^n x^n / \sqrt{n+1}$. Alors

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n + 2}} \cdot \frac{\sqrt{n + 1}}{(-3)^n x^n} \right|$$

$$= 3 \sqrt{\frac{1 + (1/n)}{1 + (2/n)}}\, |x| \to 3|x| \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

La série proposée, selon le Test du quotient, est convergente si $3|x| < 1$, et divergente si $3|x| > 1$. Elle converge donc pour $|x| < \frac{1}{3}$ et diverge pour $|x| > \frac{1}{3}$. Cela signifie que le rayon de convergence est $R = \frac{1}{3}$.

Maintenant que l'on sait la série convergente dans l'intervalle $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$, on regarde ce qui se passe aux extrémités de l'intervalle. Si $x = -\frac{1}{3}$, la série devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(-\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

qui est divergente. (Appliquez le Test de l'intégrale ou reconnaissez plus simplement une série de Riemann avec $p = 1/2 < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$, la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n(\frac{1}{3})^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

qui est convergente d'après le Test des séries alternées. Finalement, la série proposée converge pour $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$ et son intervalle de convergence est $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

EXEMPLE 5 ■ Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUTION Soit $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$. Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

D'après le Test du quotient, la série converge lorsque $|x+2|/3 < 1$ et diverge lorsque $|x+2|/3 > 1$. Elle converge donc, si $|x+2| < 3$ et elle diverge si $|x+2| > 3$. Le rayon de convergence est $R = 3$.

L'inégalité $|x+2| < 3$ est équivalente à $-5 < x < 1$, et il reste donc à tester ce qui se passe aux extrémités -5 et 1. Si $x = -5$, il s'agit de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

qui diverge par le Test de divergence [$(-1)^n$ ne tend pas vers 0]. Si $x = 1$, la série est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

qui, elle aussi, diverge pour la même raison. La série ne converge donc que quand $-5 < x < 1$ et l'intervalle de convergence est $]-5, 1[$.

8.5 Exercices

1. Qu'est-ce qu'une série entière ?

2. a) Qu'est-ce que le rayon de convergence d'une série entière ? Comment le trouvez-vous ?
   b) Qu'appelle-t-on intervalle de convergence d'une série entière ? Comment le trouvez-vous ?

3. Sachant que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ est convergente, la série suivante est-elle convergente ?

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

4. On sait que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge pour $x = -4$ et diverge pour $x = 6$. Que sait-on au sujet de la convergence ou de la divergence des séries suivantes ?

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

5-18 ■ Déterminez le rayon et l'intervalle de convergence de la série.

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ 6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n2^n}$ 10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{10^n}$

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}(2x-1)^n$ 12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ 14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n5^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x-3)^n}{n+3}$ 16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+1)}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

19. Déterminez le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

où k est un entier positif.

20. Affichez dans une même fenêtre la représentation graphique de quelques-unes des premières sommes partielles $s_n(x)$ de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ainsi que de la fonction $f(x) = 1/(1-x)$. Sur quel intevalle ces sommes partielles semblent-elles converger vers $f(x)$?

21. La fonction J_1 définie par

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

est appelée la *fonction de Bessel d'indice 1*.

   a) Déterminez son domaine de définition.
   b) Affichez les premières sommes partielles dans une même fenêtre.
   c) Si votre logiciel de calcul symbolique dispose des fonctions de Bessel intégrées, produisez le graphique de J_1 dans la même fenêtre que les sommes partielles de la partie b) et observez comment elles approximent J_1.

22. La fonction A définie par

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \frac{x^9}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \cdots$$

est appelée la *fonction de Airy* d'après le mathématicien et astronome anglais George Airy (1801-1892).

   a) Déterminez le domaine de définition de la fonction de Airy.
   b) Affichez les premières sommes partielles $s_n(x)$ dans une même fenêtre.
   c) Si votre logiciel de calcul symbolique dispose des fonctions de Airy intégrées, produisez le graphique de A dans la même fenêtre que les sommes partielles de la partie b) et observez comment elles approximent A.

23. Une fonction f est définie par

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots,$$

c'est-à-dire que ses coefficients sont $c_{2n} = 1$ et $c_{2n+1} = 2$ pour tout $n \geqslant 0$. Déterminez l'intervalle de convergence de la série et trouvez une formule explicite pour $f(x)$.

24. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, avec $c_{n+4} = c_n$ pour tout $n \geqslant 0$, déterminez l'intervalle de convergence de la série et trouvez une formule explicite pour $f(x)$.

25. On suppose que la série $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 2 et que la série $\sum d_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 3. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum (c_n + d_n)x^n$? Expliquez.

26. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum c_n x^{2n}$ si l'on sait que celui de la série $\sum c_n x^n$ est R ?

8.6 Le développement des fonctions en séries entières

Nous allons apprendre dans cette section comment transformer des séries géométriques ou les dériver ou les intégrer afin d'obtenir le développement de certains types de fonctions en séries entières. Vous vous demandez peut-être pourquoi se donner la peine d'écrire une fonction connue sous la forme d'une somme d'une infinité de termes. Nous verrons que cette stratégie s'avère payante pour intégrer certaines fonctions qui n'ont pas de primitives élémentaires, pour résoudre des équations différentielles ou pour approcher des fonctions par des polynômes. (Les scientifiques font cela pour simplifier les expressions qu'ils ont à traiter ; les informaticiens le font pour implémenter des fonctions sur les calculatrices et les ordinateurs.)

Nous partons d'une équation que nous avons déjà rencontrée précédemment :

1
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1.$$

C'est dans l'exemple 5 de la section 8.2 que nous avons rencontré cette équation pour la première fois en faisant remarquer qu'il s'agissait d'une série géométrique avec $a = 1$ et $r = x$. Mais ici, notre point de vue est différent. Nous regardons maintenant l'équation 1 comme une expression de la fonction $f(x) = 1/(1-x)$ comme somme d'une série entière.

La figure 1 montre une illustration géométrique de l'équation 1. Comme la somme d'une série est la limite de la suite des sommes partielles, on a

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

où

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

est la somme partielle d'ordre n. Remarquez que quand n augmente, $s_n(x)$ devient une meilleure approximation de $f(x)$ pour $-1 < x < 1$.

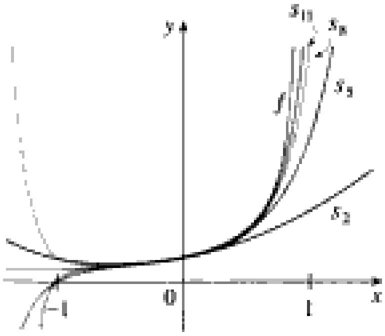


FIGURE 1
$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et quelques sommes partielles

EXEMPLE 1 ■ Exprimez $1/(1 + x^2)$ comme la somme d'une série entière et déterminez l'intervalle de convergence.

SOLUTION En remplaçant x par $-x^2$ dans l'équation 1, on arrive à

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

On reconnaît une série géométrique qui est convergente lorsque $|-x^2| < 1$, autrement dit, lorsque $x^2 < 1$, ou $|x| < 1$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $]-1, 1[$. (On aurait pu déterminer le rayon de convergence à partir du Test du quotient, mais ce travail n'est pas nécessaire ici.)

EXEMPLE 2 ■ Écrivez un développement en série entière de $1/(x+2)$.

SOLUTION Pour rapprocher cette formule de celle du membre de gauche de l'équation 1, on met 2 en évidence dans le dénominateur :

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n.$$

La série converge quand $|-x/2| < 1$, c'est-à-dire $|x| < 2$. L'intervalle de convergence est donc $]-2, 2[$.

EXEMPLE 3 ■ Écrivez un développement en série entière de $x^3/(x+2)$.

SOLUTION Comme cette fonction est celle de l'exemple 2 multipliée par x^3, la seule chose à faire est de multiplier la série correspondante par x^3 :

Il est légitime de glisser x^3 sous le signe de sommation parce qu'il ne dépend pas de n. (théorème 8 de la section 8.2 avec $c = x^3$).

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+3}$$
$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Cette série s'écrit aussi comme suit :

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x^n.$$

L'intervalle de convergence est $]-2, 2[$, comme dans l'exemple 2.

Dérivation et intégration des séries entières

La somme d'une série entière est une fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ dont le domaine de définition est l'intervalle de convergence de la série. Nous aimerions pouvoir dériver et intégrer de telles fonctions et le théorème suivant (qui ne sera pas démontré) certifie que nous pouvons le faire en dérivant ou en intégrant chaque terme séparément, exactement comme nous le ferions pour un polynôme. Cela s'appelle de la **dérivation et de l'intégration terme à terme.**

2 Théorème Si la série entière $\sum c_n(x-a)^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction f définie par

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

est dérivable (et par conséquent continue) sur l'intervalle $]a-R, a+R[$ et

a) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

b) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$
$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$$

Le rayon de convergence de ces deux séries est également R.

Dans la deuxième série, $\int c_0 dx = c_0 x + C$ est écrit $c_0(x-a) + C$, avec $C = C_1 + ac_0$, de manière à ce que tous les termes de la série aient la même forme.

REMARQUE 1 ● On peut aussi écrire les deux équations du théorème 2 sous la forme

c) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[c_n(x-a)^n]$$

d) $$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\,dx$$

Dans le cas où une somme est finie, on sait que sa dérivée est la somme des dérivées et son intégrale, la somme des intégrales. Les équations c) et d) ne font rien d'autre que d'affirmer qu'il en est de même pour des sommes infinies, à condition cependant que l'on ait affaire à des *séries entières*. (Pour d'autres types de séries, la situation n'est pas aussi simple ; voyez l'exercice 32.)

REMARQUE 2 • Si le théorème 2 affirme que le rayon de convergence reste le même quand une série entière est dérivée ou intégrée, il n'en affirme pas pour autant que l'intervalle de convergence subsiste. Il peut arriver que la série originale converge en une extrémité en laquelle la série dérivée ne converge plus (voyez l'exercice 33).

REMARQUE 3 • L'idée de dériver une série entière terme à terme est à la base d'une puissante méthode de résolution d'équations différentielles. Nous la présenterons dans la section 8.10.

EXEMPLE 4 ■ La fonction de Bessel définie pour tout x par

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

était l'objet de l'exemple 3 dans la section 8.5. Grâce au théorème 2, J_0 est dérivable pour tout x et le calcul de sa dérivée terme à terme se déroule comme suit :

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

EXEMPLE 5 ■ Calculez le développement en série entière de $1/(1-x)^2$ par dérivation de l'équation 1. Quel est le rayon de convergence ?

SOLUTION On dérive chaque terme de l'équation

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

et on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Si on veut, on peut remplacer n par $n+1$ et écrire la réponse autrement

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

Conformément au théorème 2, le rayon de convergence de la série dérivée est le même que celui de la série originale, à savoir $R = 1$.

EXEMPLE 6 ■ Développez en série entière la fonction $\ln(1-x)$ et déterminez le rayon de convergence.

SOLUTION Au signe près, la dérivée de cette fonction est $1/(1-x)$. Aussi, on intègre les deux membres de l'équation 1 :

$$-\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1.$$

Pour déterminer la valeur de C, on pose $x = 0$ dans l'équation et on obtient $-\ln(1-0) = C$. D'où, $C = 0$ et

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1.$$

Le rayon de convergence est le même que celui de la série originale : $R = 1$.

Il est intéressant de regarder ce que l'on obtient en remplaçant x par $1/2$ dans le résultat de l'exemple 6. Comme $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, il vient

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

EXEMPLE 7 ■ Écrivez une représentation en série entière de $f(x) = \text{Arctg}\, x$.

SOLUTION Ayant observé que $f'(x) = 1/(1+x^2)$, on trouve la série demandée en intégrant la série entière de $1/(1+x^2)$, découverte dans l'exemple 1.

$$\text{Arctg}\, x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Pour déterminer C, on pose $x = 0$, ce qui donne $C = \text{Arctg}\, 0 = 0$. De là

$$\text{Arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le rayon de convergence de cette série de Arctg x est 1, le même que celui de la série de $1/(1+x^2)$.

La série entière de Arctg x obtenue dans l'exemple 7 porte le nom de série de Gregory, du nom du mathématicien écossais James Gregory (1638-1675), qui avait anticipé certaines découvertes de Newton. On a démontré que la série de Gregory est convergente pour $-1 < x < 1$, mais il se fait (même si ce n'est pas facile à démontrer) qu'elle converge aussi quand $x = \pm 1$. Quand $x = 1$ en particulier, la série devient

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Ce magnifique résultat est connu sous le nom de formule de Leibniz de π.

EXEMPLE 8 ■

a) Écrivez $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^7}\,dx$ comme une série entière.

b) Utilisez la partie a) pour calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^7}\,dx$, correcte à moins de 10^{-7} près.

SOLUTION

a) La première étape est de réussir à écrire l'intégrande, $1/(1+x^7)$, comme la somme d'une série entière. Comme dans l'exemple 1, on part de l'équation 1 et on y subtitue $-x^7$ à x :

$$\frac{1}{1+x^7} = \frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Reste maintenant à intégrer terme à terme :

$$\int \frac{1}{1+x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Cette série converge pour $|-x^7| < 1$, c'est-à-dire pour $|x| < 1$.

Cet exemple met en évidence une des situations dans lesquelles les représentations en série entière sont utiles. Intégrer $1/(1+x^7)$ à la main est extrêmement difficile. Selon le logiciel de calcul symbolique mobilisé, les réponses varient, mais elles sont toutes compliquées. (Si vous disposez d'un logiciel de calcul symbolique, essayez-le sur cette question.) La réponse sous forme de série entière obtenue dans l'exemple 8 a) est réellement beaucoup plus facile à manipuler que la réponse finie fournie par un logiciel de calcul symbolique.

b) Comme la primitive pour le calcul de l'intégrale définie importe peu, on emploie la partie a) avec $C = 0$:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 2^8} + \frac{1}{15\cdot 2^{15}} - \frac{1}{22\cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Cette série infinie donne la valeur exacte de l'intégrale définie, mais puisqu'il s'agit d'une série alternée, on peut calculer la somme à l'aide du Théorème sur l'estimation d'une série alternée. En ne retenant que 3 termes, l'erreur est inférieure au terme d'indice 4 :

$$\frac{1}{29\cdot 2^{29}} \approx 6{,}4\times 10^{-11}.$$

Finalement,

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 2^8} + \frac{1}{15\cdot 2^{15}} - \frac{1}{22\cdot 2^{22}} \approx 0{,}49951374.$$

8.6 Exercices

1. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ sachant que celui de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est 10. Pourquoi ?
2. On suppose que la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge pour $|x| < 2$. Que pouvez-vous dire à propos de la série suivante ? Pourquoi ?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}.$$

3-8 ■ Développez la fonction en série entière et déterminez l'intervalle de convergence.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^4+16}$
7. $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$
8. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

9-14 ■ Développez la fonction en série entière et déterminez l'intervalle de convergence.

9. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$
10. $f(x) = \ln(1+x)$
11. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$
12. $f(x) = x\ln(1+x)$
13. $f(x) = \ln(5-x)$
14. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

15-18 ■ Développez la fonction f en série entière, tracez le graphique de f et de quelques sommes partielles $s_n(x)$ dans la même fenêtre. Que se passe-t-il lorsque n augmente ?

15. $f(x) = \ln(3+x)$
16. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+25}$
17. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
18. $f(x) = \operatorname{Arctg}(2x)$

19-22 ■ Écrivez la primitive sous la forme d'une série entière.

19. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$
20. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^5}\,dx$
21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$
22. $\displaystyle\int \operatorname{Arctg}(x^2)\,dx$

23-26 ■ Au moyen d'une série entière, calculez une valeur approchée, correcte jusqu'à la sixième décimale, de l'intégrale définie.

23. $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1}{1+x^4}\,dx$
24. $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{Arctg}(x^2)\,dx$
25. $\displaystyle\int_0^{1/3} x^2\operatorname{Arctg}(x^4)\,dx$
26. $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^6}$

27. Calculez la valeur de ln 1, avec 5 décimales correctes à l'aide du résultat de l'exemple 6.

28. Montrez que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

29. a) Montrez que J_0 (la fonction de Bessel d'indice 0 définie dans l'exemple 4) vérifie l'équation différentielle

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0.$$

b) Calculez $\int_0^1 J_0(x)dx$ avec trois décimales correctes.

30. La fonction de Bessel d'indice 1 est définie par

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

a) Démontrez que J_1 vérifie l'équation différentielle

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0.$$

b) Montrez que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

31. a) Montrez que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$f'(x) = f(x).$$

b) Montrez que $f(x) = e^x$.

32. Soit $f_n(x) = (\sin nx)/n^2$. Montrez que la série $\sum f_n(x)$ converge pour toute valeur de x mais que la série des dérivées $\sum f_n'(x)$ diverge quand $x = 2n\pi$, n entier. Pour quelle valeur de x la série $\sum f_n''(x)$ converge-t-elle ?

33. Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Déterminez les intervalles de convergence de f, f' et f''.

34. a) À partir de la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, déterminez la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1.$$

b) Calculez la somme de chaque série.

■ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1$ ■ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

c) Calculez la somme de chaque série.

■ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

■ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$

■ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

8.7 Les séries de Taylor et Mac Laurin

Dans la section précédente, nous avons réussi à écrire le développement en série entière de quelques fonctions. Le point de vue adopté dans cette section est beaucoup plus général. Nous posons les questions : quelles fonctions admettent un développement en série entière ? Comment obtenir de tels développements ?

Au départ, nous faisons l'hypothèse que f est une fonction quelconque qui peut être écrite sous la forme d'une série entière

1 $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Essayons de déterminer comment doivent être les coefficients c_n en termes de f. Avant tout, remarquons qu'en posant $x = a$ dans l'équation 1, tous les termes après le premier sont nuls et il ne reste que

$$f(a) = c_0.$$

Nous pouvons dériver la série de l'équation 1 terme à terme, comme le permet le théorème 2 de la section 8.6 :

2 $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

et y substituer a à x. Cela donne :

$$f'(a) = c_1$$

Maintenant, nous dérivons les deux membres de l'équation 2 et obtenons

3 $$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R.$$

En faisant $x = a$ à nouveau dans l'équation 3, il vient

$$f''(a) = 2c_2.$$

Recommençons encore une fois. Dérivons la série de l'équation 3

4 $$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R.$$

et remplaçons-y x par a :

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3.$$

La régularité est devenue évidente : si nous continuons à dériver et à faire la substitution $x = a$, nous obtenons

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n.$$

La solution de cette équation par rapport au $n^{\text{ième}}$ coefficient c_n fournit

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Cette formule est valable même pour $n = 0$ avec les conventions $0! = 1$ et $f^{(0)} = f$. Voici le théorème qui vient d'être démontré.

5 Théorème Si f admet une représentation en série entière en a, c'est-à-dire si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad |x - a| < R,$$

alors ses coefficients sont donnés par la formule

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

En replaçant cette formule dans la série, nous voyons que si f admet un développement en série entière en a, alors il est de la forme :

6 $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

La série de Taylor porte le nom du mathématicien anglais Brook Taylor (1685-1731) et la série de Mac Laurin celui du mathématicien écossais Colin Mac Laurin (1698-1746), en dépit du fait que la série de Mac Laurin n'est qu'un cas particulier de la série de Taylor. De plus, l'idée de représenter certaines fonctions comme des sommes de séries entières revient à Newton, et la série générale de Taylor était connue du mathématicien écossais James Gregory en 1668 et du mathématicien suisse John Bernoulli en 1690. Il semble que Taylor ne connaissait pas les œuvres de Gregory et de Bernoulli quand il publia sur ce sujet en 1715 dans son livre intitulé *Methodus incrementorum directa et inversa*. Les séries de Mac Laurin porte ce nom parce que c'est Colin Mac Laurin qui les rendit populaires dans son traité d'analyse *Treatise of Fluxions* publié en 1742.

La formule de l'équation 6 s'appelle la **série de Taylor de la fonction** f **en** a (ou **autour de** a ou **centrée en** a)

Dans le cas particulier où $a = 0$, la série de Taylor s'écrit

$$\boxed{7} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots.$$

Ce cas se présente tellement souvent qu'il a reçu le nom spécial de **série de Mac Laurin**.

REMARQUE ● Nous avons montré que *si* f peut être représentée par une série entière autour de a, alors f est égale à la somme de sa série de Taylor. Mais il existe des fonctions qui ne sont pas égales à leur série de Taylor, l'exercice 50 en donne un exemple.

EXEMPLE 1 ■ Déterminez la série de Mac Laurin de la fonction $f(x) = e^x$ et son rayon de convergence.

SOLUTION Pour $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$ et de là, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ quel que soit n. Il en résulte que la série de Taylor de f en 0 (à savoir la série de Mac Laurin) est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

On cherche le rayon de convergence par le Test du quotient. Pour cela, soit $a_n = x^n/n!$. Alors,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1.$$

La série est donc convergente quel que soit x et le rayon de convergence est $R = \infty$.

La conclusion que nous pouvons tirer de l'exemple 5 et de l'exemple 1 est que *si* e^x admet un développement en série entière en 0, alors il s'agit de

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La question qui reste est : comment savoir si e^x admet un développement en série entière ?

Posons-nous la question plus générale : qu'est-ce qui fait qu'une fonction $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Taylor ? En d'autres mots, si f a des dérivées de tous ordres, quand est-il vrai que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n?$$

Comme pour n'importe quelle série convergente, cela signifie que $f(x)$ est la limite de la suite des sommes partielles. Dans le cas de la série de Taylor, les sommes partielles sont

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

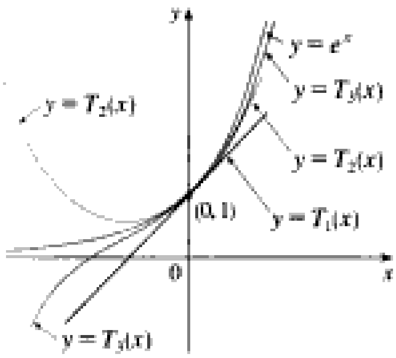


FIGURE 1

À en juger par la figure 1, lorsque n augmente, $T_n(x)$ semble s'approcher de e^x. Cela laisse présager que e^x est égale à la somme de sa série de Taylor.

Remarquez que T_n est un polynôme de degré n appelé le **polynôme de Taylor de degré n de f en a**. Par exemple, dans le cas de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, le résultat de l'exemple 1 montre que les polynômes de Taylor en 0 (ou polynômes de Mac Laurin) de degré 1, 2 et 3 sont

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

La figure 1 présente les courbes représentatives de la fonction exponentielle en même temps que celles des trois polynômes de Taylor.

En général, $f(x)$ est la somme de sa série de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x).$$

Soit $R_n(x)$ le reste de la série, c'est-à-dire

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

De là,

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

S'il est possible d'une manière ou d'une autre de démontrer que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, alors il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x).$$

Voici le théorème qui vient d'être prouvé.

8 Théorème Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, où T_n est le polynôme de Taylor de degré n de f en a et si

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

pour $|x - a| < R$, alors f est égale à la somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $|x - a| < R$.

Le résultat suivant est souvent utilisé pour démontrer que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ pour une fonction particulière f.

9 Inégalité de Taylor Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ pour $|x - a| < R$, alors le reste $R_n(x)$ de la série de Taylor satisfait à l'inégalité

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{pour } |x - a| < R.$$

Afin de voir pourquoi ce résultat est vrai dans le cas $n = 1$, on suppose $|f''(x)| \leqslant M$. En particulier, l'inégalité $f''(x) \leqslant M$ conduit à

$$\int_a^x f''(t)dt \leqslant \int_a^x M dt.$$

Comme une primitive de f'' est f', le calcul des intégrales définies fournit

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x-a) \qquad \text{ou} \qquad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x-a).$$

De là,

$$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Mais $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Donc

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2.$$

La même démarche menée à partir de $f''(x) \geqslant -M$ conduit à

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x-a)^2.$$

Finalement,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x-a|^2.$$

Ceci démontre l'inégalité de Taylor dans le cas $n = 1$. Le résultat pour n quelconque est acquis de la même manière en intégrant $n + 1$ fois.

REMARQUE • L'inégalité de Taylor sera exploitée au profit de l'approximation des fonctions dans la section 8.9. Dans l'immédiat, c'est en conjonction avec le théorème 8 que nous en avons besoin.

Voici un résultat qui vient souvent à point lorsqu'on applique les théorèmes 8 et 9.

10 $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{pour tout nombre réel } x}$$

En effet, que le $n^{\text{ième}}$ terme de la série $\sum x^n/n!$ tende vers 0 lorsque $n \to \infty$ n'est autre que la condition nécessaire de convergence de cette série, convergence qui a été reconnue dans l'exemple 1.

EXEMPLE 2 ■ Démontrez que e^x est égal à la somme de sa série de Taylor.

SOLUTION Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n+1)}(x) = e^x$ pour tout n. Aussi, quel que soit x fixé, on peut prendre $M = e^x$ dans l'inégalité de Taylor (avec $a = 0$) indépendemment de la valeur de n :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Or, en conséquence de l'équation 10,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^x \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Le théorème du sandwich implique maintenant que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ et de là, que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Sur la base du théorème 8, e^x est donc bien égale à la somme de sa série de Taylor, c'est-à-dire

11
$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{pour tout nombre réel } x}$$

Dans le cas particulier où $x = 1$, l'équation 11 donne l'expression suivante du nombre e comme somme d'une série infinie :

12
$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

EXEMPLE 3 ■ Écrivez la série de Taylor pour $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUTION On a $f^{(n)}(2) = e^2$ et donc, en posant $a = 2$ dans la définition (6) d'une série de Taylor, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n.$$

On peut à nouveau vérifier, comme dans l'exemple 1, que le rayon de convergence est $R = \infty$ et comme dans l'exemple 2, que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ de sorte que

13
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{pour tout nombre réel } x.$$

Désormais, nous disposons de deux séries entières de e^x, la série de Mac Laurin de l'équation 11 et la série de Taylor de l'équation 13. La première est meilleure si ce sont les valeurs de x proches de 0 qui nous intéressent, la deuxième est meilleure si x est proche de 2.

EXEMPLE 4 ■ Écrivez la série de Mac Laurin de $\sin x$ et démontrez qu'elle représente bien $\sin x$ pour tout x.

SOLUTION On dispose les calculs en deux colonnes comme ceci :

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(4)}(0) = 0
\end{array}$$

Comme les dérivées se répètent selon un cycle de quatre, on peut écrire la série de Mac Laurin comme suit :

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Comme $f^{(n+1)}(x)$ est $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$, il est clair que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ pour tout x. On peut donc prendre $M = 1$ dans l'inégalité de Taylor :

14 $$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Grâce à l'équation 10, le membre de droite de cette inégalité tend vers 0 quand $n \to \infty$. D'où, par le théorème du sandwich, $|R_n(x)| \to 0$ et aussi $R_n(x)$. Par conséquent, $\sin x$ est égale à la somme de sa série de Mac Laurin en vertu du théorème 8.

La figure 2 montre le graphique de $\sin x$ et celui de ses polynômes de Taylor (ou Mac Laurin)

$$T_1(x) = x$$
$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$
$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Remarquez combien plus n augmente, meilleure devient $T_n(x)$ comme approximation de $\sin x$.

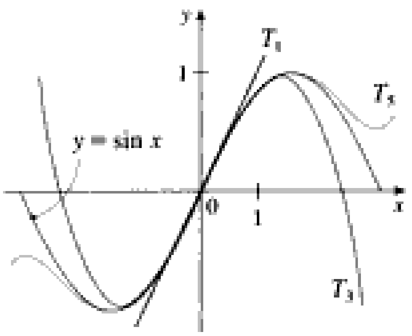


FIGURE 2

Voici, en vue de références ultérieures, le résultat de l'exemple 4 :

15 $$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{pour tout } x}$$

EXEMPLE 5 ■ Déterminez la série de Mac Laurin de $\cos x$.

SOLUTION Nous pourrions procéder comme dans l'exemple 4, mais il est plus facile de dériver la série de Mac Laurin de $\sin x$ donnée par l'équation 15.

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$
$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Le théorème 2 de la section 8.6 certifie que la série entière de $\cos x$ converge pour tout x comme la série entière de $\sin x$ dont elle provient par dérivation. Donc

Les séries de Mac Laurin de e^x, $\sin x$ et $\cos x$ que nous avons trouvées dans les exemples 2, 4 et 5 ont été découvertes, par différentes méthodes, par Newton. Ces équations sont remarquables parce qu'elles disent que nous savons tout sur chacune de ces fonctions dès que nous connaissons leurs dérivées au seul point 0.

16 $$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pour tout } x}$$

EXEMPLE 6 ■ Déterminez la série de Mac Laurin de $f(x) = x\cos x$.

SOLUTION Plutôt que de calculer les dérivées et puis substituer dans l'équation 7, il est plus facile de multiplier la série de $\cos x$ (équation 16) par x :

$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

EXEMPLE 7 ■ Représentez $f(x) = \sin x$ comme la somme de sa série de Taylor centrée en $\pi/3$.

SOLUTION On dispose les calculs en colonnes

$$f(x) = \sin x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Nous avons obtenu deux développements en série différents pour $\sin x$, la série de Mac Laurin dans l'exemple 4 et la série de Taylor dans l'exemple 7. Il est préférable d'employer la série de Mac Laurin pour des valeurs de x proches de 0 et la série de Taylor pour des valeurs de x proches de $\pi/3$. La figure 3 montre que T_3 le polynôme de Taylor de degré 3 est une bonne approximation de $\sin x$ près de $\pi/3$, mais pas aussi bonne près de 0. Comparez avec le troisième polynôme de Mac Laurin dans la figure 2 où c'est l'inverse.

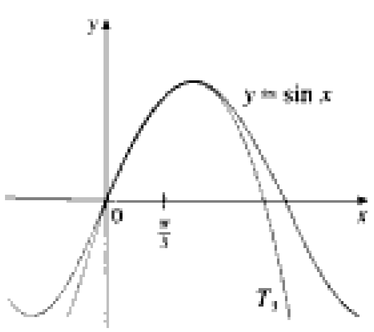


FIGURE 3

et ce schéma se reproduit indéfiniment. Par conséquent, la série de Taylor en $\pi/3$ est

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\cdot 1!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

La preuve que cette série représente $\sin x$ pour tout x est très semblable à celle de l'exemple 4. [Il faut juste remplacer x par $x - \pi/3$ dans (14).] La série peut aussi s'écrire avec la notation $\sum$ à condition de regrouper les termes qui contiennent $\sqrt{3}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$

Les séries entières obtenues par des méthodes indirectes dans les exemples 5 et 6 et dans la section 8.6 sont effectivement les séries de Taylor et Mac Laurin des fonctions données parce que le théorème 5 assure que, quelle que soit la manière dont une représentation en série entière $f(x) = \sum c_n(x-a)^n$ est obtenue, ses coefficients sont liés à la fonction par la formule $c_n = f^{(n)}(a)/n!$. Autrement dit, les coefficients sont déterminés de façon unique.

Nous rassemblons dans une table, pour y faire référence ultérieurement, quelques séries importantes de Mac Laurin que nous avons établies dans cette section et dans la précédente.

Les séries de Mac Laurin importantes et leur intervalle de convergence.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad]-1, 1[$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad]-\infty, \infty[$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad]-\infty, \infty[$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad]-\infty, \infty[$$

$$\operatorname{Arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad [-1, 1]$$

Une des raisons qui rendent les séries de Taylor aussi importantes est qu'elles permettent de calculer l'intégrale de fonctions qu'il n'était pas possible de traiter précédemment. Dans l'introduction de ce chapitre, nous avons en effet mentionné que Newton intégrait souvent des fonctions après les avoir écrites sous la forme d'une série entière et intégrées terme à terme. La fonction $f(x) = e^{-x^2}$ ne peut pas être intégrée par les techniques étudiées jusqu'ici parce qu'elle n'a pas de primitive simple (voyez la section 5.7). Nous allons l'intégrer dans l'exemple suivant en adoptant l'idée de Newton.

EXEMPLE 8 ■

a) Écrivez un développement en série entière de $\int e^{-x^2}\,dx$.

b) Calculez $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à moins de 0,001 près.

SOLUTION

a) La première étape consiste à écrire la série de Mac Laurin de $f(x) = e^{-x^2}$. Bien que le calcul direct des coefficients soit possible, remplaçons tout simplement x par $-x^2$ dans la série de e^x donnée dans la table des séries de Mac Laurin. D'où, quel que soit x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Nous intégrons maintenant terme à terme :

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Cette série converge pour tout x car la série originale de e^{-x^2} converge pour tout x.

b) Reste à calculer l'intégrale définie :

On peut prendre $C = 0$ dans la primitive.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0{,}7475.$$

Le Théorème sur l'estimation d'une série alternée montre que l'erreur qui affecte cette valeur approchée ne dépasse pas

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0{,}001.$$

L'exemple que voici illustre une autre exploitation des séries de Taylor. La limite, qui pourrait être calculée par la Règle de l'Hospital, est obtenue ici en utilisant une série.

EXEMPLE 9 ■ Calculez $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUTION On introduit la série de Mac Laurin de e^x dans l'expression :

Certains logiciels de calcul symbolique calculent les limites de cette façon.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et ce résultat est acquis parce que les séries entières sont des fonctions continues.

■ Multiplication et division de séries entières

Les séries entières peuvent être additionnées ou soustraites, comme des polynômes (le théorème 8 dans la section 8.2 le démontre). Elles peuvent même être multipliées et divisées tout comme des polynômes, ainsi que le montrent les exemples suivants. Seuls les premiers termes sont calculés car les calculs deviennent très vite fastidieux et ce sont eux les plus importants.

EXEMPLE 10 ■ Écrivez les trois premiers termes non nuls de la série de Mac Laurin de a) $e^x \sin x$ et b) $\operatorname{tg} x$.

SOLUTION

a) On remplace e^x et $\sin x$ par leur série de Mac Laurin prise dans la table :

$$e^x \sin x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

On multiplie ces expressions, en regroupant les termes de même degré, exactement comme pour les polynômes :

$$\begin{array}{r}
1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
x \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\hline
x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\
- \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\
\hline
x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{array}$$

Finalement

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

b) À nouveau, on prend les séries de Mac Laurin présentes dans la table :

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

et on effectue la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots \\ \cline{2-2}
x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \cdots & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \cline{1-1}
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots & \\
\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots & \\ \cline{1-1}
\frac{2}{15}x^5 + \cdots &
\end{array}$$

D'où $$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

Bien que nous n'ayons pas essayé de justifier les manipulations algébriques effectuées dans l'exemple 10, elles sont légitimes. Il existe un théorème qui établit que si deux séries $f(x) = \sum c_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$ convergent pour $|x| < R$ et si les séries sont multipliées à la manière des polynômes, alors la série qui en résulte converge aussi pour $|x| < R$ et représente $f(x)g(x)$. En ce qui concerne la division, il faut $b_0 \neq 0$; la série converge pour des valeurs de $|x|$ suffisamment petites.

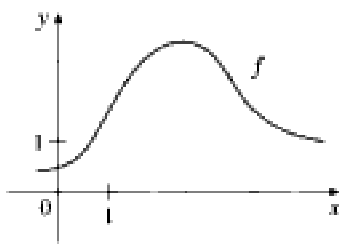
8.7 Exercices

1. Étant donné $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ pour tout x, écrivez une formule pour b_8.

2. Voici le graphique de f. Expliquez pourquoi la série

$$2 - 0{,}8(x-1) + 0{,}4(x-1)^2 - 0{,}1(x-1)^3 + \cdots$$

n'est *pas* la série de Taylor de f centrée en 1.



3-6 ■ Construisez la série de Mac Laurin de $f(x)$ en utilisant la définition d'une série de Mac Laurin. [Supposez que f admet un développement en série entière. Ne démontrez pas que $R_n(x) \to 0$.] Déterminez aussi le rayon de convergence.

3. $f(x) = \cos x$ **4.** $f(x) = \sin 2x$

5. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$

7-12 ■ Construisez la série de Taylor de $f(x)$ en la valeur donnée de a. [Supposez que f admet un développement en série entière. Ne démontrez pas que $R_n(x) \to 0$.]

7. $f(x) = e^x$, $a = 3$ **8.** $f(x) = \ln x$, $a = 2$

9. $f(x) = 1/x$, $a = 1$ **10.** $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$

11. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/4$ **12.** $f(x) = \cos x$, $a = -\pi/4$

13. Démontrez que la série obtenue à l'exercice 3 représente $\cos x$ pour tout x.

14. Démontrez que la série obtenue à l'exercice 11 représente $\sin x$ pour tout x.

15-22 ■ Utilisez les séries de Mac Laurin rencontrées dans cette section pour écrire celle de la fonction donnée.

15. $f(x) = e^{3x}$ **16.** $f(x) = \sin 2x$

17. $f(x) = x^2 \cos x$ **18.** $f(x) = \cos(x^3)$

19. $f(x) = x \sin(x/2)$ **20.** $f(x) = xe^{-x}$

21. $f(x) = \sin^2 x$ [*Suggestion*: Utilisez $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

23-26 ■ Déterminez le développement en série de Mac Laurin de f (par la méthode de votre choix) et son rayon de convergence. Faites apparaître dans une même fenêtre le graphique de f et des premiers polynômes de Taylor.

23. $f(x) = \sqrt{1 + x}$ **24.** $f(x) = 1/\sqrt{1 + 2x}$

25. $f(x) = (1 + x)^{-3}$ **26.** $f(x) = 2^x$

27. Quelle est la série de Mac Laurin de $\ln(1 + x)$? Servez-vous en pour calculer une valeur approchée de $\ln 1{,}1$ avec 5 décimales exactes.

28. Utilisez la série de Mac Laurin de $\sin x$ pour calculer $\sin 3°$ avec 5 décimales exactes.

29-32 ■ Donnez l'expression sous forme de série entière de l'intégrale indéfinie.

29. $\int \sin(x^2)\, dx$ **30.** $\int \dfrac{\sin x}{x}\, dx$

31. $\int \sqrt{x^3 + 1}\, dx$ **32.** $\int e^{x^3} dx$

33-36 ■ Utilisez une série pour approximer l'intégrale définie avec la précision indiquée.

33. $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ (trois décimales exactes)

34. $\int_0^{0,5} \cos(x^2)dx$ (trois décimales exactes)

35. $\int_0^{0,1} \dfrac{dx}{\sqrt{1 + x^3}}$ (erreur $< 10^{-8}$)

36. $\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx$ (erreur $< 0{,}001$)

37-39 ■ Calculez la limite en utilisant des séries.

37. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{Arctg} x}{x^3}$ **38.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

40. Utilisez la série de l'exemple 10 b) pour calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

Nous avons calculé cette limite dans l'exemple 4 de la section 4.5 en appliquant trois fois la Règle de l'Hospital. Quelle méthode préférez-vous ?

41-44 ■ Écrivez les trois premiers termes non nuls de la série de Mac Laurin de chaque fonction par multiplication ou division de séries entières.

41. $y = e^{-x^2} \cos x$ **42.** $y = \sec x$

43. $y = \dfrac{\ln(1 - x)}{e^x}$ **44.** $y = e^x \ln(1 - x)$

45-49 ■ Calculez la somme de la série.

45. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{n!}$ **46.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

47. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$ **48.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{3n+1}}{n!}$

49. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

50 a) Démontrez que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas égale à sa série de Mac Laurin.

b) Faites dessiner le graphique de la fonction de la partie a) et commentez son comportement près de l'origine.

8.8 La série du binôme

Vous connaissez probablement la formule du binôme qui donne le développement de $(a + b)^k$ où a et b sont des nombres réels quelconques et k un entier positif.

$$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}a^{k-3}b^3 + \cdots + \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^n + \cdots + kab^{k-1} + b^k$$

La notation habituelle pour les coefficients binomiaux est

$$\binom{k}{0} = 1 \qquad \binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!} \qquad n = 1, 2, \ldots, k$$

et cette notation permet d'écrire la longue formule précédente sous une forme abrégée

$$(a+b)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a^{k-n} b^n$$

En particulier, si on pose $a = 1$ et $b = x$, on a

1 $$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n.$$

Le talent de Newton fut d'étendre la formule du binôme (équation 1) au cas où k n'est plus un entier positif. (Voyez le travail de rédaction à la page 623.) Dans ce cas, la formule de $(1+x)^k$ n'est plus une somme finie, mais elle devient une série infinie. Pour trouver cette série, on calcule la série de Mac Laurin de $(1+x)^k$ de façon habituelle :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^k & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= k(1+x)^{k-1} & f'(0) &= k \\
f''(x) &= k(k-1)(1+x)^{k-2} & f''(0) &= k(k-1) \\
f'''(x) &= k(k-1)(k-2)(1+x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k-1)(k-2) \\
&\vdots & &\vdots \\
f^{(n)}(x) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)(1+x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k-1)\cdots(k-n+1)
\end{aligned}$$

Par conséquent, la série de Mac Laurin de $f(x) = (1+x)^k$ est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} x^n$$

Cette série porte le nom de **série du binôme**. Si on note a_n son $n^{\text{ième}}$ terme, alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right| \\
&= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1 - \dfrac{k}{n}\right|}{1 + \dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \qquad \text{lorsque } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Conformément au Test du quotient, la série du binôme converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$.

Le théorème suivant énonce que $(1+x)^k$ est égal à la somme de sa série de Mac Laurin. La démonstration consisterait à prouver que le reste $R_n(x)$ tend vers 0, mais il se fait que ce n'est vraiment pas facile. Par contre, la démonstration dont les grandes lignes sont esquissées dans l'exercice 15, est beaucoup plus facile.

2 La série du binôme Si k est un nombre réel quelconque et si $|x| < 1$, alors

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$$

où $\displaystyle\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} \quad (n \geqslant 1) \qquad \text{et} \qquad \binom{k}{0} = 1$

Bien que la série du binôme converge toujours lorsque $|x| < 1$, la question de savoir si elle converge aux extrémités ± 1 dépend de la valeur de k. Il s'avère que la série converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ et aux deux extrémités si $k \geqslant 0$. Remarquez que dans le cas particulier où k est un entier positif et $n > k$, alors le coefficient $\binom{k}{n}$ contient un facteur $(k - k)$, qui l'annule bien sûr. Cela fait que, dans ce cas, la série se termine et devient la formule du binôme ordinaire (équation 1).

Comme nous l'avons vu, la série du binôme n'est qu'un cas particulier de série de Mac Laurin ; mais elle intervient tellement souvent qu'il vaut la peine de la retenir par cœur.

EXEMPLE 1 ■ Développez $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ en série entière.

SOLUTION On emploie la série du binôme dans le cas $k = -2$. Le coefficient binomial est

$$\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)(-4)\cdots(-2-n+1)}{n!}$$
$$= \frac{(-1)^n 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n(n+1)}{n!} = (-1)^n(n+1)$$

et donc, pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n.$$

EXEMPLE 2 ■ Déterminez la série de Mac Laurin de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ et son rayon de convergence.

SOLUTION Telle qu'elle a été donnée, $f(x)$ n'est pas de la forme $(1+x)^k$ et donc nous la réécrivons comme ceci :

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{x}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}.$$

Nous employons maintenant la série du binôme avec $k = -\frac{1}{2}$ et x remplacé par $-x/4$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{4-x}} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right. \\
&\qquad \left.+\cdots+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n+\cdots\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{8}x+\frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n+\cdots\right]
\end{aligned}$$

D'après (2), cette série converge pour $|-x/4| < 1$, c'est-à-dire pour $|x| < 4$. Le rayon de convergence est $R = 4$.

La série du binôme est un cas particulier de série de Taylor. La figure 1 montre les graphiques des trois premiers polynômes de Taylor extraits de la réponse de l'exemple 2.

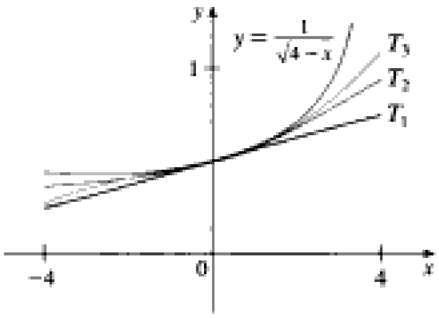


FIGURE 1

8.8 Exercices

1-6 ■ Utilisez la série du binôme pour développer la fonction en série entière. Précisez le rayon de convergence.

1. $\sqrt{1+x}$

2. $\dfrac{1}{(1+x)^3}$

3. $\dfrac{1}{(1+2x)^4}$

4. $\sqrt[3]{1+x^2}$

5. $\sqrt[4]{1-x^4}$

6. $\dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

7-8 ■ Utilisez la série du binôme pour développer la fonction en série de Mac Laurin et écrivez les trois premiers polynômes de Taylor T_1, T_2 et T_3. Dessinez la fonction et ses polynômes de Taylor dans l'intervalle de convergence.

7. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8+x}}$

8. $(4+x)^{3/2}$

9. a) Utilisez la série du binôme pour développer en série entière la fonction $1/\sqrt{1-x^2}$.

b) Utilisez la partie a) pour déterminer la série de Mac Laurin de Arctg x.

10. a) Utilisez la série du binôme pour développer en série entière la fonction $\sqrt[3]{8+x}$.

b) Utilisez la partie a) pour estimer $\sqrt[3]{8{,}2}$ avec 4 décimales exactes.

11. a) Développez en série entière $f(x) = x/(1-x)^2$.

b) Utilisez la partie a) pour calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

12. a) Développez en série entière $f(x) = (x+x^2)/(1-x)^3$.

b) Utilisez la partie a) pour calculer la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}.$$

13. a) Utilisez la série du binôme pour développer en série de Mac Laurin la fonction $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

b) Utilisez la partie a) pour calculer $f^{(10)}(0)$.

14. a) Utilisez la série du binôme pour développer en série de Mac Laurin la fonction $f(x) = 1/\sqrt{1+x^3}$.

b) Utilisez la partie a) pour calculer $f^{(9)}(0)$.

15. Démontrez (2) en suivant les étapes indiquées.

a) Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Dérivez cette série pour montrer que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x} \qquad -1 < x < 1.$$

b) Soit $h(x) = (1+x)^{-k} g(x)$. Démontrez que $h'(x) = 0$.

c) Concluez que $g(x) = (1+x)^k$.

14. La période d'un pendule de longueur L qui fait un angle maximum θ_0 avec la verticale est

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

où $k = \sin(\frac{1}{2}\theta_0)$ et où g est l'accélération due à la pesanteur. (Dans l'exercice 28 de la section 5.8, nous avions évalué cette intégrale par la Règle de Simpson.)

a) Démontrez, en développant l'intégrande en série entière et en utilisant le résultat de l'exercice 36 dans la section 5.6, que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots \right]$$

Souvent, on adopte l'approximation issue du premier terme de la série $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$ pour des valeurs de θ_0 pas trop grandes. L'approximation est meilleure si on retient deux termes de la série :

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

b) Remarquez que tous les termes de la série après le premier ont un coefficient qui ne dépasse pas 1/4. Servez-vous de cette observation pour comparer cette série avec une série géométrique et démontrez que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \, \frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

c) Quelle estimation de la période d'un pendule dont $L = 1$ m et $\theta_0 = 10°$ obtenez-vous grâce à ces inégalités ? Comparez-la avec l'estimation $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? Qu'en est-il si $\theta_0 = 42°$?

Sujet de rédaction

Comment Newton découvrit la série du binôme

La formule du binôme, celle qui donne une expression de $(a+b)^k$ dans le cas où k est un entier positif, était connue des mathématiciens chinois plusieurs siècles avant Newton. En 1665, il était alors âgé de 22 ans, Newton découvrit le premier la série infinie de $(a+b)^k$, pour k fractionnaire (positif ou négatif). Il ne publia pas sa découverte, mais il la cita et donna des exemples de comment s'en servir dans une lettre (appelée aujourd'hui *epistola prior*) datée du 13 juin 1676, qu'il adressa à Henry Oldenburg, secrétaire de la Société royale de Londres, pour qu'il la transmette à Leibniz. Quand Leibniz répondit, il demanda comment Newton avait découvert la série du binôme. Newton écrivit une seconde lettre, la *epistola posterior*, datée du 24 octobre 1676, dans laquelle il explique en grand détail comment il est arrivé à sa découverte par un chemin tout à fait détourné. Il cherchait à calculer l'aire sous les courbes $y = (1-x^2)^{n/2}$ entre 0 et x pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ C'est assez facile lorsque n est pair. En observant les régularités et en interpolant, Newton fut capable de deviner les réponses dans le cas n impair. C'est alors qu'il réalisa qu'il pouvait obtenir les mêmes réponses en exprimant $(1-x^2)^{n/2}$ comme une série infinie.

Écrivez un compte-rendu sur la découverte de la série du binôme par Newton. Commencez par donner l'énoncé de la série du binôme dans les notations de Newton (voyez la *epistola prior* à la page 285 de [4] ou à la page 402 de [2]). Expliquez pourquoi la version de Newton est équivalente au théorème (2) de la page 621. Ensuite, lisez la *epistola posterior* de Newton (page 287 dans [4] ou page 404 dans [2]) et expliquez les régularités que Newton observa dans les aires sous les courbes $y = (1-x^2)^{n/2}$. Montrez comment il fut capable de conjecturer les aires sous les autres courbes et comment il vérifia ses réponses. Enfin, expliquez comment ces découvertes le menèrent à la série du binôme. Les livres de Edwards [1] et Katz [3] contiennent des commentaires sur les lettres de Newton.

1. C.H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, New York, Springer-Verlag, 1979, pp.178-187.

2. J. Fauvel and J. Gray, eds., *The History of Mathematics : A Reader*, London, MacMillan Press, 1987.

3. Victor Katz, *A History of Mathematics : An Introduction*, New York : Harper-Collins, 1993, p 463-466.

4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1969.

8.9 Des applications des polynômes de Taylor

On suppose que $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Taylor en a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Nous avons, dans la section 8.7, introduit la notation $T_n(x)$ pour la somme partielle d'ordre n de cette série et l'avons appelée le polynôme de Taylor de degré n de f en a. Donc

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Puisque f est la somme de sa série de Taylor, on sait que $T_n(x) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$ et par là même, que $T_n(x)$ peut servir d'approximation à f : $f(x) \approx T_n(x)$. C'est parce que les polynômes sont les fonctions les plus simples qu'il est intéressant de les prendre pour approximer une fonction. Dans cette section, nous voyons comment les physiciens et les informaticiens utilisent de telles approximations.

Remarquez que le polynôme de Taylor de degré 1

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

est le même que l'approximation affine de f en a, vue dans les sections 2.9 et 3.8. Remarquez encore que T_1 et sa dérivée ont la même valeur en a que f et f' respectivement. Plus généralement, les dérivées de T_n en a sont égales à celles de f jusques et y compris celles de degré n.

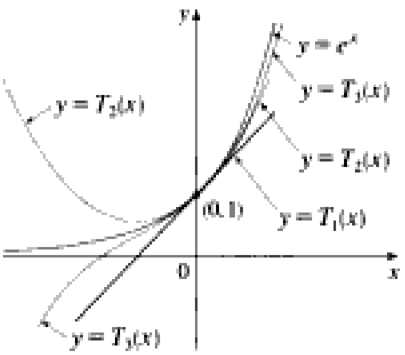


FIGURE 1

Pour illustrer cela, jetons un coup d'oeil sur les graphiques de $y = e^x$ et de ses premiers polynômes de Taylor, dans la figure 1. Le graphique de T_1 est la tangente à $y = e^x$ en $(0, 1)$; cette tangente est la meilleure approximation du premier degré de e^x à proximité de $(0, 1)$. Le graphique de T_2 est la parabole $y = 1 + x + x^2/2$ et le graphique de T_3 est la cubique $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, qui s'ajuste de plus près à e^x que T_2. Le polynôme de Taylor de degré 4 serait une approximation encore meilleure, etc.

	$x = 0,2$	$x = 3,0$
$T_2(x)$	1,220000	8,500000
$T_4(x)$	1,221400	16,375000
$T_6(x)$	1,221403	19,412500
$T_8(x)$	1,221403	20,009152
$T_{10}(x)$	1,221403	20,079665
e^x	1,221403	20,085537

Les valeurs de la table apportent un argument numérique en faveur de la convergence des polynômes de Taylor $T_n(x)$ vers la fonction $y = e^x$. En $x = 0,2$, la convergence est très rapide tandis qu'en $x = 3$ elle est un peu plus lente. Plus x est loin de 0, plus lente est la convergence de T_n.

Chaque fois qu'un polynôme de Taylor T_n vient prendre la place d'une fonction f il faut se poser les questions : de quelle qualité est cette approximation ? Quelle est la valeur de n suffisamment grande pour satisfaire le degré de précision souhaité ? La réponse à ces questions se trouve dans la valeur absolue du reste :

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|.$$

Il y a trois méthodes possibles pour estimer l'importance de l'erreur :

1. si on dispose d'un outil graphique, on peut s'en servir pour dessiner le graphique de $|R_n(x)|$ et se faire ainsi une idée de l'erreur ;
2. si la série est alternée, on peut faire appel au théorème spécifique à l'erreur dans ce cas ;
3. dans tous les cas, on peut utiliser l'inégalité de Taylor (Théorème 9 dans la section 8.7), qui affirme que si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

EXEMPLE 1 ■

a) Approximer la fonction $\sqrt[3]{x}$ par un polynôme de Taylor de degré 2 en $a = 8$.

b) Quelle est la précision de cette approximation lorsque $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUTION

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3} & f(8) &= 2 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}x^{-2/3} & f'(8) &= \tfrac{1}{12} \\ f''(x) &= -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} & f''(8) &= -\tfrac{1}{144} \\ f'''(x) &= \tfrac{10}{27}x^{-8/3} \end{aligned}$$

Le polynôme de Taylor de degré 2 est donc

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2. \end{aligned}$$

C'est le polynôme d'approximation souhaité :

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2.$$

Lorsque $x < 8$, la série de Taylor n'est pas alternée et le Théorème sur l'évaluation d'une série alternée n'est donc pas applicable. Par contre, l'inégalité de Taylor avec $n = 2$ et $a = 8$ donne :

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3,$$

où $|f'''(x)| \leqslant M$. Comme $x \geqslant 7$, $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ et de ce fait,

$$f'''(x) = \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{7^{8/3}} < 0{,}0021.$$

Par conséquent, on peut prendre $M = 0{,}0021$. De plus, $7 \leqslant x \leqslant 9$ est équivalent à $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ ou encore à, $|x-8| \leqslant 1$. Avec ces données, l'inégalité de Taylor fournit comme borne supérieure de l'erreur :

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0{,}0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0{,}0021}{6} < 0{,}0004$$

Finalement, pour $7 \leqslant x \leqslant 9$, l'erreur dont est affectée l'approximation de la partie a) ne dépasse pas 0,0004.

L'usage d'un outil graphique se montre très fructueux pour vérifier les calculs de l'exemple 1. La figure 2 montre que les graphiques de $y = \sqrt[3]{x}$ et de $y = T_2(x)$ sont très proches l'un de l'autre pour des valeurs de x voisines de 8. La figure 3 quant à elle montre le graphique de $|R_2(x)|$ calculé à partir de l'expression

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|.$$

On peut lire sur le graphique que

$$|R_2(x)| < 0{,}0003$$

pour $7 \leqslant x \leqslant 9$. Ici, l'erreur estimée graphiquement semble un peu moins importante que celle annoncée par l'inégalité de Taylor.

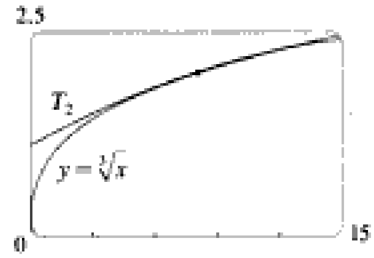


FIGURE 2

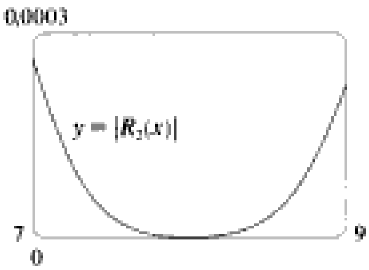


FIGURE 3

EXEMPLE 2 ■

a) Quelle est l'erreur maximale commise en utilisant l'approximation

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

pour x compris entre $-0{,}3$ et $0{,}3$? Utilisez cette approximation pour calculer $\sin 12°$ avec 6 décimales correctes.

b) Pour quelles valeurs de x cette approximation fournit-elle des réponses correctes à moins de 0,00005 ?

SOLUTION

a) Comme la série de Mac Laurin

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

est alternée pour $x \neq 0$, on peut se servir du Théorème sur l'estimation d'une série alternée. L'erreur liée à l'approximation de $\sin x$ par les trois premiers termes de sa série de Mac Laurin ne dépasse pas

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}.$$

Comme les valeurs de x considérées sont telles que $|x| \leqslant 0{,}3$, l'erreur est inférieure à

$$\frac{(0{,}3)^7}{5040} \approx 4{,}3 \times 10^{-8}.$$

Avant de calculer $\sin 12°$, il faut convertir la mesure de l'angle en radians.

$$\begin{aligned}\sin 12° &= \sin\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{15}\right)\\ &\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!}\\ &\approx 0{,}20791169\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sin 12° \approx 0{,}207912$ avec 6 décimales exactes.

b) L'erreur ne dépassera pas 0,00005 tant que

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0{,}00005.$$

La résolution par rapport à x conduit à

$$|x|^7 < 0{,}252 \qquad \text{ou} \qquad |x| < (0{,}252)^{1/7} \approx 0{,}821.$$

Pour ces valeurs de x, le polynôme de Taylor proposé fournit une valeur de $\sin x$ exacte à 0,00005 près.

Et si on était passé par l'inégalité de Taylor pour résoudre l'exemple 2 ? Comme $f^{(7)}(x) = -\cos x$, on a $|f^{(7)}(x)| \leqslant 1$ et

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{7!}|x|^7.$$

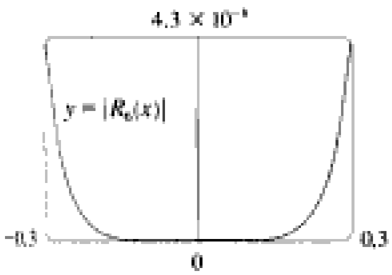


FIGURE 4

On arrive donc aux mêmes estimations qu'avec le Théorème sur l'estimation d'une série alternée.

Et graphiquement ? La figure 4 montre la courbe représentative de

$$|R_6(x)| = \left|\sin x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

sur laquelle on voit que $|R_6(x)| < 4{,}3 \times 10^{-8}$ quand $|x| \leqslant 0{,}3$. C'est la même estimation que celle obtenue dans l'exemple 2. En ce qui concerne la partie b), on souhaitait $|R_6(x)| < 0{,}00005$. Alors, on superpose les graphiques de $y = |R_6(x)|$ et de $y = 0{,}00005$ dans la figure 5.

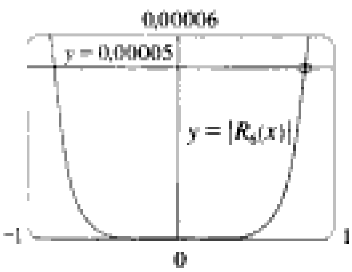


FIGURE 5

Par lecture des coordonnées du curseur positionné sur l'intersection de droite, on voit que l'inégalité est satisfaite quand $|x| < 0{,}82$. C'est à nouveau la même estimation que celle obtenue dans la solution de l'exemple 2.

Si on avait demandé d'approximer $\sin 72°$ au lieu de $\sin 12°$ dans l'exemple 2, il aurait été sage de construire les polynômes de Taylor en $a = \pi/3$ (au lieu de $a = 0$) car ils donnent de meilleurs résultats pour des valeurs de x proches de $\pi/3$. Remarquez que $72°$ est proche de $60°$ (ou $\pi/3$ radians) et qu'il est facile de calculer les dérivées de $\sin x$ en $\pi/3$.

La figure 6 montre les graphiques des polynômes de Taylor

$$T_1(x) = x \qquad\qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad\qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

qui approximent la sinusoïde. Vous pouvez observer que plus n est grand, meilleure est l'approximation de $\sin x$ par $T_n(x)$ sur un intervalle plus large.

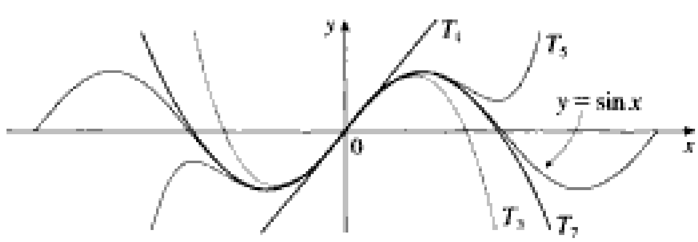


FIGURE 6

Des calculs du genre de ceux qui ont été faits dans les exemples 1 et 2 sont exploités dans les calculatrices et les ordinateurs. Par exemple, lorsque vous enfoncez la touche sin ou e^x de votre calculatrice, ou lorsqu'un programmeur utilise une sous-routine pour une fonction trigonométrique, exponentielle ou de Bessel, souvent c'est une approximation polynomiale qui est calculée. Et il s'agit souvent d'un polynôme de Taylor qui a été modifié de manière à répartir régulièrement l'erreur sur l'intervalle.

Des applications en physique

Les polynômes de Taylor sont fréquemment utilisés en physique. Afin de voir plus clair dans une équation, le physicien simplifie souvent la fonction qu'elle comporte en mettant à sa place les deux ou trois premiers termes de sa série de Taylor. En d'autres mots, le physicien emploie le polynôme de Taylor comme approximation d'une fonction. L'inégalité de Taylor peut alors servir à apprécier la précision de l'approximation. L'exemple suivant développe un cas qui illustre cet usage en théorie de la relativité restreinte.

EXEMPLE 3 ■ En théorie de la relativité restreinte d'Einstein, la masse d'un objet qui se déplace à la vitesse v est

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

où m_0 est la masse de l'objet au repos et c la vitesse de la lumière. L'énergie cinétique de l'objet est la différence entre son énergie totale et son énergie au repos :

$$K = mc^2 - m_0c^2.$$

a) Montrez que quand v est très petit comparé à c, cette expression de K est en accord avec la physique newtonienne classique : $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
b) Estimez, au moyen de l'inégalité de Taylor, la différence entre ces expressions de K quand $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUTION

a) Introduisons l'expression de m dans celle de K. Il vient

$$\begin{aligned} K = mc^2 - m_0c^2 &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 \\ &= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right] \end{aligned}$$

Avec $x = -v^2/c^2$, la série de Mac Laurin de $(1+x)^{-1/2}$ est vite calculée en suivant la formule de la série du binôme avec $k = -1/2$. (Comme $v < c$, $|x| < 1$.) Cela donne

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1/2} &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K &= m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right] \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Si v est beaucoup plus petit que c, alors tous les termes après le premier sont très petits comparés au premier et on décide de les négliger. Il reste

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

b) Si $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1+x)^{-1/2} - 1]$ et si M est un majorant de $|f''(x)|$, l'inégalité de Taylor fournit

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2.$$

Or, $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1+x)^{-5/2}$ et comme $|v| \leqslant 100$ m/s,

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M).$$

Par conséquent, avec $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4{,}17 \times 10^{-10})m_0.$$

Ainsi, quand $|v| \leqslant 100$ m/s, adopter l'expression newtonienne de l'énergie cinétique n'entraîne qu'une erreur qui ne dépasse pas $(4{,}2 \times 10^{-10})m_0$.

Voici une autre application en physique, plus précisément en optique. La figure 7 (adaptée d'un livre de E. Hecht, *Optics* publié chez Addison-Wesley, 1987) montre une onde, issue du point source S, qui rencontre une interface sphérique de rayon R centrée en C. Le rayon SA est réfracté vers P.

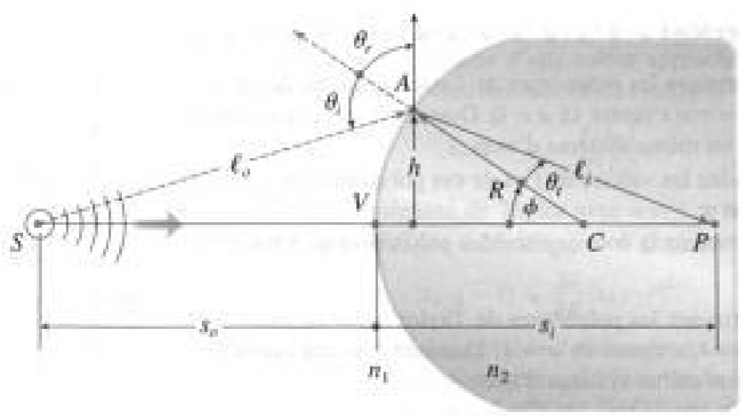


FIGURE 7
Réfraction avec une interface sphérique

Comme, selon le principe de Fermat, la lumière voyage de façon à minimiser le temps employé, Hecht arrive à l'équation

1 $$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

où n_1 et n_2 sont des indices de réfraction et ℓ_o, ℓ_i, s_o et s_i sont les distances indiquées dans la figure 7. Or, la loi des cosinus appliquée aux triangles ACS et ACP donne

On utilise ici l'identité

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi.$$

2
$$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$
$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

Parce que l'équation 1 est difficile à manipuler, Gauss, en 1841, la simplifia grâce à l'approximation $\cos\phi \approx 1$ pour des petites valeurs de ϕ. (Ce qui revient à utiliser le polynôme de Taylor de degré 1.) L'équation prend alors la forme simplifiée (qu'il vous est demandée de déduire dans l'exercice 24 a)] :

3
$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

La théorie optique qui en découle est connue sous le nom d'*optique gaussienne*, ou *optique du premier ordre*, et est devenue l'outil théorique de base pour la fabrication des lentilles.

Si on exige une théorie plus précise, on approche $\cos\phi$ par son polynôme de Taylor de degré 3 (qui est le même que celui de degré 2). Celui-ci tient compte des rayons pour lesquels ϕ n'est pas si petit, c'est-à-dire des rayons qui frappent la surface à des distances h plus grandes au-dessus de l'axe. L'exercice 24 b) consiste à déduire, en utilisant cette approximation, l'équation plus précise

4
$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

La théorie optique qui en découle est connue sous le nom d'*optique du troisième ordre*. Les exercices 25 et 26 proposent d'autres applications des polynômes de Taylor en physique, de même que le Projet appliqué à la page 632.

8.9 Exercices

1. a) Déterminez les polynômes de Taylor jusqu'au degré 6 de $f(x) = \cos x$ centré en $a = 0$. Dessinez f et ces polynômes dans un même système d'axes.
b) Calculez les valeurs de f et de ces polynômes en $x = \pi/4$, $\pi/2$ et π.
c) Commentez la convergence des polynômes de Taylor vers $f(x)$.

2. a) Déterminez les polynômes de Taylor jusqu'au degré 3 de $f(x) = 1/x$ centré en $a = 1$. Dessinez f et ces polynômes dans un même système d'axes.
b) Calculez les valeurs de f et de ces polynômes en $x = 0{,}9$ et $1{,}3$.
c) Commentez la convergence des polynômes de Taylor vers $f(x)$.

3-8 ■ Déterminez le polynôme de Taylor $T_n(x)$ de la fonction f centré en a. Dessinez f et T_n dans une même fenêtre.

3. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/6$, $n = 3$

4. $f(x) = \cos x$, $a = 2\pi/3$, $n = 4$

5. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $n = 4$

6. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = \pi/4$, $n = 4$

7. $f(x) = \sec x$, $a = \pi/3$, $n = 3$

8. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$, $n = 3$

9-10 ■ Utilisez un logiciel de calcul symbolique pour déterminer le polynôme de Taylor T_n en $a = 0$ pour les valeurs indiquées de n. Ensuite, dessinez f et ces polynômes dans une même fenêtre.

9. $f(x) = \sec x$, $n = 2, 4, 6, 8$

10. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 1, 3, 5, 7, 9$

11-16 ■
a) Approximez f par un polynôme de Taylor de degré n au nombre a.
b) Servez-vous de l'inégalité de Taylor pour estimer la précision de l'approximation $f(x) \approx T_n(x)$ quand x appartient à l'intervalle donné.

c) Vérifiez vos résultats de la partie b) en traçant le graphique de $|R_n(x)|$.

11. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$, $n = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$

12. $f(x) = 1/x$, $a = 1$, $n = 3$, $0{,}8 \leqslant x \leqslant 1{,}2$

13. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/4$, $n = 5$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$

14. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/3$, $n = 4$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/3$

15. $f(x) = e^{x^2}$, $a = 0$, $n = 3$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$

16. $f(x) = \ln x$, $a = 4$, $n = 3$, $3 \leqslant x \leqslant 5$

17. Calculez avec cinq décimales correctes la valeur de $\sin 35°$, en utilisant l'exercice 3.

18. Calculez avec cinq décimales correctes la valeur de $\cos 69°$, en utilisant l'exercice 14.

19. À l'aide de l'inégalité de Taylor, déterminez le nombre de termes de la série de Mac Laurin de e^x qu'il faut retenir pour obtenir $e^{0,1}$ à 0,00001 près.

20. De combien de termes de la série de Mac Laurin de $\ln(1+x)$ avez-vous besoin pour estimer ln 1,4 à moins de 0,001 ?

21-22 ■ Déterminez l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'approximation donnée a le degré de précision indiqué, soit en vous servant de Théorème sur l'estimation d'une série alternée, soit de l'inégalité de Taylor.

21. $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, erreur $< 0{,}01$

22. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$, erreur $< 0{,}005$

23. Une voiture se déplace à la vitesse de 20 m/s et elle accélère à un moment donné de 2 m/s^2. En utilisant un polynôme de Taylor de degré 2, estimez la distance que parcourt la voiture durant la seconde suivante. Serait-il raisonnable d'utiliser ce polynôme pour estimer la distance parcourue durant la minute suivante ?

24. a) Retracez le passage de l'équation 1 à la formule 3 de l'optique gaussienne grâce à l'approximation de $\cos\phi$ dans l'équation 2 par son polynôme de Taylor de degré 1.

b) Montrez que l'équation 1 devient l'équation 4 de l'optique du troisième ordre si, dans l'équation 2, $\cos\phi$ est remplacé par son polynôme de Taylor du troisième degré. [*Suggestion :* Utilisez les deux premiers termes de la série du binôme pour l_o^{-1} et l_i^{-1}. Utilisez aussi $\phi \approx \sin\phi$.]

25. Un dipôle électrique se compose de deux charges électriques de même intensité et de signes opposés. Si les charges sont q et $-q$ et sont situées à une distance d l'une de l'autre, alors le champ électrique E au point P de la figure est

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}.$$

Montrez que E est approximativement proportionnel à $1/D^3$ pourvu que P soit loin du dipôle, grâce au développement en série de E en puissances de d/D.

26. La résistivité ρ d'un fil conducteur est la réciproque de la conductivité et est mesurée en ohm-mètre (Ω-m). La résistivité d'un métal donné dépend de la température selon l'équation

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

où t est la température en °C. Il existe des tables de α (appelé coefficient thermique de la résistivité) et de ρ_{20} (la résistivité à 20°C) pour différents matériaux. Sauf à très basse température, la résistivité varie presque linéairement avec la température et il est donc habituel d'approcher l'expression de $\rho(t)$ par son polynôme de Taylor de degré 1 ou 2 en $t = 20$.

a) Donnez l'expression de ces approximations du premier et du deuxième degré.

b) Pour le cuivre, la table donne $\alpha = 0{,}0039$ °C et $\rho_{20} = 1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω-m. Faites un graphique de la résistivité du cuivre et des approximations du premier et du deuxième degré pour -250 °C $\leqslant t \leqslant 1000$ °C.

c) Pour quelles valeurs de t l'approximation du premier degré concorde-t-elle avec l'expression exponentielle à un pour cent près ?

27. Il a été question dans la section 4.8 de la méthode de Newton qui permet de trouver une valeur approchée d'une racine r d'une équation $f(x) = 0$ à partir d'une valeur approchée initiale x_1, améliorée par des itérations successives selon la formule

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

À l'aide de l'inégalité de Taylor avec $n = 1$, $a = x_n$ et $x = r$, montrez que, si $f''(x) \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ pour tout $x \in I$,

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2.$$

[Ceci signifie que si x_n possède d décimales exactes, alors x_{n+1} en possède $2d$. Plus précisément, si l'incertitude à l'étape n est 10^{-m}, alors à l'étape $n+1$ elle est $(M/2K)10^{-2m}$.]

Projet appliqué

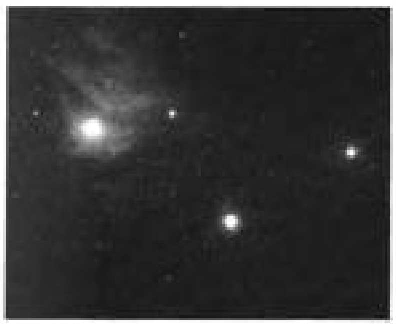
Le rayonnement des étoiles

Tout objet émet un rayonnement quand il est chauffé. Un *corps noir* est un système qui absorbe totalement le rayonnement qui l'atteint. Par exemple, une surface noire mate ou une large cavité avec une tout petit trou dans sa paroi (comme un haut fourneau) est un corps noir et émet des rayonnements de corps noir. Même le rayonnement solaire est proche du rayonnement du corps noir.

Proposée à la fin du 19^e siècle, la loi de Rayleigh-Jeans exprime la densité d'énergie du rayonnement du corps noir de longueur d'onde λ par

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

où λ est mesurée en mètres, où T est la température en kelvins et k la constante de Boltzmann. La loi de Rayleigh-Jeans correspond aux mesures expérimentales pour les grandes longueurs d'ondes mais s'en écarte de façon spectaculaire pour les petites longueurs d'ondes. [La loi prévoit que $f(\lambda) \to \infty$ lorsque $\lambda \to 0^+$ alors que l'expérience montre que $f(\lambda) \to 0$.] Ce fait est connu comme la *catastrophe de l'ultraviolet.*



En 1900, Max Planck découvrit un meilleur modèle (connu comme la loi de Planck) du rayonnement du corps noir :

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

où λ est mesurée en mètres, où T est la température en kelvins et

$$h = \text{la constante de Planck} = 6{,}6262 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$
$$c = \text{la vitesse de la lumière} = 2{,}997925 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$
$$k = \text{la constante de Boltzmann} = 1{,}3807 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

1. Démontrez, par la Règle de l'Hospital, que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0,$$

pour la loi de Planck. Cette loi modélise donc mieux le rayonnement du corps noir que la loi de Rayleigh-Jeans pour les petites longueurs d'ondes.

2. Démontrez à l'aide d'un polynôme de Taylor, que, pour les grandes longueurs d'ondes, la loi de Planck donne approximativement les mêmes valeurs que la loi de Rayleigh-Jeans.

3. Faites le graphique de f tel qu'il est donné par les deux lois dans la même fenêtre et commentez les ressemblances et les différences. Utilisez $T = 5700$ K (la température du soleil). (Vous pouvez passer des mètres à des unités plus adaptées comme le micromètre : 1 μm = 10^{-6} m.)

4. Cherchez sur le graphique de la question 3 la valeur de λ pour laquelle $f(\lambda)$ est maximum d'après la loi de Planck.

5. Étudiez comment varie le graphique de f lorsque T change. (Utilisez la loi de Planck.) En particulier, dessinez f pour les étoiles Bételgeuse ($T = 3400$ K), Procyon ($T = 6400$ K) et Sirius ($T = 9200$ K) ainsi que pour le Soleil. Comment varie le rayonnement total (l'aire sous la courbe) avec T ? Servez-vous du graphique pour commenter le fait que Sirius est connue comme une étoile bleue et Bételgeuse comme une étoile rouge.

8.10 Des séries pour résoudre des équations différentielles

Beaucoup d'équations différentielles ne peuvent pas être résolues explicitement en termes de combinaisons finies de fonctions familières simples. C'est vrai même pour une équation qui à première vue ne semble pas compliquée

1 $$y'' - 2xy' + y = 0.$$

Il est pourtant important d'arriver à résoudre des équations comme l'équation 1 parce qu'elles interviennent dans des problèmes concrets et, en particulier, en liaison avec les équations de Schrödinger en mécanique quantique. Dans un cas comme celui-ci, on utilise la méthode des séries entières ; c'est-à-dire, on cherche une solution de la forme

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

La méthode consiste à substituer cette expression dans l'équation et à déterminer les coefficients $c_0, c_1, c_2 \ldots$

Avant d'attaquer l'équation 1 par cette méthode, on va la mettre en œuvre d'abord sur une équation plus simple $y'' + y = 0$; c'est l'exemple 1.

EXEMPLE 1 ■ Résolvez l'équation $y'' + y = 0$ à l'aide d'une série entière.

SOLUTION On suppose qu'il y a une solution de la forme

2 $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

On dérive la série terme à terme et on obtient

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

3 $$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Afin de pouvoir plus facilement comparer les expressions de y et de y'', on réécrit y'' comme suit :

Pour voir que (4) est la même série que (3), il suffit d'écrire en extension quelques termes de (4). Pour l'obtenir, on a remplacé n par $n + 2$ et commencé la sommation à 0 au lieu de 2.

4 $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n.$$

En substituant les expressions 2 et 4 dans l'équation différentielle, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

ou

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} + c_n] x^n = 0.$$

Si deux séries sont égales, alors les coefficients correspondants doivent être égaux.

Par conséquent, les coefficients de x^n dans l'équation 5 doivent être nuls :

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

6
$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Cette équation 6 est une relation de récurrence. Dès que l'on connaît c_0 et c_1, on peut calculer les autres coefficients en y posant successivement $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

On pose $n = 0$: $\qquad c_2 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2}$

On pose $n = 1$: $\qquad c_3 = -\frac{c_1}{2 \cdot 3}$

On pose $n = 2$: $\qquad c_4 = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!}$

On pose $n = 3$: $\qquad c_5 = -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!}$

On pose $n = 4$: $\qquad c_6 = -\frac{c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{4!\,5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!}$

On pose $n = 5$: $\qquad c_7 = -\frac{c_5}{6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{5!\,6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{7!}$

La régularité est claire maintenant :

Pour les coefficients pairs, $c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!}$

Pour les coefficients impairs, $c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{c_1}{(2n+1)!}$

Il reste à substituer ces expressions des coefficients dans l'équation 2 et la solution s'écrit

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) \\ &\qquad + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \\ &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Remarquez qu'il y a deux constantes arbitraires, c_0 et c_1.

REMARQUE 1 • Les séries qui apparaissent dans la solution de l'exemple 1 sont connues, ce sont les séries de Mac Laurin de $\cos x$ et $\sin x$. La solution peut donc encore s'écrire

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$$

Néanmoins, il serait faux de croire qu'il est courant de pouvoir exprimer les solutions d'une équation différentielle en termes de fonctions connues.

EXEMPLE 2 ■ Résolvez $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUTION On suppose qu'il y a une solution de la forme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Alors

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

et

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n,$$

comme dans l'exemple 1. On substitue dans l'équation différentielle et on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n] x^n = 0$$

L'équation est vraie si le coefficient de x^n est nul :

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0.$$

7 $$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

On résout l'équation de récurrence en posant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$ dans l'équation 7 :

On pose $n = 0$: $\quad c_2 = \dfrac{-1}{1 \cdot 2} c_0.$

On pose $n = 1$: $\quad c_3 = \dfrac{1}{2 \cdot 3} c_1.$

On pose $n = 2$: $\quad c_4 = \dfrac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\dfrac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\dfrac{3}{4!} c_0.$

On pose $n = 3$: $\quad c_5 = \dfrac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \dfrac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \dfrac{1 \cdot 5}{5!} c_1.$

On pose $n = 4$: $\quad c_6 = \dfrac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\dfrac{3 \cdot 7}{4!\,5 \cdot 6} c_0 = -\dfrac{3 \cdot 7}{6!} c_0.$

On pose $n = 5$: $\quad c_7 = \dfrac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5!\,6 \cdot 7} c_1 = \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1.$

$$\text{On pose } n = 6: \quad c_8 = \frac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0.$$

$$\text{On pose } n = 7: \quad c_9 = \frac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1.$$

En général, les coefficients pairs sont donnés par

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} c_0$$

et les coefficients impairs, par

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} c_1.$$

La solution est

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!}x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!}x^8 - \cdots\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!}x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!}x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!}x^9 + \cdots\right) \end{aligned}$$

ou

8
$$\begin{aligned} y &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right). \end{aligned}$$

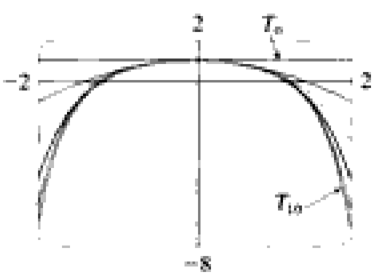


FIGURE 1

REMARQUE 2 • Dans l'exemple 2, il a fallu supposer que l'équation différentielle avait une solution en forme de série. À ce point, on peut vérifier directement que la fonction définie par l'expression 8 est effectivement une solution.

REMARQUE 3 • Contrairement à la situation de l'exemple 1, la série entière qui est apparue comme solution de l'exemple 2 ne définit pas une fonction élémentaire. Les fonctions

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{(2n)!} x^{2n}$$

et

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

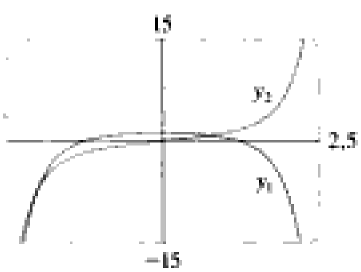


FIGURE 2

sont de vraies bonnes fonctions mais qui ne peuvent pas être exprimées en termes de fonctions familières. Ces expressions de y_1 et y_2 en forme de séries permettent de calculer des valeurs approchées et même de produire des représentations graphiques. La figure 1 montre les quelques premières sommes partielles T_0, T_2, T_4, ... (polynômes de Taylor) de $y_1(x)$ et on observe comment elles convergent vers y_1. De cette façon, on déduit les graphiques de y_1 et y_2 dans la figure 2.

REMARQUE 4 ● Si le problème posé avait été le problème de Cauchy

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1,$$

on aurait pu calculer

$$c_0 = y(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad c_1 = y'(0) = 1.$$

La calculs de l'exemple 2 s'en seraient trouvé simplifiés puisque tous les coefficients pairs auraient été nuls. La solution de ce problème de Cauchy est en définitive

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

8.10 Exercices

1-9 ■ Résolvez l'équation différentielle à l'aide de séries.

1. $y' = 6y$
2. $y' = xy$
3. $y' = x^2y$
4. $y'' = y$
5. $y'' + 3xy' + 3y = 0$
6. $y'' = xy$
7. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
8. $y'' + x^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + x^2y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

10. La solution du problème de Cauchy

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

est une fonction qui porte le nom de fonction de Bessel d'indice 0.

a) Cherchez la solution du problème de Cauchy de manière à avoir un développement en série potentielle de la fonction de Bessel.

b) Dessinez plusieurs polynômes de Taylor jusqu'à ce que vous arriviez à une courbe qui semble une bonne approximation de la fonction de Bessel sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Chapitre 8 Révision

CONTRÔLE DES CONCEPTS

1. a) Qu'est-ce qu'une suite convergente ?
   b) Qu'est-ce qu'une série convergente ?
   c) Que signifie $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
   d) Que signifie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?
2. a) Qu'est-ce qu'une suite bornée ?
   b) Qu'est-ce qu'une suite monotone ?
   c) Que pouvez-vous dire d'une suite monotone et bornée ?
3. a) Qu'est-ce qu'une série géométrique ? Quand converge-t-elle ? Que vaut sa somme ?
   b) Qu'est-ce qu'une série de Riemann ? Quand est-elle convergente ?
4. On suppose que $\sum a_n = 3$ et que s_n désigne la somme partielle d'ordre n de la série. Que vaut $\lim_{n\to\infty} a_n$? Que vaut $\lim_{n\to\infty} s_n$?
5. Énoncez
   a) le Test de divergence.
   b) le Test de l'intégrale.
   c) Le Test de comparaison.
   d) Le Test de comparaison sous sa forme limite.
   e) Le Test des séries alternées.
   f) Le Test du quotient.
6. a) Quand dit-on qu'une série est absolument convergente ?
   b) Que pouvez-vous dire d'une telle série ?
7. a) Si une série est convergente d'après le Test de l'intégrale, comment estimez-vous sa somme ?
   b) Si une série est convergente d'après le Test de comparaison, comment estimez-vous sa somme ?
   c) Si une série est convergente d'après le Test de Leibniz, comment estimez-vous sa somme ?
8. a) Écrivez la forme générale d'une série entière.
   b) Qu'est-ce que le rayon de convergence d'une série entière ?
   c) Qu'est-ce que l'intervalle de convergence d'une série entière ?
9. Supposons que $f(x)$ est la somme d'une série entière dont le rayon de convergence est R.
   a) Comment dériver f ? Quel est le rayon de convergence de f' ?

b) Comment intégrer f ? Quel est le rayon de convergence de la série $\int f(x)dx$?

10. a) Écrivez l'expression d'un polynôme de Taylor de degré n d'une fonction f centrée en a.

b) Écrivez une expression de la série de Taylor de f centrée en a.

c) Écrivez une expression de la série de Mac Laurin de f.

d) Comment montre-t-on que $f(x)$ est égale à la somme de sa série de Taylor ?

e) Énoncez l'inégalité de Taylor.

11. Écrivez la série de Mac Laurin et l'intervalle de convergence de chacune des fonctions suivantes.

a) $1/(1-x)$ b) e^x

c) $\sin x$ d) $\cos x$

e) Arctg x

12. Écrivez le développement en série du binôme $(1+x)^k$. Que vaut le rayon de convergence de cette série ?

▲ VRAI-FAUX ▲

Dites si la proposition est vraie ou fausse. Si elle est vraie, expliquez pourquoi. Si elle est fausse, expliquez pourquoi et donnez un exemple qui contredit la proposition.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors $\sum a_n$ est convergente.

2. Si $\sum c_n 6^n$ est convergente, alors $\sum c_n(-2)^n$ est convergente.

3. Si $\sum c_n 6^n$ est convergente, alors $\sum c_n(-6)^n$ est convergente.

4. Si $\sum c_n x^n$ diverge quand $x = 6$, alors elle diverge lorsque $x = 10$.

5. Le Test du quotient permet de savoir si $\sum 1/n^3$ converge.

6. Le Test du quotient permet de savoir si $\sum 1/n!$ converge.

7. Si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ et si $\sum b_n$ diverge, alors $\sum a_n$ diverge.

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$.

9. Si $-1 < \alpha < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

10. Si $\sum a_n$ est divergente, alors $\sum |a_n|$ est divergente.

11. Si $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ converge quel que soit x, alors $f'''(0) = 2$.

12. Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont divergentes, alors $\{a_n + b_n\}$ est divergente.

13. Si $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont divergentes, alors $\{a_n b_n\}$ est divergente.

14. Si $\{a_n\}$ est décroissante et $a_n > 0$ pour tout n, alors $\{a_n\}$ est convergente.

15. Si $a_n > 0$ et si $\sum a_n$ converge, alors $\sum(-1)^n a_n$ converge.

16. Si $a_n > 0$ et si $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n) < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

◆ EXERCICES ◆

1-7 ■ Déterminez si la suite est convergente ou divergente. Si elle est convergente, trouvez sa limite.

1. $a_n = \dfrac{n}{2n+5}$ **2.** $a_n = 5 - (0{,}9)^n$

3. $a_n = 2n + 5$ **4.** $a_n = n/\ln n$

5. $a_n = \sin n$ **6.** $a_n = (\sin n)/n$

7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. Une suite est définie de façon inductive par $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Démontrez que $\{a_n\}$ est croissante et que $a_n < 2$ pour tout n. Concluez-en que $\{a_n\}$ est convergente et déterminez sa limite.

9-18 ■ Dites si la série est convergente ou divergente.

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{n+n^4}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n3^n}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{n}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{1+n^2}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{5^n n!}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

19-22 ■ Calculez la somme de la série.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} [\text{Arctg}(n+1) - \text{Arctg}\, n]$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{2n} n!}$

23. Écrivez la forme fractionnaire du nombre décimal 1,2345345345 . . . .

24. Pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$ converge-t-elle ?

25. Déterminez la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ avec 4 décimales exactes.

26. a) Déterminez la somme partielle s_5 de la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ et estimez l'erreur commise si cette somme partielle est prise comme valeur de la série.

b) Quelle est la valeur exacte à 5 décimales de cette série.

27. Utilisez la somme des huit premiers termes pour approximer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} (2+5^n)^{-1}$. Estimez l'erreur dont cette approximation est affectée.

28. a) Montrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ est convergente.

b) Tirez-en la conséquence $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

29. Démontrez que si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n$$

est aussi absolument convergente.

30-33 ■ Déterminez le rayon de convergence et l'intervalle de convergence de la série.

30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{n+1}$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n^3}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)!}$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

34. Déterminez le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

35. Écrivez la série de Taylor de $f(x) = \sin x$ en $a = \pi/6$.

36. Écrivez la série de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

37-44 ■ Écrivez la série de Mac Laurin de f et déterminez son rayon de convergence. Vous pouvez procéder soit par la méthode directe (définition d'une série de Mac Laurin), soit partir d'une série connue comme une série géométrique, du binôme ou de Mac Laurin de e^x et $\sin x$.

37. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

38. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

39. $f(x) = \ln(1-x)$

40. $f(x) = xe^{2x}$

41. $f(x) = \sin(x^4)$

42. $f(x) = 10^x$

43. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16-x}$

44. $f(x) = (1-3x)^{-5}$

45 .Calculez sous forme d'une série infinie $\int \frac{e^x}{x}\, dx$.

46. Utilisez une série pour calculer approximativement $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\, dx$ avec deux décimales correctes.

47-48 ■

a) Approximer f par un polynôme de Taylor de degré n centré en a.

b) Dessinez f et T_n dans une même fenêtre.

c) Servez-vous de l'inégalité de Taylor pour estimer la précision de l'approximation $f(x) \approx T_n$ quand x se trouve dans l'intervalle donné.

d) Vérifiez vos résultats de la partie c) en représentant $|R_n(x)|$.

47. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0{,}9 \leq x \leq 1{,}1$

48. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad 0 \leq x \leq \pi/6$

49. Utilisez une série pour calculer $\lim_{x\to\infty} x^2(1-e^{-1/x^2})$.

50. La force qu'exerce la gravité sur un objet de masse m à une hauteur h au-dessus de la surface de la Terre est égale à

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2},$$

où R est la rayon de la Terre et g l'accélération due à la pesanteur.

a) Exprimez F comme une série de puissances de h/R.

b) Observez que si on ne retient que le premier terme pour approximer F, on obtient l'expression $F = mg$ qui est habituellement employée lorsque h est beaucoup plus petit que R. À l'aide du Théorème sur l'estimation d'une série alternée, estimez la plage des valeurs de h pour lesquelles l'approximation $F = mg$ est précise à moins de 1% (Prenez $R = 6400$ km.)

51. Résolvez le problème de Cauchy à l'aide d'une série entière

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1.$$

52. Utilisez une série entière pour résoudre l'équation

$$y'' - xy' - 2y = 0.$$

Pleins feux sur la résolution de problèmes

Cachez la solution et essayez d'abord de résoudre vous-même le problème.

EXEMPLE 1 ■ Calculez la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!}$.

SOLUTION Le principe de résolution de problèmes qui est en jeu ici, c'est *reconnaître quelque chose de familier*. La série donnée rappelle-t-elle une série déjà rencontrée ? Et bien, elle a l'air d'avoir quelque chose à voir avec la série de Mac Laurin de la fonction exponentielle :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Celle-ci ressemblera davantage à la série donnée si on y remplace x par $x+2$:

$$e^{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = 1 + (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2!} + \frac{(x+2)^3}{3!} + \cdots$$

Mais ici, l'exposant du numérateur est le même que le nombre dont la factorielle figure au dénominateur. Pour qu'il en soit de même dans la série donnée, on multiplie et on divise par $(x+2)^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = \frac{1}{(x+2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{n+3}}{(n+3)!}$$

$$= (x+2)^{-3}\left[\frac{(x+2)^3}{3!} + \frac{(x+2)^4}{4!} + \cdots\right].$$

La série entre crochets est visiblement la même que celle de e^{x+2} hormis les trois premiers termes. D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+3)!} = (x+2)^{-3}\left[e^{x+2} - 1 - (x+2) - \frac{(x+2)^2}{2!}\right].$$

Problèmes

1. Sachant que $f(x) = \sin(x^3)$, calculez $f^{(15)}(0)$.
2. Soit $\{P_n\}$ la suite des points que vous voyez dans la figure. Donc $|AP_1| = 1$, $|P_nP_{n+1}| = 2^{n-1}$ et l'angle AP_nP_{n+1} est droit. Déterminez $\lim_{n\to\infty} \angle P_nAP_{n+1}$.

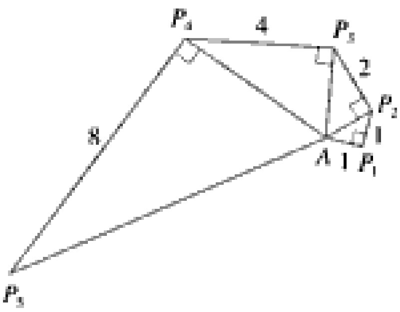


Figure relative au problème 2

3. a) Montrez que $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}x - 2\operatorname{cotg} x$.
   b) Déterminez la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}.$$

4. Une fonction f est définie par

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

En quels points f est-elle continue ?

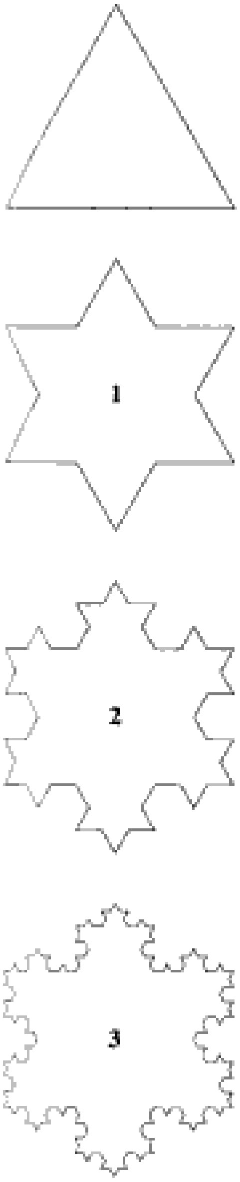


Figure relative au problème 5

5. Pour construire la courbe **en flocon de neige**, on part d'un triangle équilatéral de côté 1. La première étape consiste à diviser chaque côté en trois parties égales, à construire sur le segment central un triangle équilatéral et à supprimer le segment central (voyez la figure). La deuxième étape consiste à répéter l'étape 1 sur chaque côté du polygone obtenu. Il suffit maintenant de réitérer ce procédé. La courbe flocon de neige est la courbe obtenue après avoir répété le procédé indéfiniment.

a) Soit s_n, l_n et p_n respectivement le nombre de côtés, la longueur d'un côté et la longueur totale de la courbe qui résulte après n étapes. Déterminez des formules pour s_n, l_n et p_n.

b) Montrez que $p_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

c) Faites la somme d'une série infinie pour calculer l'aire de la région enfermée dans la courbe flocon de neige. Les parties b) et c) montrent que la courbe flocon de neige est infiniment longue, mais qu'elle délimite une aire finie.

6. Calculez la somme de la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

dont les termes sont les inverses des entiers positifs qui n'ont comme facteurs premiers que des 2 et des 3.

7. a) Montrez que pour $xy \neq -1$

$$\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arctg} y = \operatorname{Arctg} \frac{x-y}{1+xy},$$

si le membre de gauche se situe entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

b) Montrez que

$$\operatorname{Arctg} \frac{120}{119} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

c) Déduisez la formule appelée de John Machin (1680-1751) :

$$4\operatorname{Arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

d) À l'aide de la série de Mac Laurin de Arctg, montrez que

$$0{,}197395560 < \operatorname{Arctg} \frac{1}{5} < 0{,}197395562.$$

e) Montrez que

$$0{,}004184075 < \operatorname{Arctg} \frac{1}{239} < 0{,}004184077.$$

f) Déduisez la valeur de π correcte jusqu'à la 7^e place,

$$\pi \approx 3{,}1415927.$$

Machin a procédé ainsi en 1706 pour calculer π jusqu'à la 100^e décimale. Au cours du 20^e siècle, la valeur de π a été calculée avec une précision toujours plus grande, grâce aux ordinateurs. En 1995, Jonathan et Peter Borwein de l'université Simon Fraser et Yasumana Kanada de l'université de Tokio ont réussi à calculer 4 294 967 286 décimales correctes de π.

8. Montrez que

$$\lim_{n\to\infty} (a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}) = 0,$$

sachant que $a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 0$. Si vous ne voyez pas comment démontrer ceci, procéder par analogie est la stratégie de résolution de problèmes indiquée dans ce cas (voyez page 87). Essayez les cas particuliers $k = 1$ et $k = 2$ pour commencer. Si vous voyez comment démontrer la proposition dans ces cas-là, vous pourrez probablement la démontrer dans le cas général.

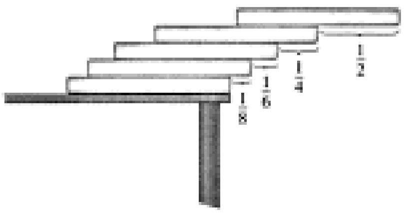


Figure relative au problème 10

9. Déterminez l'intervalle de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ et calculez sa somme.

10. Supposez que vous disposez d'une grande réserve de livres, tous de même dimension, et que vous les empilez au bord d'une table, chacun surplombant celui qui en dessous de lui. Démontrez qu'il est possible de les disposer ainsi jusqu'à ce que le livre du dessus déborde entièrement de la table. En fait, montrez que le livre du dessus peut dépasser d'autant que l'on veut au-dessus du bord de la table pourvu que la pile soit suffisamment haute. Suivez le mode d'empilement que voici : le livre du dessus dépasse de la moitié de sa longueur le livre sur lequel il est posé. Le deuxième livre ne dépasse que d'un quart de sa longueur le livre sur lequel il est posé. Le troisième, d'un sixième, etc. (Essayez vous-même avec un jeu de cartes.) Envisagez les centres de masse.

11. Soit

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Montrez que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

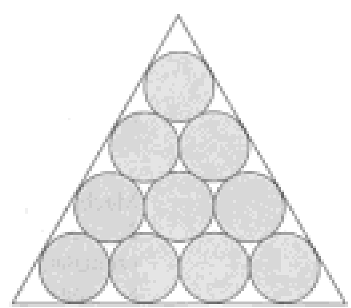
12. Évaluez l'expression

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

dans le cas où $p > 1$.

13. On suppose que des cercles de même diamètre sont entassés en n rangées à l'intérieur d'un triangle équilatéral. (La figure illustre le cas $n = 4$.) Si A désigne l'aire du triangle et A_n l'aire totale occupée par les n rangées de cercles, montrez que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$



14. Une suite $\{a_n\}$ est définie par les équations de récurrence

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}.$$

Calculez la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

15. Considérez la série dont les termes sont les inverses des entiers positifs qui, en base 10, peuvent être écrits sans utiliser le chiffre 0. Montrez que cette série est convergente et vaut moins de 90.

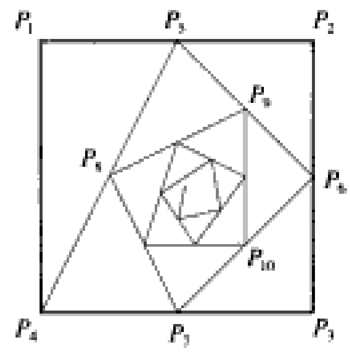
16. Partant des quatre sommets $P_1(0,1)$, $P_2(1,1)$, $P_3(1,0)$, $P_4(0,0)$ d'un carré, on construit les points successifs comme le montre la figure : P_5 est le milieu de P_1P_2, P_6 est le milieu de P_2P_3, P_7 est le milieu de P_3P_4 etc. La trajectoire en spirale polygonale $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7\ldots$ tend vers un point P intérieur au carré.

a) Si les coordonnées de P_n sont (x_n, y_n), montrez que

$$\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2,$$

et trouvez une équation de même type pour les ordonnées.

b) Quelles sont les coordonnées de P ?



A Intervalles, inégalités et valeurs absolues

B Géométrie analytique

C Trigonométrie

D Les définitions formelles des limites

E Quelques démonstrations

F L'intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples

G Les coordonnées polaires

H Les nombres complexes

I Réponses aux exercices impairs

Annexes

A Intervalles, inégalités et valeurs absolues

Certains ensembles de nombres réels, appelés **intervalles** interviennent fréquemment en calcul différentiel et intégral. Ils correspondent géométriquement à des segments de droite. Par exemple, si $a < b$, **l'intervalle ouvert** de a à b se compose de tous les nombres compris entre a et b et est noté $]a, b[$. En notation ensembliste,

$$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}.$$

FIGURE 1
Intervalle ouvert $]a, b[$

Les extrémités de l'intervalle, à savoir a et b, sont exclues. Cela se lit aux crochets tournés vers l'extérieur][et dans la figure 1 aux points creux. **L'intervalle fermé** de a jusqu'à b est l'ensemble

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

FIGURE 2
Intervalle fermé $[a, b]$

Cette fois, les extrémités sont comprises. Cela se voit aux crochets tournés vers l'intérieur [ ] et dans la figure 2, aux points pleins. Parfois, il n'y a qu'une seule des extrémités qui est inclue, comme le montre la table 1.

Il arrive parfois d'envisager des intervalles infinis tels que

$$]a, \infty[= \{x \mid x > a\}.$$

Mais cela ne veut pas dire que ∞ (l'infini) est un nombre. La notation $]a, \infty[$ est celle de l'ensemble de tous les nombres qui sont supérieurs à a ; le symbole ∞ ne sert qu'à indiquer que l'intervalle s'étend indéfiniment du côté positif.

La table 1 énumère les neufs types d'intervalles possibles. Il est toujours supposé quand on parle d'intervalle que $a < b$.

1 Table des intervalles

Notation	Description ensembliste	Image	Notation	Description ensembliste	Image
$]a, b[$	$\{x \mid a < x < b\}$		$]a, \infty[$	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$		$[a, \infty[$	$\{x \mid x \geqslant a\}$	
$[a, b[$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$		$]-\infty, b[$	$\{x \mid x < b\}$	
$]a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$		$]-\infty, b]$	$\{x \mid x \leqslant b\}$	
			$]-\infty, \infty[$	$\mathbb{R}$ (ensemble de tous les nombres réels)	

Inégalités

Quand on travaille avec des inégalités, il faut connaître les règles suivantes.

Règles relatives aux inégalités

1. Si $a < b$, alors $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.
3. Si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$.
4. Si $a < b$ et $c < 0$, alors $ac > bc$.
5. Si $0 < a < b$, alors $1/a > 1/b$.

La Règle 1 dit que l'on peut additionner n'importe quel nombre aux deux membres d'une inégalité et la Règle 2, que deux inégalités peuvent être additionnées membre à membre. C'est face à la multiplication qu'il faut être prudent lorsqu'on travaille avec des inégalités : la Règle 3 dit qu'on peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un nombre strictement positif, mais la Règle 4 attire l'attention sur le fait que, quand on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif, il faut changer le sens de l'inégalité. Par exemple, si on multiplie l'inégalité $3 < 5$ par 2, on obtient $6 < 10$, mais si on la multiplie par -2, on obtient $-6 > -10$. Enfin, la Règle 5 dit que si on prend l'inverse de chaque membre, il faut renverser le sens de l'inégalité (à condition que les nombres soient positifs).

EXEMPLE 1 ■ Résolvez l'inégalité $1 + x < 7x + 5$.

SOLUTION L'inégalité donnée est vérifiée par certaines valeurs de x et pas par d'autres. *Résoudre* une inégalité signifie déterminer l'ensemble des nombres x pour lesquels l'inégalité est vraie. Cet ensemble est appelé l'*ensemble solution*.

D'abord, on soustrait 1 à chaque membre de l'inégalité (Règle 1 avec $c = -1$) :

$$x < 7x + 4.$$

Ensuite, on soustrait $7x$ aux deux membres (Règle 1 avec $c = 7x$) :

$$-6x < 4.$$

Maintenant on divise les deux membres par -6 (Règle 4 avec $c = -\frac{1}{6}$) :

$$x > -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Comme toutes ces étapes peuvent être renversées, l'ensemble solution se compose de tous les nombres supérieurs à $-\frac{2}{3}$. En d'autres mots, la solution de l'inégalité est l'intervalle $]-\frac{2}{3}, \infty[$.

EXEMPLE 2 ■ Résolvez l'inégalité $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$.

SOLUTION D'abord on factorise le membre de gauche :

$$(x-2)(x-3) \leqslant 0.$$

On sait que l'équation correspondante $(x-2)(x-3) = 0$ a comme solution $x = 2$ et $x = 3$. Les nombres 2 et 3 divisent la droite réelle en trois intervalles :

$$]-\infty, 2[\qquad]2, 3[\qquad]3, \infty[.$$

On regarde le signe de chaque facteur sur chaque intervalle. Par exemple,

$$x \in]-\infty, 2[\Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0.$$

On regroupe ces signes dans un tableau :

Intervalle	$x-2$	$x-3$	$(x-2)(x-3)$
$x < 2$	$-$	$-$	$+$
$2 < x < 3$	$+$	$-$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$	$+$

L'exemple 2 peut être résolu graphiquement en dessinant ou en faisant dessiner par un outil graphique la parabole $y = x^2 - 5x + 6$ (voyez la figure 3) et en observant que la courbe est sur l'axe Ox ou en dessous de lui quand $2 \leqslant x \leqslant 3$.

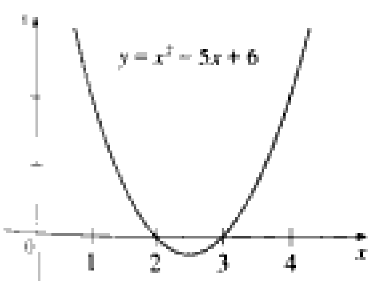


FIGURE 3

Une autre façon d'obtenir les informations consignées dans le tableau est de procéder par *test*. Par exemple, si on choisit la valeur test $x = 1$ dans l'intervalle $]-\infty, 2[$ et qu'on la substitue dans $x^2 - 5x + 6$, cela donne

$$1^2 - 5(1) + 6 = 2.$$

Comme le polynôme ne change pas de signe à l'intérieur de chacun des trois intervalles, on conclut qu'il est positif sur $]-\infty, 2[$.

Vu que, d'après le tableau, $(x-2)(x-3)$ est négatif quand $2 < x < 3$, la solution de l'inégalité $(x-2)(x-3) \leqslant 0$ est

$$\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\} = [2, 3].$$

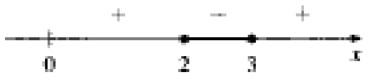


FIGURE 4

Remarquez que les points extrêmes 2 et 3 sont inclus dans la solution parce qu'on cherchait les valeurs de x telles que le produit soit négatif ou nul. La solution est illustrée dans la figure 4.

EXEMPLE 3 ■ Résolvez $x^3 + 3x^2 > 4x$.

SOLUTION On commence par mettre tous les termes non nuls d'un côté du signe d'inégalité et on factorise :

$$x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \qquad \text{ou} \qquad x(x-1)(x+4) > 0.$$

De la même façon qu'à l'exemple 2, on résout l'équation correspondante $x(x-1)(x+4) = 0$ et on se sert des solutions $x = -4$, $x = 0$ et $x = 1$ pour subdiviser la droite réelle en quatre intervalles $]-\infty, -4[$, $]-4, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, \infty[$. Sur chaque intervalle le produit prend un signe qui ne change pas :

Intervalle	x	$x-1$	$x+4$	$x(x-1)(x+4)$
$x < -4$	–	–	–	–
$-4 < x < 0$	–	–	+	+
$0 < x < 1$	+	–	+	–
$x > 1$	+	+	+	+

L'ensemble solution se lit dans le tableau :

$$\{x \mid -4 < x < 0 \text{ ou } x > 1\} =]-4, 0[\cup]1, \infty[.$$

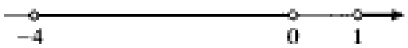


FIGURE 5

La solution est illustrée dans la figure 5.

■ La valeur absolue

La **valeur absolue** d'un nombre a, notée $|a|$, est la distance de a à 0 sur la droite réelle. Comme les distances sont toujours positives ou nulles, on a

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{quel que soit } a.$$

Par exemple,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0$$

$$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3.$$

Rappelez-vous que si a est négatif, alors $-a$ est positif.

Plus généralement, on a

2

$$|a| = a \qquad \text{si } a \geqslant 0$$
$$|a| = -a \qquad \text{si } a < 0$$

EXEMPLE 4 ■ Comment écrire $|3x - 2|$ sans employer le symbole de valeur absolue.

SOLUTION

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } 3x - 2 \geqslant 0 \\ -(3x - 2) & \text{si } 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \geqslant \frac{2}{3} \\ 2 - 3x & \text{si } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Rappelez-vous que le symbole $\sqrt{\ }$ signifie « la racine carrée positive de ». Donc, $\sqrt{r} = s$ signifie $s^2 = r$ et $s \geqslant 0$. De ce fait, l'équation $\sqrt{a^2} = a$ n'est pas toujours vraie. Elle n'est vraie que si $a \geqslant 0$. Si $a < 0$, alors $-a > 0$ et donc $\sqrt{a^2} = -a$. Eu égard à (2), l'équation suivante est vraie pour toute valeur de a.

3

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Quelques exercices donnent des indications pour démontrer les propriétés que voici.

Propriétés des valeurs absolues On suppose que a et b sont des nombres réels et que n est un entier. Alors

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \qquad (b \neq 0)$
3. $|a^n| = |a|^n$

Pour résoudre des équations ou des inéquations qui contiennent des valeurs absolues, il est souvent utile de faire appel aux énoncés suivants.

On suppose $a > 0$. Alors

4. $|x| = a$ si et seulement si $x = \pm a$
5. $|x| < a$ si et seulement si $-a < x < a$
6. $|x| > a$ si et seulement si $x > a$ ou $x < -a$.

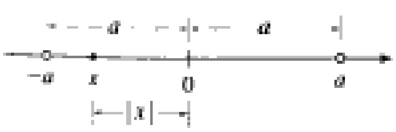


FIGURE 6

Par exemple, l'inégalité $|x| < a$ dit que la distance qui sépare x de l'origine est inférieure à a et vous pouvez voir sur la figure 6 que c'est vrai si et seulement si x est compris entre $-a$ et a.

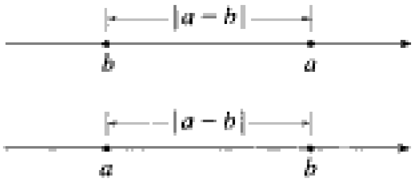


FIGURE 7
Longueur d'un segment $= |a-b|$

Si a et b sont des nombres réels quelconques, la distance entre a et b est la valeur absolue de la différence, à savoir $|a-b|$, qui est aussi égale à $|b-a|$ (voyez la figure 7).

EXEMPLE 5 ■ Résolvez $|2x-5| = 3$.

SOLUTION En vertu de la Propriété 4 des valeurs absolues, $|2x-5| = 3$ est équivalent à

$$2x-5=3 \qquad \text{ou} \qquad 2x-5=-3.$$

Aussi, $2x = 8$ ou $2x = 2$. D'où $x = 4$ ou $x = 1$.

EXEMPLE 6 ■ Résolvez $|x-5| < 2$.

SOLUTION 1 En vertu de la Propriété 5 des valeurs absolues, $|x-5| < 2$ est équivalent à

$$-2 < x-5 < 2.$$

D'où, en additionnant 5 de part et d'autre, on trouve

$$3 < x < 7.$$

La solution est l'intervalle ouvert $]3, 7[$.

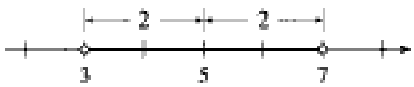


FIGURE 8

SOLUTION 2 D'un point de vue géométrique, l'ensemble solution comporte tous les points x dont la distance vis-à-vis du point 5 est inférieure à 2 unités. On voit sur la figure 8 qu'il s'agit de l'intervalle $]3, 7[$.

EXEMPLE 7 ■ Résolvez $|3x+2| \geqslant 4$.

SOLUTION Eu égard aux Propriétés 4 et 6, $|3x+2| \geqslant 4$ est équivalent à

$$3x+2 \geqslant 4 \qquad \text{ou} \qquad 3x+2 \leqslant -4.$$

Dans le premier cas, $3x \geqslant 2$ ou $x \geqslant \frac{2}{3}$. Dans le second cas, $3x \leqslant -6$, qui donne $x \leqslant -2$. La solution est donc

$$\left\{x \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant \tfrac{2}{3}\right\} = \left]-\infty, -2\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, \infty\right[.$$

A Exercices

1-10 ■ Écrivez l'expression sans le symbole de valeur absolue.

1. $|5-23|$

2. $|\pi-2|$

3. $|\sqrt{5}-5|$

4. $\big||-2|-|-3|\big|$

5. $|x-2|$ si $x < 2$

6. $|x-2|$ si $x > 2$

7. $|x+1|$

8. $|2x-1|$

9. $|x^2+1|$

10. $|1-2x^2|$

11-26 ■ Résolvez l'inéquation en termes d'intervalles et illustrez l'ensemble solution sur un axe réel.

11. $2x+7 > 3$

12. $4-3x \geqslant 6$

13. $1-x \leqslant 2$

14. $1+5x > 5-3x$

15. $0 \leqslant 1-x < 1$

16. $1 < 3x+4 \leqslant 16$

17. $(x-1)(x-2) > 0$

18. $x^2 < 2x+8$

19. $x^2 < 3$

20. $x^2 \geqslant 5$

21. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

22. $(x+1)(x-2)(x+3) \geqslant 0$

23. $x^3 > x$

24. $x^3 + 3x < 4x^2$

25. $\dfrac{1}{x} < 4$

26. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

27. La relation entre les échelles de température Celsius et Fahrenheit est donnée par $C = \frac{5}{9}(F-32)$, où C est la température en degrés Celsius et F la température en degrés Fahrenheit. Sur quel intervalle de l'échelle Celsius se trouvent les températures qui, en degrés Fahrenheit, satisfont à $50 \leqslant F \leqslant 95$?

28. Servez-vous de la relation entre C et F donnée à l'exercice 27 pour déterminer l'intervalle sur l'échelle Fahrenheit qui correspond aux températures Celsius $20 \leqslant C \leqslant 30$.

29. Lorsque de l'air sec monte, il se dilate et de ce fait refroidit à une vitesse de 1°C par 100 m, jusqu'à 12 km environ.
   a) Si la température au sol est 20°C, écrivez une formule de la température à l'altitude h.
   b) Quelle plage de température traverse un avion qui décolle et atteint une altitude maximale de 5 km ?

30. Lorsqu'une balle est jetée en l'air du haut d'un immeuble de 40 m de haut avec une vitesse initiale de 5 m/s, sa hauteur h au-dessus du sol après t secondes est donnée par

$$h = 40 + 5t - 5t^2$$

Pendant combien de temps la balle sera-t-elle à plus de 10 m du sol ?

31-32 ■ Résolvez l'équation en x.

31. $|x + 3| = |2x + 1|$

32. $|3x + 5| = 1$

33-40 ■ Résolvez l'inéquation.

33. $|x| < 3$

34. $|x| \geqslant 3$

35. $|x - 4| < 1$

36. $|x - 6| < 0{,}1$

37. $|x + 5| \geqslant 2$

38. $|x + 1| \geqslant 3$

39. $|2x - 3| \leqslant 0{,}4$

40. $|5x - 2| < 6$

41. Résolvez par rapport à x l'inéquation $a(bx - c) \geqslant bc$ en supposant que a, b et c sont des constantes positives.

42. Résolvez par rapport à x l'inéquation $ax + b < c$ en supposant que a, b et c sont des constantes négatives.

43. Démontrez que $|ab| = |a||b|$. [*Suggestion :* Utilisez l'équation 3.]

44. Démontrez que si $0 < a < b$, alors $a^2 < b^2$.

B Géométrie analytique

Les points du plan sont identifiés par des couples de nombres réels. On commence par dessiner deux droites de coordonnées perpendiculaires qui se coupent à l'origine O de chaque droite. Habituellement, l'une des droites est horizontale et son sens positif est dirigé vers la droite, c'est l'axe Ox tandis que l'autre droite est verticale dirigée positivement vers le haut, c'est l'axe Oy.

N'importe quel point peut être localisé par un seul couple de nombres réels comme suit. Abaisser depuis P les perpendiculaires aux axes Ox et Oy. Ces droites coupent les axes aux points de coordonnées a et b, comme on peut le lire sur la figure 1. Au point P est associé le couple (a, b). Le premier nombre a s'appelle l'**abscisse** de P ; le second nombre b s'appelle l'**ordonnée** de P. On dit que P est un point de coordonnées (a, b) et on note le point par le symbole $P(a, b)$. La figure 2 montre plusieurs points étiquetés par leurs coordonnées.

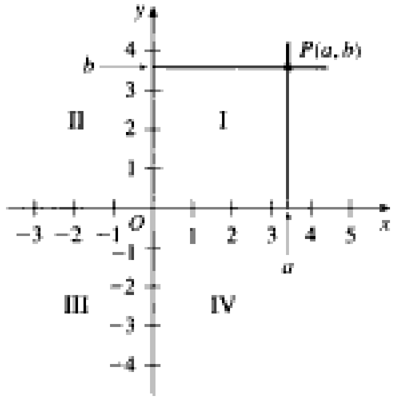


FIGURE 1

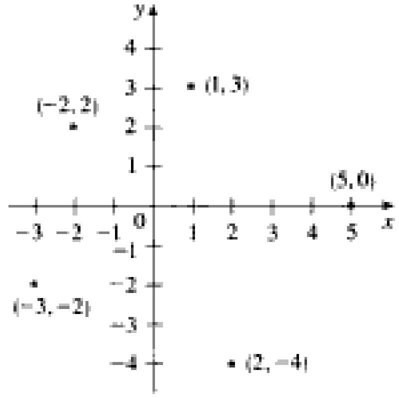


FIGURE 2

En inversant la construction précédente, on peut, au départ d'un couple (a, b), arriver au point P correspondant. Il est fréquent d'identifier le point P par son couple (a, b) et de parler « du point (a, b) ».

Ce système de coordonnées est appelé **système de coordonnées rectangulaires**, ou **système d'axes cartésiens** en l'honneur du mathématicien français René Descartes (1596-1650), même si un autre français Pierre de Fermat (1601-1665) inventa les principes de la géométrie analytique à peu près à la même époque que Descartes. Lorsqu'il est muni de ce système de coordonnées, le plan est appelé **plan de coordonnées**, ou **plan cartésien** et est noté $\mathbb{R}^2$.

Les axes Ox et Oy sont les **axes de coordonnées** et ils divisent le plan cartésien en quatre quadrants, étiquetés I, II, III, IV dans la figure 1. Remarquez que les points du premier quadrant ont leurs deux coordonnées x et y positives.

EXEMPLE 1 ■ Décrivez et coloriez les régions définies par les ensembles suivants.

a) $\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

SOLUTION

a) Les points dont l'abscisse est nulle ou positive se trouvent sur l'axe Oy ou à droite de celui-ci, comme le montre la région ombrée de la figure 3(a).

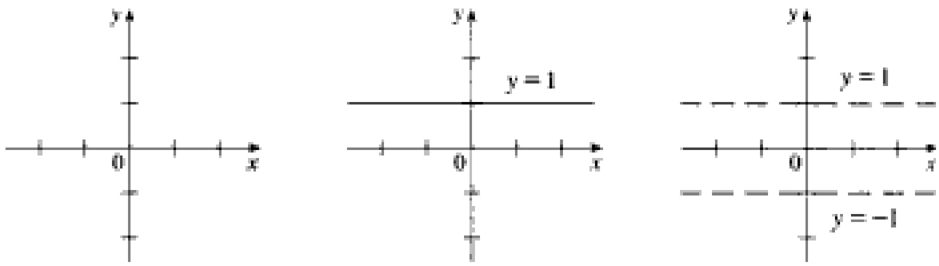


FIGURE 3 (a) $x \geqslant 0$ (b) $y = 1$ (c) $|y| < 1$

b) L'ensemble de tous les points dont l'ordonnée est 1 est la droite horizontale située une unité au-dessus de l'axe Ox [voyez la figure 3(b)].

c) Rappelez-vous qu'à l'annexe A il a été dit que

$$|y| < 1 \quad \text{si et seulement si} \quad -1 < y < 1.$$

La région ainsi définie se compose de tous les points du plan dont l'ordonnée y est comprise entre -1 et 1. Par conséquent, la région est comprise entre (mais pas sur) les droites horizontales $y = 1$ et $y = -1$. (Ces droites sont dessinées en traits interrompus dans la figure 3(c) pour bien marquer qu'elles ne font pas partie de l'ensemble.)

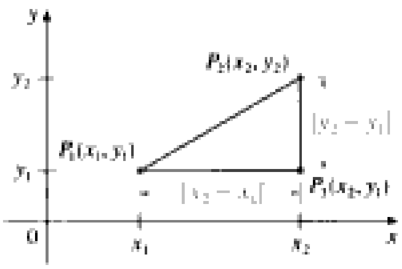


FIGURE 4

Il a été vu dans l'annexe A que la distance entre des points a et b sur un axe est $|a - b| = |b - a|$. C'est ainsi que la distance entre les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_3(x_2, y_1)$ sur une horizontale mesure $|x_2 - x_1|$ et la distance entre $P_2(x_2, y_2)$ et $P_3(x_2, y_1)$ sur une verticale, $|y_2 - y_1|$ (voyez la figure 4).

Pour mesurer la distance $|P_1P_2|$ entre deux points quelconques $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$, on remarque que le triangle $P_1P_2P_3$ de la figure 4 est rectangle et qu'en appliquant dès lors le Théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{|P_1P_3|^2 + |P_2P_3|^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Formule de la distance La distance entre les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ est égale à

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Par exemple, la distance entre les points $(1, -2)$ et $(5, 3)$ est

$$\sqrt{(5-1)^2 + [3-(-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}.$$

■ Les cercles

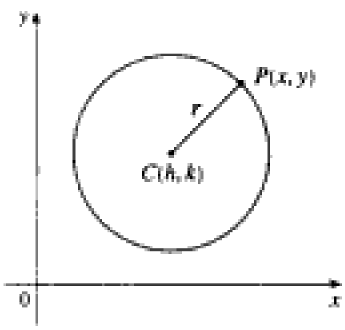


FIGURE 5

Une **équation d'une courbe** est une équation satisfaite par les coordonnées des points de la courbe à l'exclusion de tout autre. Exploitons la formule de la distance pour déterminer l'équation d'un cercle de rayon r centré au point (h, k). Par définition, le cercle est l'ensemble de tous les points $P(x, y)$ dont la distance au centre $C(h, k)$ est r (voyez la figure 5). Dès lors, P appartient au cercle si et seulement si $|PC| = r$. Avec la formule de la distance, cela s'écrit

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r,$$

ou, de façon équivalente, en élevant au carré les deux membres,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

C'est l'équation recherchée.

Équation d'un cercle Une équation du cercle de centre (h, k) et de rayon r est

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

En particulier, si le centre est l'origine $O(0, 0)$, l'équation devient

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Par exemple, le cercle de rayon 3 et de centre $(2, -5)$ a pour équation

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9.$$

EXEMPLE 2 ■ Faites le graphique de l'équation $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ en montrant d'abord qu'il s'agit d'un cercle et en déterminant alors le centre et le rayon.

SOLUTION On commence par regrouper les termes en x et les termes en y comme suit

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 6y) = -7.$$

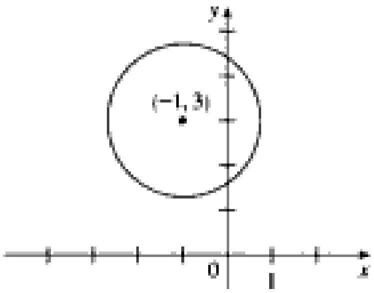


FIGURE 6
$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$

Ensuite, on complète le carré dans chaque groupe en ajoutant les constantes appropriées (le carré de la moitié du coefficient de x et de y) aux deux membres de l'équation :

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9,$$

ou

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3.$$

Par comparaison avec l'équation standard du cercle, on voit que $h = -1$, $k = 3$ et $r = \sqrt{3}$. L'équation donnée est donc celle d'un cercle centré en $(-1, 3)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Il est représenté dans la figure 6.

■ Les droites

Pour déterminer l'équation d'une droite d on se sert de sa *pente*, qui est une mesure de la raideur de la droite.

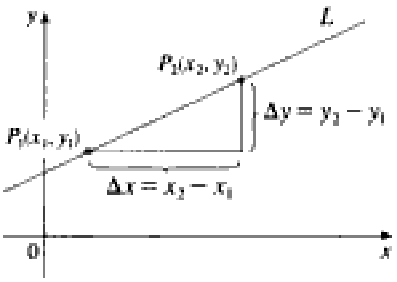


FIGURE 7

Définition La **pente** d'une droite non verticale qui passe par les points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ est

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

La pente d'une droite verticale n'est pas définie.

La pente d'une droite est donc le rapport entre la variation de y, Δy, et celle de x, Δx (voyez la figure 7). Par conséquent, la pente est le taux de variation de y par rapport à x. Le fait que la ligne est droite signifie que ce taux de variation est constant.

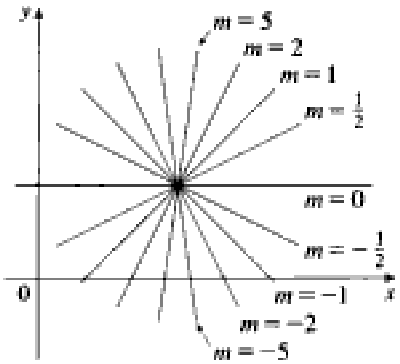


FIGURE 8

La figure 8 exhibe quelques droites marquées de leur pente. Celles dont la pente est positive sont inclinées vers le haut à droite tandis que celles dont la pente est négative penchent vers le bas à droite. Les plus raides sont celles dont la pente, en valeur absolue, est la plus grande et la droite horizontale a une pente nulle.

Cherchons maintenant une équation d'une droite qui passe par un point $P_1(x_1, y_1)$ donné et de pente m. Un autre point $P(x, y)$ $(x \neq x_1)$ se trouve sur cette droite si et seulement si la pente de la droite qui passe par P et P_1 est égale à m ; c'est-à-dire

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Cette équation peut encore être écrite sous la forme

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

et on remarque qu'elle est vérifiée par $x = x_1$ et $y = y_1$. C'est donc bien une équation de la droite recherchée.

Forme point-pente de l'équation d'une droite Une équation de la droite qui passe par le point $P_1(x_1, y_1)$ et de pente m est

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

EXEMPLE 3 ■ Écrivez une équation de la droite qui passe par les points $(-1, 2)$ et $(3, -4)$.

SOLUTION La pente de la droite est

$$m = \frac{-4-2}{3-(-1)} = -\frac{3}{2}.$$

Avec $x_1 = -1$ et $y_1 = 2$, la forme point-pente donne

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x+1),$$

qui peut encore être écrite

$$3x + 2y = 1.$$

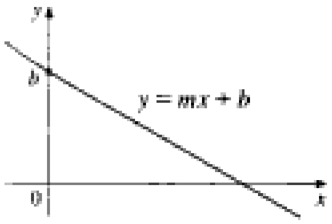


FIGURE 9

La figure 9 montre une droite non verticale de pente m et d'ordonnée à l'origine b. Cela signifie que la droite rencontre l'axe Oy au point $(0, b)$. Avec $x_1 = 0$ et $y_1 = b$, la forme point-pente fournit une équation

$$y - b = m(x - 0),$$

qui se simplifie comme suit.

Forme pente-ordonnée à l'origine de l'équation d'une droite Une équation de la droite de pente m et d'ordonnée à l'origine b est

$$y = mx + b.$$

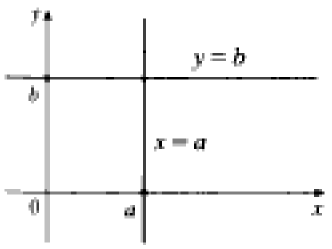


FIGURE 10

En particulier, si une droite est horizontale, sa pente est $m = 0$ et son équation se réduit à $y = b$, où b est l'ordonnée à l'origine (voyez la figure 10). Une droite verticale n'a pas de pente, mais son équation est $x = a$, où a est le point où elle coupe l'axe Ox, parce que tous ses points ont comme abscisse a.

Dire que y est une **fonction affine** de x signifie que la représentation graphique de cette fonction est une droite de sorte que l'on peut utiliser la forme pente-ordonnée à l'origine pour écrire une formule telle que

$$y = f(x) = mx + b.$$

EXEMPLE 4 ■

a) Lorsque de l'air sec s'élève, il se dilate et refroidit. Si la température au sol est de 20°C et la température à 1 km, de 10°C, cherchez une expression de la température T (en °C) en fonction de la hauteur h (en km), sous l'hypothèse qu'il s'agit d'une fonction affine.

b) Dessinez le graphique de la partie a). Que représente la pente ?

c) Quelle est la température à 2,5 km d'altitude ?

SOLUTION

a) Puisque, par hypothèse, T est une fonction affine de h, on peut écrire

$$T = mh + b.$$

Or, $T = 20$ quand $h = 0$. Donc,

$$20 = m \cdot 0 + b = b.$$

Autrement dit, l'ordonnée à l'origine est $b = 20$.

On sait aussi que $T = 10$ quand $h = 1$. D'où

$$10 = m \cdot 1 + 20.$$

La pente de la droite est $m = 10 - 20 = -10$. La fonction affine demandée est

$$T = -10h + 20.$$

b) La droite est dessinée dans la figure 11. La pente est $m = -10$°C/km et rend compte de la vitesse de variation de la température par rapport à la hauteur.

c) À l'altitude $h = 2{,}5$ km, la température est de

$$T = -10(2{,}5) + 20 = -5\text{°C}.$$

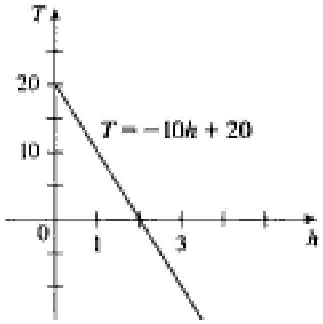


FIGURE 11

EXEMPLE 5 ■ Représentez graphiquement la solution de l'inéquation $x + 2y > 5$.

SOLUTION Il est demandé de marquer l'ensemble $\{(x, y) \mid x + 2y > 5\}$. On commence par résoudre l'inégalité par rapport à y :

$$x + 2y > 5$$

$$2y > -x + 5$$

$$y > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

On associe à cette inéquation l'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, qui est celle d'une droite de pente $-\frac{1}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{5}{2}$. La région à ombrer se compose des points dont l'ordonnée est *supérieure* à celle des points de la droite $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. La région décrite est celle qui est située *au-dessus* de la droite, comme illustré dans la figure 12.

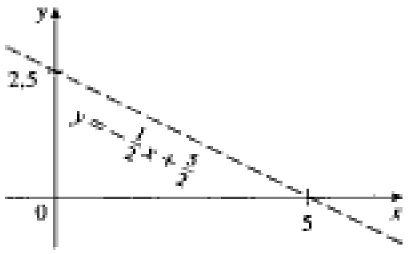


FIGURE 12

■ Droites parallèles et droites perpendiculaires

Que des droites soient parallèles ou perpendiculaires dépend de leur pente. Dans des livres moins avancés préparatoires au calcul différentiel et intégral, on démontre les résultats suivants.

Droites parallèles et perpendiculaires

1. Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

2. Deux droites non parallèles aux axes de pente m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 m_2 = -1$, c'est-à-dire si une pente est l'opposé de l'inverse de l'autre :

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

EXEMPLE 6 ■ Déterminez une équation de la droite parallèle à la droite $4x + 6y + 5 = 0$ passant par le point $(5, 2)$.

SOLUTION Quand on écrit l'équation donnée sous la forme pente-ordonnée à l'origine

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6},$$

on voit que sa pente est $m = -\frac{2}{3}$. La pente de la droite cherchée est aussi $-\frac{2}{3}$, puisqu'elle est parallèle à la droite donnée. La forme point-pente permet d'écrire

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5).$$

C'est l'équation cherchée qui s'écrit encore $2x + 3y = 16$.

EXEMPLE 7 ■ Démontrez la perpendicularité des droites $2x + 3y = 1$ et $6x - 4y - 1 = 0$.

SOLUTION Écrites sous la forme

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4},$$

les équations dévoilent les pentes respectives

$$m_1 = -\frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad m_2 = \frac{3}{2}.$$

Comme $m_1 m_2 = -1$, les droites sont bien perpendiculaires.

■ Les sections coniques

Ici nous passons en revue les définitions géométriques des paraboles, des ellipses et des hyperboles et leurs équations standard. Ces courbes portent le nom de **coniques** parce qu'elles sont les diverses intersections possibles d'un cône par un plan, comme le montre la figure 13.

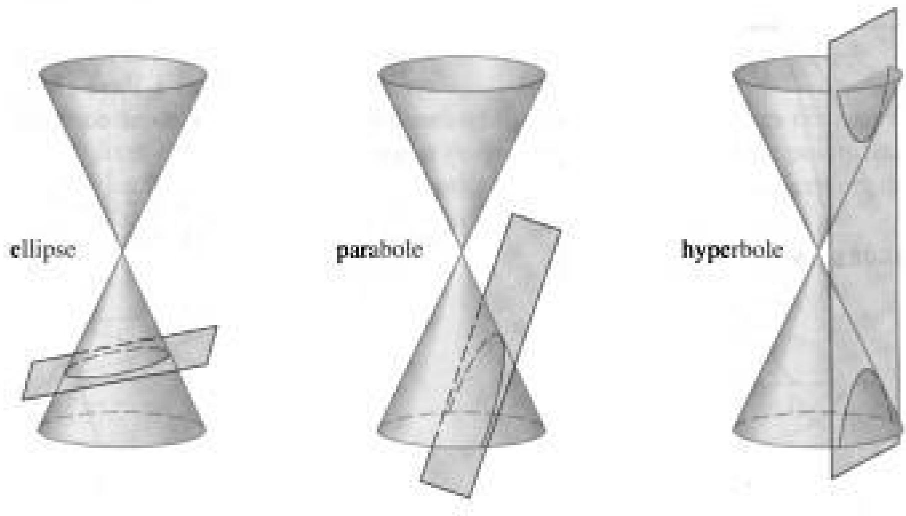


FIGURE 13
Les coniques

■ Les paraboles

Une **parabole** est l'ensemble des points du plan qui sont équidistants d'un point fixe F (appelé **foyer**) et d'une droite fixe (appelée **directrice**). Le dessin de la figure 14

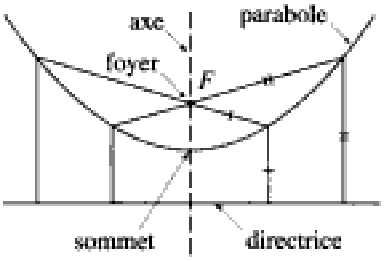


FIGURE 14

illustre cette définition. En particulier, le point qui se trouve à mi-chemin entre le foyer et la directrice appartient à la parabole ; c'est le **sommet**. La droite qui passe par le foyer et qui est perpendiculaire à la directrice s'appelle l'**axe** de la parabole.

Au 16[e] siècle Galilée a découvert que la trajectoire suivie par un projectile tiré dans l'air sous un certain angle à partir du sol était une parabole. Depuis lors, les formes paraboliques sont exploitées dans les phares des voitures, les télescopes et les ponts suspendus. (Voyez le problème 14 à la page 265 à propos de la propriété de réflexion des paraboles qui les rend si attrayantes).

L'équation de la parabole est particulièrement simple si on place son sommet à l'origine et sa directrice parallèle à l'axe Ox, comme dans la figure 15. Si le foyer occupe le point $(0, p)$, alors l'équation de la directrice est $y = -p$ et celle de la parabole

$$x^2 = 4py.$$

(Voyez l'exercice 53.)

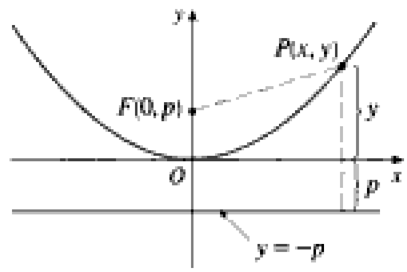


FIGURE 15

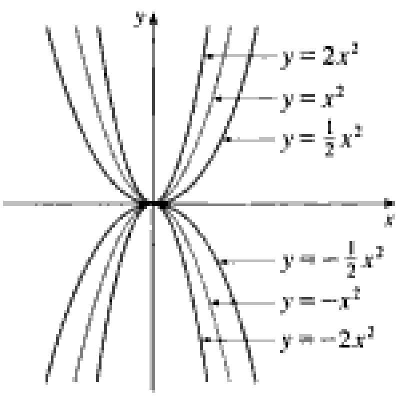


FIGURE 16

Si on pose $a = 1/(4p)$, alors l'équation de la parabole devient

$$\boxed{y = ax^2}$$

La figure 16 expose les graphiques de plusieurs paraboles d'équation $y = ax^2$, pour différentes valeurs de a. On remarque que la parabole est ouverte vers le haut lorsque $a > 0$ et vers le bas lorsque $a < 0$ (comme dans la figure 17). La courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy parce que son équation est inchangée lorsqu'on remplace x par $-x$. Ce qui correspond au fait que la fonction $f(x) = ax^2$ est une fonction paire.

Si on échange x et y dans l'équation $y = ax^2$, il vient $x = ay^2$, qui représente aussi une parabole. (Échanger x et y revient à opérer une réflexion autour de la

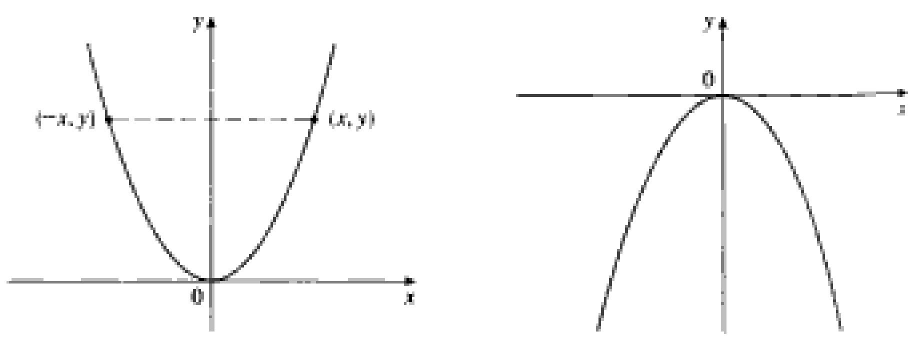


FIGURE 17 (a) $y = ax^2$, $a > 0$ (b) $y = ax^2$, $a < 0$

diagonale $y = x$.) La parabole $x = ay^2$ est alors ouverte vers la droite quand $a > 0$ et vers la gauche quand $a < 0$ (voyez la figure 18). Dans ce cas-ci, la parabole est symétrique par rapport à l'axe Ox parce que l'équation est inchangée quand on remplace y par $-y$.

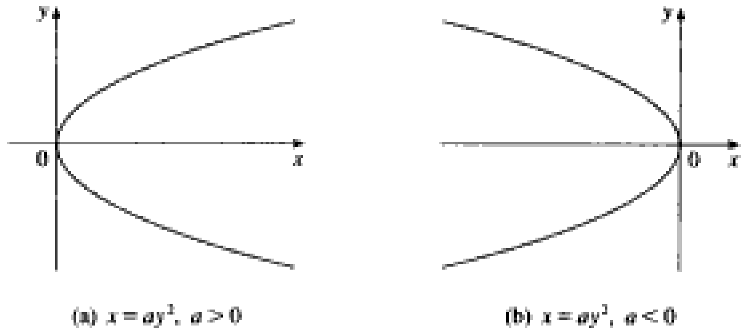


FIGURE 18

EXEMPLE 8 ■ Ombrez la région délimitée par la parabole $x = 1 - y^2$ et la droite $x + y + 1 = 0$.

SOLUTION Il faut d'abord chercher les points d'intersection en résolvant les deux équations. On substitue $x = -y - 1$ dans l'équation $x = 1 - y^2$; il vient $-y - 1 = 1 - y^2$, ou encore

$$0 = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1).$$

D'où, $y = 2$ ou $y = -1$. Les points d'intersection sont $(-3, 2)$ et $(0, -1)$. On tire donc la droite qui passe par ces points.

Pour obtenir la parabole $x = 1 - y^2$, on part d'abord de la parabole $x = -y^2$ dans la figure 18(b) et on la translate d'une unité vers la droite. On s'assure qu'elle passe bien par les points $(-3, 2)$ et $(0, -1)$. La région délimitée par $x = 1 - y^2$ et $x + y + 1 = 0$ est la partie du plan qui accepte ces courbes comme frontière. Elle est dessinée dans la figure 19.

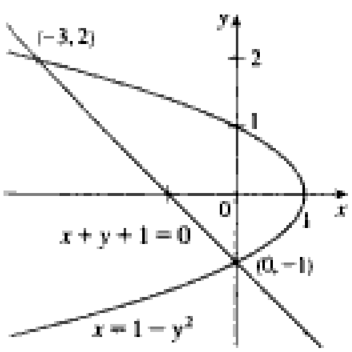


FIGURE 19

■ Les ellipses

Une **ellipse** est l'ensemble des points du plan tels que la somme de leurs distances à deux points fixes F_1 et F_2 est une constante (voyez la figure 20). Ces deux points fixes sont appelés les **foyers**. Une des lois de Kepler énonce que les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

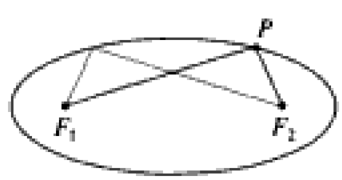


FIGURE 20

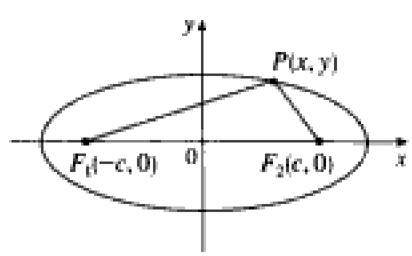


FIGURE 21

Afin d'obtenir l'équation la plus simple d'une ellipse, on place les foyers sur l'axe Ox aux points $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, comme dans la figure 21 de sorte que l'origine est

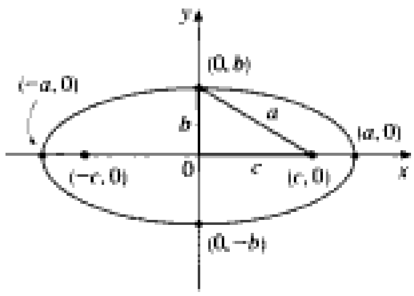


FIGURE 22
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

à mi-chemin entre les foyers. Si $2a$ désigne la somme constante des distances d'un point de l'ellipse aux foyers, alors l'équation de l'ellipse s'écrit

1
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

où $c^2 = a^2 - b^2$. (Voyez l'exercice 55 et la figure 22.) Remarquez que l'ellipse rencontre l'axe Ox en $\pm a$, l'axe Oy en $\pm b$ et les foyers sont en $(\pm c, 0)$. L'ellipse est symétrique par rapport aux deux axes. Échanger x et y dans l'équation revient à envoyer les foyers sur l'axe Oy en $(0, \pm c)$.

EXEMPLE 9 ■ Tracez le graphique de $9x^2 + 16y^2 = 144$ et localisez les foyers.

SOLUTION On divise les deux membres par 144 :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

L'équation apparait maintenant sous la forme standard pour une ellipse : $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ et $b = 3$. Les intersections avec l'axe Ox se produisent en ± 4 et avec l'axe Oy en ± 3. Aussi, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, ou $c = \sqrt{7}$. Les foyers sont en $(\pm\sqrt{7}, 0)$. Le graphique est celui de la figure 23.

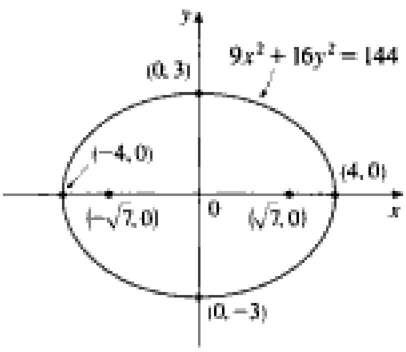


FIGURE 23

Tout comme les paraboles, les ellipses ont une intéressante propriété de réflexion qui a des conséquences pratiques. Si on place une source de lumière ou une source sonore en un des foyers d'une surface de section elliptique, toute la lumière ou le son est réfléchi vers l'autre foyer (voyez l'exercice 61). Ce principe est utilisé en lithotripsie, un traitement des calculs rénaux. Un réflecteur de section elliptique est placé de manière à ce que le calcul occupe l'un des foyers. Des ondes de haute intensité générées en l'autre foyer sont réfléchies sur le calcul et le détruise sans endommager les tissus environnants. Le patient épargne le traumatisme d'une opération chirurgicale et se retrouve sur pied en quelques jours.

■ Les hyperboles

Une **hyperbole** est l'ensemble des points du plan tels que la différence de leurs distances à deux points fixes F_1 et F_2 (les foyers) est une constante. La définition est illustrée à la figure 24.

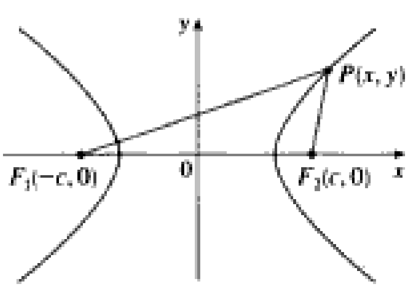


FIGURE 24
P est sur l'hyperbole quand $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$

Remarquez que la définition d'une hyperbole est semblable à celle d'une ellipse à la seule différence que le mot somme des distances est remplacé par différence des distances. Il est laissé dans l'exercice 57 le soin de déduire que quand les foyers sont sur l'axe Ox en $(\pm c, 0)$ et quand $2a$ désigne la valeur absolue de la différence des distances $|PF_1| - |PF_2|$, alors l'équation de l'hyperbole est

2
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

où $c^2 = a^2 + b^2$. Remarquez que les intersections avec l'axe Ox sont à nouveau $\pm a$ tandis que si on pose $x = 0$ dans l'équation 2, on arrive à $y^2 = -b^2$, qui est une équation impossible. De ce fait, l'hyperbole n'a pas d'intersection avec l'axe Oy. L'hyperbole est symétrique par rapport aux deux axes.

Afin de pousser plus loin l'étude de l'hyperbole, on reprend l'équation 2 et on l'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1.$$

Ceci montre que $x^2 \geqslant a^2$ ou $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Par conséquent, on a $x \geqslant a$ ou $x \leqslant -a$. Et de ce fait, l'hyperbole est en deux morceaux, appelées ses *branches*.

Pour dessiner une hyperbole, il est avantageux de dessiner d'abord ses *asymptotes* qui sont les droites $y = (b/a)x$ et $y = -(b/a)x$ que montre la figure 25. Les deux branches de l'hyperbole approchent les asymptotes ; c'est-à-dire qu'elles deviennent arbitrairement proches des asymptotes. Si les foyers d'une hyperbole se trouvent sur l'axe Oy, son équation s'obtient en échangeant les rôles de x et y.

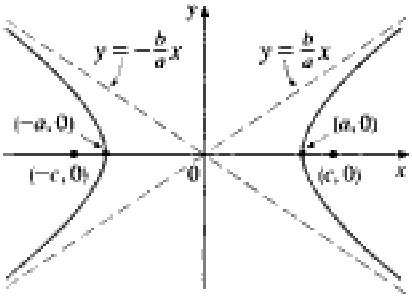


FIGURE 25
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

EXEMPLE 10 ■ Déterminez les foyers et les asymptotes de l'hyperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ et dessinez-la.

SOLUTION On divise les deux membres de l'équation par 144 :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

On reconnaît la forme donnée dans (2) avec $a = 4$ et $b = 3$. Comme $c^2 = 16 + 9 = 25$, les foyers sont en $(\pm 5, 0)$. Les asymptotes sont les droites $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$. La figure 26 montre cette hyperbole.

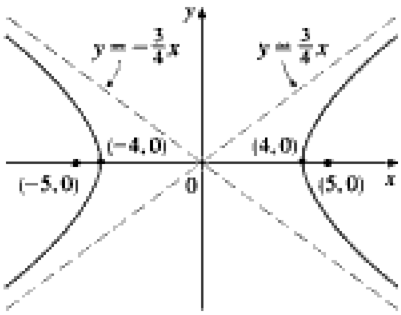


FIGURE 26
$9x^2 - 16y^2 = 144$

B Exercices

1-2 ■ Calculez la distance entre les points donnés.

1. $(1, 1)$, $(4, 5)$ **2.** $(1, -3)$, $(5, 7)$

3-4 ■ Calculez la pente de la droite passant par P et Q.

3. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$ **4.** $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

5. Montrez que les points $(-2, 9)$, $(4, 6)$, $(1, 0)$ et $(-5, 3)$ sont les sommets d'un carré.

6. a) Montrez que les points $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ et $C(5, 15)$ sont colinéaires par le biais de l'égalité $|AB| + |BC| = |AC|$.
b) Montrez le même résultat à l'aide des pentes.

7-10 ■ Donnez une représentation graphique de l'équation.

7. $x = 3$ **8.** $y = -2$

9. $xy = 0$ **10.** $|y| = 1$

11-24 ■ Écrivez une équation de la droite qui vérifie les conditions données.

11. Passe par $(2, -3)$, pente 6.

12. Passe par $(-3, -5)$, pente $-\frac{7}{2}$.

13. Passe par $(2, 1)$ et $(1, 6)$.

14. Passe par $(-1, -2)$ et $(4, 3)$.

15. Pente 3, ordonnée à l'origine -2.

16. Pente $\frac{2}{5}$, ordonnée à l'origine 4.

17. Intersection avec Ox en 1 et avec Oy en -3.

18. Intersection avec Ox en -8 et avec Oy en 6.

19. Passe par $(4, 5)$, parallèle à l'axe Ox.

20. Passe par $(4, 5)$, parallèle à l'axe Oy.

21. Passe par $(1, -6)$, parallèle à la droite $x + 2y = 6$.

22. Ordonnée à l'origine 6, parallèle à la droite $2x + 3y + 4 = 0$.

23. Passe par $(-1, -2)$, perpendiculaire à la droite $2x + 5y + 8 = 0$.

24. Passe par $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$, perpendiculaire à la droite $4x - 8y = 1$.

25-28 ■ Déterminez la pente et l'intersection avec Oy de la droite et dessinez-la.

25. $x + 3y = 0$

26. $2x - 3y + 6 = 0$

27. $3x - 4y = 12$

28. $4x + 5y = 10$

29-36 ■ Ombrez la région décrite du plan Oxy.

29. $\{(x, y) \mid x < 0\}$

30. $\{(x, y) \mid x \geq 1 \text{ et } y < 3\}$

31. $\{(x, y) \mid |x| \leq 2\}$

32. $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ et } |y| < 2\}$

33. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4 \text{ et } x \leq 2\}$

34. $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

35. $\{(x, y) \mid 1 + x \leq y \leq 1 - 2x\}$

36. $\{(x, y) \mid -x \leq y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

37-38 ■ Déterminez une équation du cercle qui satisfait aux conditions données.

37. Centre $(3, -1)$; rayon 5.

38. Centre $(-1, 5)$; passe par $(-4, -6)$.

39-40 ■ Montrez que l'équation est celle d'un cercle et déterminez le centre et le rayon.

39. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

40. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

41. Démontrez que les droites $2x - y = 4$ et $6x - 2y = 10$ ne sont pas parallèles et déterminez leur point d'intersection.

42. Montrez que les droites $3x - 5y + 19 = 0$ et $10x + 6y - 50 = 0$ sont perpendiculaires et déterminez leur point d'intersection.

43. a) Démontrez que les coorodonnées du point milieu du segment d'extrémités $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ sont

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

b) Déterminez les coordonnées du centre du segment qui joint les points $(1, 3)$ et $(7, 15)$.

44. Déterminez une équation de la médiatrice du segment qui joint les points $A(1, 4)$ et $B(7, -2)$.

45. a) Montrez que si une droite coupe les axes ailleurs qu'à l'origine, plus précisément l'axe Ox en a et l'axe Oy en b, alors son équation peut prendre la forme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Cette équation porte le nom de **équation en fonction de ses coordonnées à l'origine**.

b) Écrivez, à l'aide de la partie a), une équation de la droite qui coupe l'axe Ox en 6 et l'axe Oy en -8.

46. L'organisateur d'un marché aux puces sait par expérience que s'il demande x euros pour la location d'un emplacement, le nombre d'emplacements qu'il louera sera $y = 200 - 4x$.

a) Dessinez le graphique de cette équation affine (ayez présent à l'esprit que ni le montant de la location ni le nombre d'emplacements ne peuvent être négatifs).

b) Que représente la pente, l'intersection avec l'axe Oy et l'intersection avec l'axe Ox ?

47. Les échelles de température Celsius (C) et Fahrenheit (F) sont liées par la relation affine $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Dessinez un graphique de cette fonction.

b) Quelle est la pente du graphique et que représente-t-elle ? Où se produit l'intersection avec l'axe OF et quelle est la signification de ce nombre ?

48. Francesca et Claudia quittent Milan à 14 H et roulent à vitesse constante vers l'ouest. Elles passent la borne 65 km à 14 H 50.

a) Exprimez la distance parcourue en fonction du temps écoulé.

b) Dessinez le graphique de l'équation de la partie a).

c) Que vaut la pente de cette droite ? Que représente-t-elle ?

49. Les biologistes ont observé que le rythme auquel les grillons d'une certaine espèce chantent est lié à la température et que la relation semble être à peu près affine. Un grillon produit 120 chants par minute à 21°C et 168 chants par minute à 26°C

a) Déterminez une équation affine qui modélise la température T en fonction du nombre N de chants par minute des grillons.

b) Quelle est la pente de ce graphique ? Que signifie-t-elle ?

c) Si les grillons chantent 150 fois par minute, quelle température fait-il ?

50. Le chef d'atelier d'une manufacture de chaises sait que le coût de fabrication de 100 chaises par jour est de 2200 euros et de 300 chaises par jour de 4800 euros.

a) Exprimez le coût comme une fonction du nombre de chaises fabriquées, sous l'hypothèse que cette relation est affine. Dessinez son graphique.

b) Quelle est la pente du graphique et que représente-t-elle ?

c) Où se produit l'intersection avec l'axe Oy et que représente-t-elle ?

51. La pression de l'eau à la surface est la même que la pression de l'air au-dessus de l'eau, à savoir $103{,}425 \times 10^3$ Pa. Sous l'eau, la pression augmente avec la profondeur, à raison de 30×10^3 Pa tous les 9 m.

a) Exprimez la pression de l'eau en fonction de la profondeur sous la surface de l'océan.

b) À quelle profondeur la pression est-elle de 7×10^3 Pa ?

52. Les dépenses mensuelles dues à une voiture dépendent du nombre de km parcourus. Line constate qu'en mai, elle a dépensé 380 euros pour 770 km et qu'en juin, elle a dépensé 460 euros pour 1330 km.

a) Exprimez le coût mensuel C comme une fonction de la distance parcourue d, supposant qu'une relation affine est une bonne modélisation.

b) Servez-vous de la partie a) pour prédire le coût de 2450 km par mois.

c) Dessinez le graphique de la fonction affine. Que représente la pente ?

d) Que représente l'ordonnée à l'origine ?

e) Pourquoi une fonction affine constitue-t-elle un bon modèle de cette situation ?

53. On suppose que $P(x, y)$ est un point quelconque sur une parabole de foyer $(0, p)$ et de directrice $y = -p$ (voyez la figure 15). Utilisez la définition de la parabole pour déduire que $x^2 = 4py$.

54. Où se trouve le foyer et quelle est la directrice de la parabole $y = x^2$? Illustrez avec un dessin.

55. Les foyers d'une ellipse se trouvent en $(\pm c, 0)$ et la somme des distances d'un quelconque de ses points aux foyers égale $2a$. Montrez que les coordonnées de P satisfont à l'équation 1.

56. Localisez les foyers de l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 4$ et dessinez son graphe.

57. Utilisez la définition d'une hyperbole pour dériver l'équation 2 d'une hyperbole de foyers en $(\pm c, 0)$.

58. a) Localisez les foyers et déterminez les asymptotes de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ et dessinez-la.

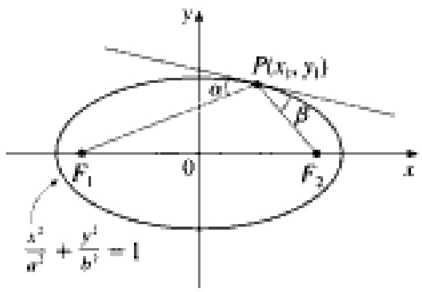
b) Dessinez l'hyperbole d'équation $y^2 - x^2 = 1$.

59-60 ■ Ombrez la région délimitée par les courbes.

59. $x + 4y = 8$ et $x = 2y^2 - 8$

60. $y = 4 - x^2$ et $x - 2y = 2$

61. Soit $P(x_1, y_1)$ un point sur l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ dont les foyers sont F_1 et F_2 et soit α et β les angles entre les droites PF_1 et PF_2 et l'ellipse (voyez la figure). Démontrez que $\alpha = \beta$. C'est ce qui explique les échos de chuchotement et la technique de la lithotripsie. Le son issu de l'un des foyers est réfléchi et passe par l'autre foyer. (*Suggestion :* utilisez la formule du problème 13 à la page 265 pour montrer que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$)



C Trigonométrie

Nous passons en revue dans cette annexe les questions de trigonométrie qui sont utiles en calcul différentiel et intégral : la mesure en radians, les fonctions trigonométriques, les identités trigonométriques et les fonctions trigonométriques réciproques.

■ Angles

On mesure les angles en degrés ou en radians (notés rad). L'angle qui correspond à un tour complet mesure $360°$ ou 2π rad. Par conséquent

1
$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180^\circ}$$

et

2
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57{,}3^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}017 \text{ rad}$$

EXEMPLE 1 ■

a) Quelle est la mesure en radians de 60° ?

b) Exprimez en degrés $5\pi/4$ radians.

SOLUTION

a) Pour convertir des degrés en radians, d'après les équations 1 ou 2, il faut multiplier par $\pi/180$. D'où

$$60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

b) Pour convertir des radians en degrés, il faut multiplier par $180/\pi$. D'où

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4}\left(\frac{180}{\pi}\right) = 225^\circ.$$

En analyse, sauf mention contraire, les angles sont toujours mesurés en radians. La table que voici reprend la correspondance entre les radians et les degrés de quelques angles couramment rencontrés.

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

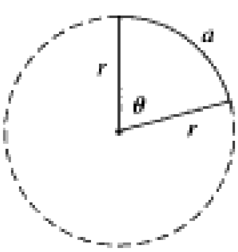


FIGURE 1

La figure 1 montre un secteur circulaire d'angle θ, de rayon r et d'arc de longueur a. Puisque la longueur de l'arc est proportionnelle à la mesure de l'angle et que la longueur $2\pi r$ correspond à l'angle complet 2π, nous avons

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{a}{2\pi r}.$$

La résolution de cette équation par rapport à θ et par rapport à a conduit à

3
$$\boxed{\theta = \frac{a}{r}} \qquad \boxed{a = r\theta}$$

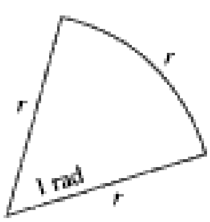


FIGURE 2

Rappelons que ces équations ne sont valables que si θ est mesuré en radians.

En particulier, en posant $a = r$ dans l'équation (3), nous constatons qu'un angle au centre de $\theta = 1$ rad intercepte un arc de longueur égale au rayon du cercle (voyez la figure 2).

EXEMPLE 2 ■

a) Dans un cercle dont le rayon mesure 5 cm, combien mesure l'angle qui intercepte un arc de 6 cm ?

b) Dans un cercle de 3 cm de rayon, quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle de $3\pi/8$ rad ?

SOLUTION

a) En remplaçant a par 6 et r par 5 dans l'équation, nous obtenons

$$\theta = \frac{6}{5} = 1{,}2 \text{ rad.}$$

b) Avec $r = 3$ et $\theta = 3\pi/8$, l'arc mesure

$$a = r\theta = 3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{ cm.}$$

Un angle est en **position standard** lorsque son sommet est l'origine d'un système de coordonnées et son côté initial sur la partie positive de l'axe Ox, comme à la figure 3.

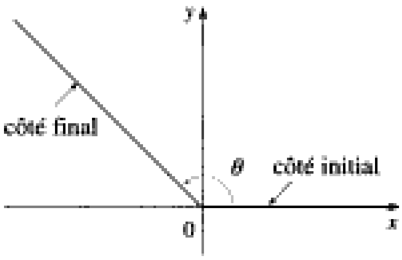


FIGURE 3
$\theta > 0$

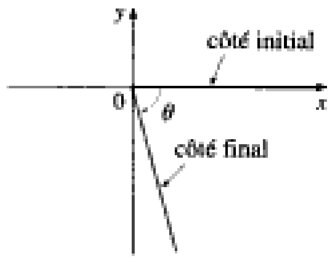


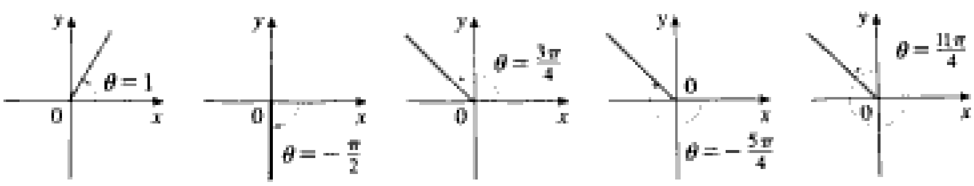
FIGURE 4
$\theta < 0$

On obtient un angle **positif** en faisant tourner le côté initial dans le sens contraire des aiguilles d'une montre jusqu'à ce qu'il coïncide avec le côté final. De même, les angles **négatifs** sont obtenus par une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre (figure 4). La figure 5 montre plusieurs exemples d'angles en position standard. On peut y observer que des angles différents peuvent avoir le même côté final. C'est le cas des angles $3\pi/4$, $-5\pi/4$ et $11\pi/4$ qui ont même côté initial et même côté final parce que

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4},$$

et que 2π rad représente un tour complet.

FIGURE 5
Angles en position standard



Les fonctions trigonométriques

Pour définir les six fonctions trigonométriques d'un angle aigu θ, on place θ dans un triangle rectangle et on prend des rapports entre les longueurs des côtés de la façon suivante (voyez la figure 6).

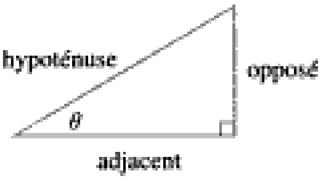


FIGURE 6

4

$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$

Comme cette définition ne vaut pas pour un angle obtus ou négatif, nous adoptons pour un angle θ quelconque en position standard la définition suivante, basée sur les coordonnées d'un point $P(x, y)$ choisi arbitrairement sur le côté terminal de l'angle θ et sur la distance $|OP|$, qui est notée r (voyez la figure 7).

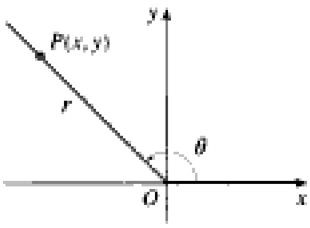


FIGURE 7

5

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{x}$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{x}{y}$$

Quand $x = 0$, les fonctions $\operatorname{tg}\theta$ et $\sec\theta$ ne sont pas définies, x étant au dénominateur et, de même, quand $y = 0$, les fonctions $\operatorname{cosec}\theta$ et $\operatorname{cotg}\theta$ ne sont pas définies. Remarquez que les définitions (4) et (5) sont cohérentes dans le cas où θ est un angle aigu.

Si θ est un nombre, il est convenu que $\sin\theta$ est l'image par la fonction sinus d'un angle dont la mesure en radians est θ. Par exemple, l'expression $\sin 3$ signifie qu'on a affaire à un angle de 3 radians. Le calcul de la valeur de la fonction sinus au point 3 requiert que la calculatrice soit en mode radians et elle donne alors

$$\sin 3 \approx 0{,}14112.$$

Si par contre il s'agit de calculer le sinus d'un angle de 3°, il faut mettre la calculatrice en mode degrés et elle donne

$$\sin 3^\circ \approx 0{,}05234.$$

Les triangles rectangles particuliers de la figure 8 permettent d'obtenir la valeur exacte des rapports trigonométriques de certains angles. Par exemple

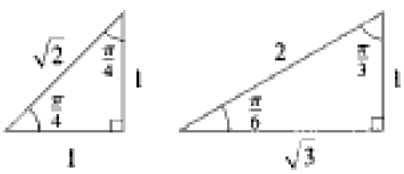


FIGURE 8

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

La figure 9 classe, par quadrant, les différents nombres trigonométriques selon leur signe positif.

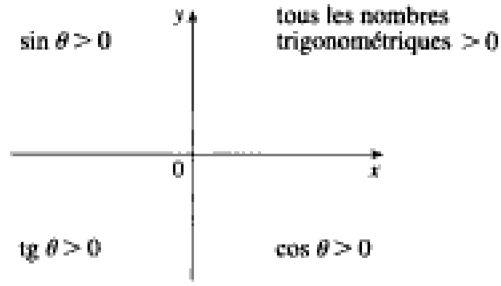


FIGURE 9

EXEMPLE 3 ■ Écrire la valeur exacte des rapports trigonométriques pour $\theta = 2\pi/3$.

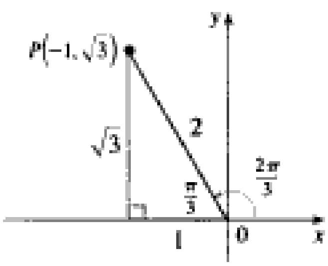


FIGURE 10

SOLUTION Le triangle rectangle de la figure 10 montre que le point $P(-1, \sqrt{3})$ se trouve sur le côté terminal de $\theta = 2\pi/3$. Dès lors, en prenant $x = -1$, $y = \sqrt{3}$ et $r = 2$, les définitions 5 des rapports trigonométriques donnent

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\frac{2\pi}{3} = -2 \qquad \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Voici une table des valeurs de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ obtenues de la même façon qu'à l'exemple 3.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1

EXEMPLE 4 ■ Si θ est un angle du premier quadrant dont le cosinus vaut $2/5$, quelle est la valeur des cinq autres fonctions trigonométriques de θ ?

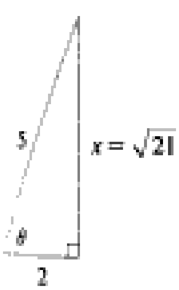


FIGURE 11

SOLUTION Puisque $\cos\theta = 2/5$, nous pouvons dessiner le triangle rectangle de la figure 11 dont l'hypoténuse mesure 5 unités et le côté adjacent à θ, 2 unités. La longueur x du côté opposé à θ satisfait, en vertu du théorème de Pythagore, à l'équation $x^2 + 4 = 25$. D'où $x = \sqrt{21}$. Il ne reste qu'à utiliser les définitions pour obtenir

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{\sqrt{21}} \qquad \sec\theta = \frac{5}{2} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

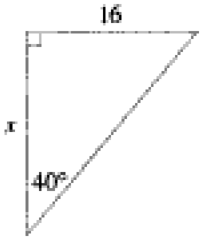


FIGURE 12

EXEMPLE 5 ■ Calculez approximativement la valeur de x dans la figure 12, à l'aide d'une calculatrice.

SOLUTION D'après la définition,

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{16}{x}.$$

D'où,

$$x = \frac{16}{\operatorname{tg} 40°} \approx 19{,}07.$$

■ Des identités trigonométriques

Une identité trigonométrique est une relation entre des fonctions trigonométriques. Voici pour commencer les plus élémentaires qui découlent immédiatement des définitions des fonctions trigonométriques elles-mêmes.

6

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \operatorname{cotg}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array}}$$

Pour établir l'identité suivante, nous nous reportons à la figure 7. La formule de la distance (ou le théorème de Pythagore) nous dit que $x^2 + y^2 = r^2$. Dès lors,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Nous avons ainsi démontré l'une des identités trigonométriques les plus employées

7

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

En divisant les deux membres de l'équation 7 par $\cos^2\theta$ et en tenant compte des équations 6, nous obtenons

8

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

De même, en divisant les deux membres de l'équation 7 par $\sin^2\theta$ et en tenant compte des équations 6, nous obtenons

9

$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta}$$

Les identités

10a $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

10b $\cos(-\theta) = \cos\theta$

Les fonctions paires et impaires sont étudiées dans la section 1.1.

expriment le caractère impair de la fonction sinus et le caractère pair de la fonction cosinus. Leur démonstration s'obtient très facilement à partir du dessin des angles θ et $-\theta$ en position standard (voyez l'exercice 19).

Comme les angles θ et $\theta + 2\pi$ ont le même côté final, nous pouvons écrire

11
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Les autres identités trigonométriques sont toutes des conséquences des deux identités de base appelées **formules d'addition** :

12a
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

12b
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Les grandes lignes de la démonstration de ces formules sont tracées dans les exercices 51, 52 et 53.

En substituant $-y$ à y dans les équations 12a et 12b et compte tenu des formules 10a et 10b, nous obtenons les **formules de soustraction**

13a
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

13b
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

En divisant les formules des cadres 12 et 13 l'une par l'autre, nous arrivons aux formules d'addition et de soustraction pour la tangente :

14a
$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

14b
$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

En posant $x = y$ dans les formules d'addition (12), nous obtenons **les formules de duplication** :

15a
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

15b
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Puis, grâce à l'identité $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, nous obtenons deux autres formes de la formule de l'angle double pour le cosinus :

16a
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

16b
$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

La résolution de ces équations par rapport à $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ conduit aux deux **formules de bissection**, souvent employées lors de la recherche de primitive,

17a $$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

17b $$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Il y a bien d'autres identités trigonométriques, mais celles que nous avons établies sont les plus fréquemment utilisées en analyse et si vous ne vous souvenez pas de l'une d'entre elles, rappelez-vous qu'elles se déduisent toutes aisément des équations 12a et 12b.

EXEMPLE 6 ■ Déterminez les valeurs de x comprises entre 0 et 2π telles que

$$\sin x = \sin 2x.$$

SOLUTION Grâce aux formules de l'angle double (15a), l'équation s'écrit aussi

$$\sin x = 2 \sin x \cos x \qquad \text{ou} \qquad \sin x(1 - 2\cos x) = 0.$$

Dès lors, il y a deux possibilités :

$$\sin x = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2\cos x = 0$$

$$x = 0, \pi, 2\pi \qquad\qquad \cos x = \tfrac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

Il y a donc 5 solutions qui sont 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ et 2π.

■ Graphiques des fonctions trigonométriques

Le graphique de la fonction $f(x) = \sin x$ que propose la figure 13(a) est obtenu en reportant les points d'abscisses comprises entre 0 et 2π, puis en exploitant le caractère périodique de la fonction (indiqué par l'équation 11) pour le reste de la courbe. On remarque que les racines de la fonction sinus se situent aux multiples entiers de π, c'est-à-dire,

$$\sin x = 0 \qquad \text{quand } x = n\pi, \text{ où } n \text{ est un entier.}$$

(a) $f(x) = \sin x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURE 13

Suite à l'identité

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

[qui se vérifie facilement à partir de la formule (12 a)], il s'avère que le graphique de la fonction cosinus n'est qu'une translation de $\pi/2$ unités vers la gauche du graphique de la fonction sinus [voyez la figure 13(b)]. Tant pour la fonction sinus que pour la fonction cosinus, le domaine de définition est $]-\infty, +\infty[$ et l'ensemble image, l'intervalle fermé $[-1, +1]$. Donc, quelle que soit la valeur de x, nous avons

$$\boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

La figure 14 montre les graphiques des quatre autres fonctions trigonométriques et leur domaine de définition apparaît là aussi. On remarque que l'ensemble image de tangente et cotangente est $]-\infty, +\infty[$, alors que celui de cosécante et sécante est $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Elles sont également toutes les quatre périodiques, tangente et cotangente de période π, sécante et cosécante, de période 2π.

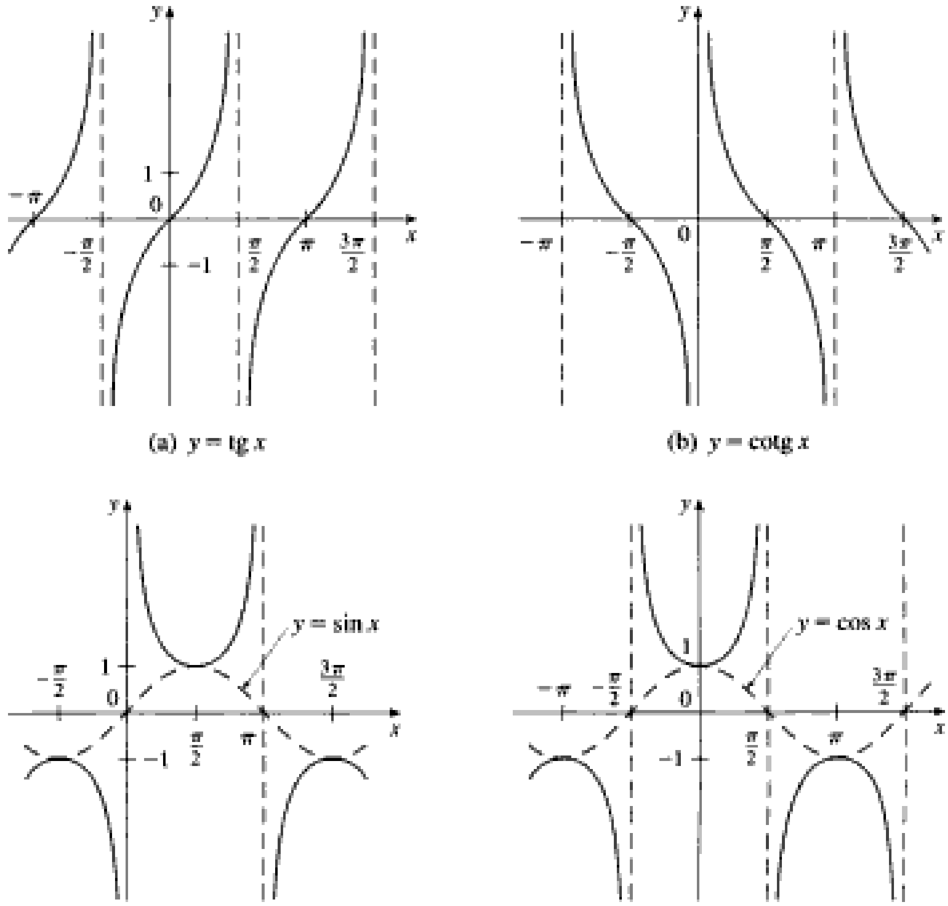


FIGURE 14 (a) $y = \mathrm{tg}\, x$ (b) $y = \mathrm{cotg}\, x$ (a) $y = \mathrm{cosec}\, x$ (b) $y = \sec x$

■ Les fonctions trigonométriques réciproques

Les fonctions réciproques sont étudiées dans la section 1.6.

La difficulté qui se présente d'emblée lorsqu'il s'agit de trouver les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, c'est qu'elles ne sont pas injectives. Pour la surmonter, il faut envisager une restriction de ces fonctions à des portions de domaine sur lesquelles elles sont injectives.

La figure 15 montre la fonction $y = \sin x$ ainsi qu'une droite horizontale qui la coupe plus d'une fois, prouvant ainsi graphiquement, que cette fonction n'est pas injective. Par contre, la fonction représentée dans la figure 16 qui correspond aux valeurs de x telles que $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ *est* injective. La fonction réciproque de cette restriction de la fonction sinus existe et est notée $\sin^{-1}$ ou Arcsin. Elle est appelée **fonction réciproque de la fonction sinus** ou **arcsinus**.

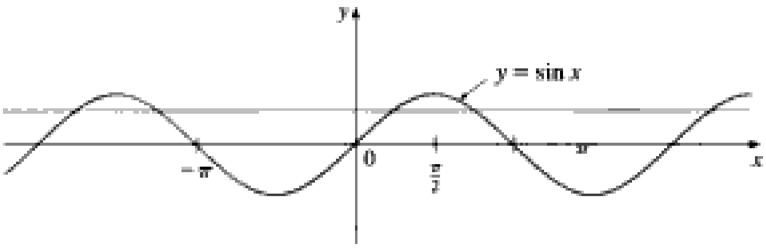


FIGURE 15

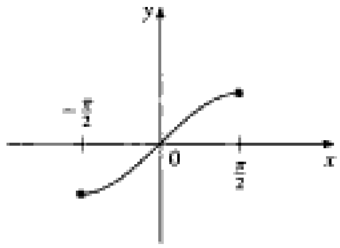


FIGURE 16

Puisque, par définition d'une fonction réciproque,

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x,$$

ici, nous avons

$$\boxed{\text{Arcsin}\, x = y \quad \Longleftrightarrow \quad \sin y = x \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

$\text{Arcsin}\, x \neq \dfrac{1}{\sin x}$

En définitive, à un nombre x de l'intervalle $[-1, +1]$, la fonction arcsinus fait correspondre l'unique nombre réel situé entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ dont le sinus soit x.

EXEMPLE 7 ■ Calculez a) Arcsin $(\frac{1}{2})$ et b) tg (Arcsin $\frac{1}{3}$).

SOLUTION

a) Comme $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$ et que $\pi/6$ se trouve entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, nous avons

$$\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

b) Posons d'abord $\theta = \text{Arcsin}\ \frac{1}{3}$. Ensuite, dessinons un triangle rectangle dont un des angles a la mesure θ. D'après le théorème de Pythagore, la longueur du troisième côté est égale à $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. D'où, par lecture dans le triangle rectangle,

$$\text{tg}\left(\text{Arcsin}\ \frac{1}{3}\right) = \text{tg}\ \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

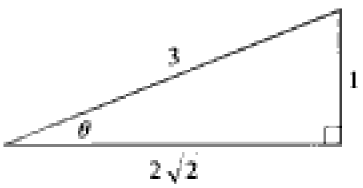


FIGURE 17

Les équations d'annulation (voyez (4) dans la section 1.6) s'écrivent ici

$$\text{Arcsin}\,(\sin x) = x \qquad \text{pour } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(\text{Arcsin}\ x) = x \qquad \text{pour } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

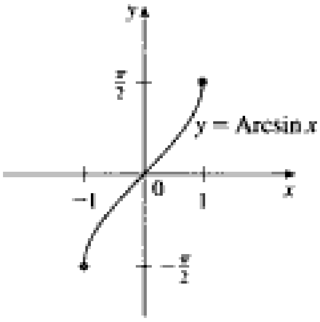


FIGURE 18

Le domaine de définition de la fonction Arcsin est $[-1, +1]$ et l'ensemble image, $[-\pi/2, \pi/2]$. Son graphique s'obtient en prenant l'image par une réflexion autour de la droite $y = x$ de la restriction de la fonction sinus (figure 16).

La fonction tangente peut être rendue injective en la restreignant à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. La fonction réciproque de la fonction $f(x) = \text{tg}\, x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$ (figure 19) est notée Arctg et se lit arc tangente.

$$\boxed{\text{Arctg}\, x = y \iff \text{tg}\, y = x \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

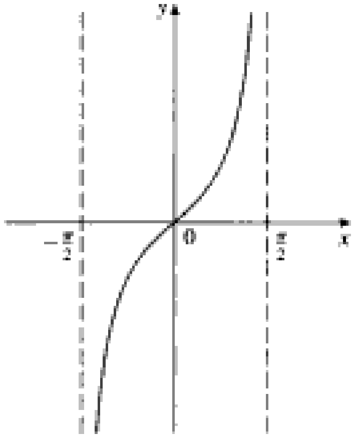


FIGURE 19
$y = \text{tg}\, x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

EXEMPLE 8 ■ Simplifiez l'expression $\cos(\text{Arctg}\, x)$.

SOLUTION 1 Posons $y = \text{Arctg}\, x$. De là, $\text{tg}\, y = x$ et $-\pi/2 < y < \pi/2$. Nous cherchons $\cos y$, mais puisque nous connaissons $\text{tg}\, y$, il est plus facile de trouver d'abord $\sec y$:

$$\sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad (\text{puisque } \sec y > 0 \text{ lorsque } -\pi/2 < y < \pi/2)$$

Maintenant

$$\cos(\text{Arctg}\, x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

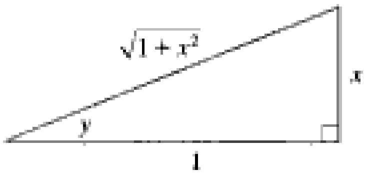


FIGURE 20

SOLUTION 2 Au lieu d'utiliser les identités trigonométriques, il est parfois préférable de faire un diagramme. Si $y = \text{Arctg}\, x$, alors $x = \text{tg}\, y$ et le triangle rectangle de la figure 20 illustre cette situation dans le cas où $y > 0$. Nous lisons maintenant, dans ce triangle rectangle,

$$\cos(\text{Arctg}\, x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

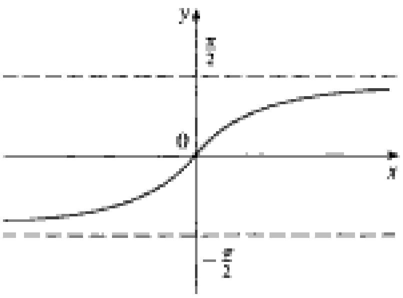


FIGURE 21
$y = \text{tg}^{-1} x = \text{Arctg}\, x$

Le domaine de définition de la fonction Arctg est $\mathbb{R}$ et son ensemble image $]-\pi/2, \pi/2[$. Vous voyez son graphique dans la figure 21. Nous savons que les droites $x = \pm\pi/2$ sont des asymptotes verticales du graphique de tg et nous savons aussi que le graphique de Arctg est obtenu par symétrie orthogonale par rapport à $y = x$. Par conséquent, les droites $y = \pi/2$ et $y = -\pi/2$ sont des asymptotes horizontales pour la courbe représentative de Arctg.

Les fonctions Arcsin et Arctg sont de loin les plus intéressantes des six fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. La fonction réciproque de la fonction cosinus est présentée à l'exercice 46. Les autres se rencontrent moins fréquemment.

C Exercices

1-2 ■ Convertissez les degrés en radians.

1. a) $210°$ b) $9°$

2. a) $-315°$ b) $36°$

3-4 ■ Convertissez les radians en degrés.

3. a) 4π b) $-\dfrac{3\pi}{8}$

4. a) $-\dfrac{7\pi}{2}$ b) $\dfrac{8\pi}{3}$

5. Calculez la longueur de l'arc d'un cercle de 36 cm de rayon intercepté par un angle de $\pi/12$ radians.

6. Dans un cercle de 10 cm de rayon, quelle est la longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de 72°.

7. Le rayon d'un cercle mesure 1,5 m. Quelle est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de 1 m de long ?

8. Calculez le rayon d'un secteur circulaire d'angle $3\pi/4$ et d'arc de 6 cm de long.

9-10 ■ Dessinez en position standard l'angle d'amplitude donnée.

9. a) $315°$ b) $-\dfrac{3\pi}{4}$ rad

10. a) $\dfrac{7\pi}{3}$ rad b) -3 rad

11-12 ■ Déterminez la valeur exacte des nombres trigonométriques des angles dont la mesure en radians est donnée.

11. $\dfrac{3\pi}{4}$ **12.** $\dfrac{4\pi}{3}$

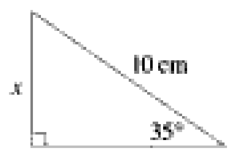
13-14 ■ Cherchez les autres nombres trigonométriques.

13. $\sin\theta = \dfrac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

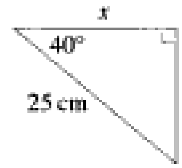
14. $\operatorname{tg}\alpha = 2, \quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

15-18 ■ Calculez avec 5 décimales correctes la longueur du côté marqué de la lettre x.

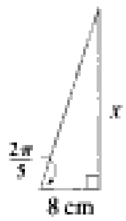
15.



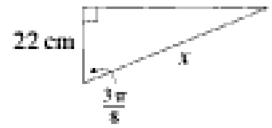
16.



17.



18.



19-20 ■ Démontrez l'équation.

19. a) L'équation 10a b) L'équation 10b

20. a) L'équation 14a b) L'équation 14b

21-26 ■ Démontrez l'identité.

21. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ **22.** $\sin(\pi - x) = \sin x$

23. $\sin\theta \operatorname{cotg}\theta = \cos\theta$

24. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

25. $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}$

26. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

27-28 ■ Calculez l'expression, sachant que $\sin x = \frac{1}{3}$ et $\sec y = \frac{5}{4}$ et que x et y sont compris entre 0 et $\pi/2$.

27. $\sin(x + y)$ **28.** $\cos 2y$

29-32 ■ Cherchez toutes les solutions de l'équation, situées dans l'intervalle $[0, 2\pi]$

29. $2\cos x - 1 = 0$ **30.** $2\sin^2 x = 1$

31. $\sin 2x = \cos x$ **32.** $|\operatorname{tg} x| = 1$

33-36 ■ Trouvez toutes les valeurs de x de l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui satisfont à l'inéquation.

33. $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$ **34.** $2\cos x + 1 > 0$

35. $-1 < \operatorname{tg} x < 1$ **36.** $\sin x > \cos x$

37-40 ■ Au départ des courbes des figures 13 et 14, tracez la courbe représentative de la fonction, en appliquant où c'est nécessaire les transformations de la section 1.2.

37. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **38.** $y = \operatorname{tg} 2x$

39. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **40.** $y = |\sin x|$

41-44 ■ Calculez la valeur exacte de chaque expression.

41. a) Arcsin (0,5) b) Arctg (-1)

42. a) Arctg $\sqrt{3}$ b) Arcsin 1

43. a) sin(Arcsin (0,7)) b) Arcsin $(\sin \frac{5\pi}{4})$

44. a) sec(Arctg 2) b) sin(2Arcsin $(\frac{1}{3})$)

45. Démontrez que $\cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2}$.

46. La fonction réciproque de la fonction cosinus, Arccos, est définie comme la réciproque de la restriction de la fonction cosinus $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

a) Quel est le domaine de définition et l'ensemble image de cette fonction ?

b) Dessinez la courbe représentative de Arccos.

47. Déterminez le domaine de définition et l'ensemble image de la fonction

$$g(x) = \text{Arcsin } (3x + 1).$$

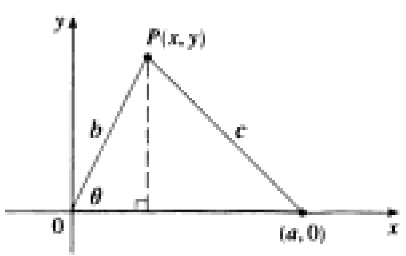
48. a) Dessinez la fonction $f(x) = \sin(\text{Arcsin } x)$ et expliquez l'allure du graphe.

b) Dessinez la fonction $g(x) = \text{Arcsin } (\sin x)$. Comment expliquez-vous l'allure de ce graphe ?

49. Démontrez la **Loi des cosinus** : Si un triangle a des côtés de longueur a, b et c et si θ est l'angle compris entre les côtés de longueur a et b, alors

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

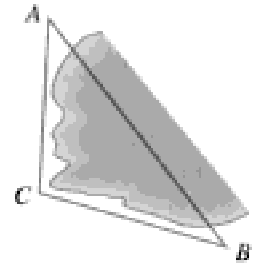
[*Suggestion :* Introduisez un système de coordonnées tel que θ soit en position standard dans la figure. Exprimez x et y en fonction de θ et utilisez la formule de la distance pour calculer c].



50. Afin de calculer la distance $|AB|$ au-dessus d'une avancée d'eau, on choisit un point C situé comme dans la figure et on effectue les mesures suivantes :

$$\angle C = 103° \qquad |AC| = 820 \text{ m} \qquad |BC| = 910 \text{ m}.$$

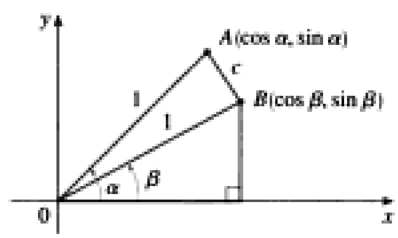
Utilisez la Loi des cosinus de l'exercice 49 pour calculer la distance demandée.



51. Exploitez la figure pour démontrer la formule du cosinus d'une différence

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

[*Suggestion :* Calculez c^2 de deux façons (d'après la Loi des cosinus de l'exercice 49 et selon la formule de la distance) et comparez les deux expressions.]



52. Servez-vous de la formule de l'exercice 51 pour démontrer la formule du cosinus d'une somme (12b).

53. Démontrez la formule du sinus d'une différence à partir de la formule du cosinus d'une somme et des identités

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta.$$

54. a) Démontrez que l'aire d'un triangle dont deux côtés mesurent a et b et forment un angle θ vaut

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\theta.$$

b) Calculez l'aire du triangle ABC, avec 5 décimales correctes, si

$$|AB| = 10 \text{ cm} \qquad |BC| = 3 \text{ cm} \qquad \angle ABC = 107°.$$

D Les définitions formelles des limites

Les définitions des limites telles qu'elles ont été données dans le corps de ce livre conviennent si on se contente, dans un premier temps, d'une compréhension intuitive des concepts de base du calcul différentiel et intégral. À des fins de compréhension plus profonde et de preuves rigoureuses par contre, les définitions formelles de cette annexe deviennent indispensables. La définition d'une limite donnée ici est celle sur laquelle repose, dans l'annexe E, la démonstration de ce que, par exemple, la limite d'une somme est la somme des limites.

Dire que $f(x)$ a comme limite L lorsque x tend vers a signifie, selon la définition intuitive de la section 2.2, que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de L en choisissant x suffisamment proche de a (mais non égal à a). Une définition plus précise ne fait rien d'autre que de spécifier comment doit être prise la distance $|x - a|$ pour que la distance $|f(x) - L|$ soit plus petite qu'un certain nombre annoncé. L'exemple que voici illustre cela.

Il est de tradition d'employer la lettre grecque δ dans cette situation.

EXEMPLE 1 ■ Utilisez un graphique pour déterminer un nombre δ tel que

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2 \quad \text{quand} \quad |x - 1| < \delta.$$

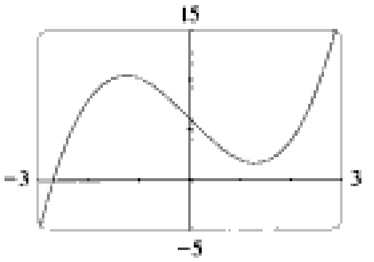


FIGURE 1

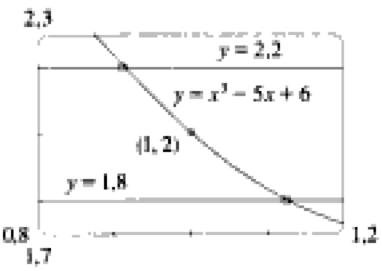


FIGURE 2

SOLUTION Un graphique de $f(x) = x^3 - 5x + 6$ est présenté dans la figure 1 ; c'est ce qui se passe à proximité du point $(1, 2)$ qui nous intéresse. Remarquez que l'inégalité

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2$$

peut aussi s'écrire

$$1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2.$$

Ce qui conduit à se pencher sur les valeurs de x pour lesquelles la courbe $y = x^3 - 5x + 6$ est comprise entre les horizontales $y = 1{,}8$ et $y = 2{,}2$. Pour y voir plus clair, on trace les courbes $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1{,}8$ et $y = 2{,}2$ et on zoome sur le point $(1, 2)$ (figure 2). À l'aide du curseur, on estime l'abscisse du point d'intersection de la droite $y = 2{,}2$ avec la courbe $y = x^3 - 5x + 6$ à environ 0,911.

De même, $y = x^3 - 5x + 6$ coupe la droite $y = 1{,}8$ en $x \approx 1{,}124$. Aussi, en arrondissant pour être sûr, on peut dire que

$$1{,}8 < x^3 - 5x + 6 < 2{,}2 \quad \text{quand} \quad 0{,}92 < x < 1{,}12.$$

L'intervalle $]0{,}92; 1{,}12[$ n'est pas symétrique par rapport à $x = 1$. En effet, la distance de $x = 1$ à l'extrémité gauche est égale à $1 - 0{,}92 = 0{,}08$ tandis que la distance à l'extrémité droite est 0,12. On peut choisir δ égal au plus petit de ces deux nombres, c'est-à-dire $\delta = 0{,}08$, et réécrire les inégalités en termes de distances comme suit :

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}2 \quad \text{quand} \quad |x - 1| < 0{,}08.$$

Ceci veut simplement dire qu'en prenant x à moins de 0,08 de 1, on est sûr de garder $f(x)$ à moins de 0,2 de 2.

Bien qu'on ait choisi $\delta = 0{,}08$, n'importe quelle valeur inférieure pour δ remplirait a fortiori la condition voulue.

En suivant la même procédure graphique qu'à l'exemple 1, mais en remplaçant la tolérance 0,2 par des nombres plus petits, on trouve

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}1 \quad \text{quand} \quad |x - 1| < 0{,}046.$$

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}05 \quad \text{quand} \quad |x - 1| < 0{,}024.$$

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0{,}01 \quad \text{quand} \quad |x - 1| < 0{,}004.$$

Dans chaque cas, on a déterminé un nombre δ tel que les valeurs de la fonction $f(x) = x^3 - 5x + 6$ se trouvent dans des intervalles de plus en plus petits centrés en 2 lorsque la distance entre x et 1 est inférieure à δ. Il s'avère que, quel que petit que soit l'intervalle, il est toujours possible de trouver un tel nombre δ. En d'autres mots, *quel que soit* un nombre positif ε, si petit soit-il, il existe un nombre positif δ tel que

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad |x - 1| < \delta.$$

Cela signifie que

$$\lim_{x \to 1}(x^3 - 5x + 6) = 2$$

et suggère une manière plus précise de définir la limite d'une fonction en général.

La condition $0 < |x - a|$ n'est qu'une manière d'assurer $x \neq a$.

> **1 Définition** Soit f une fonction définie sur un certain intervalle ouvert qui contient le nombre a, sauf peut-être en a lui-même. Alors, on dit que la **limite de $f(x)$ quand x s'approche de a est L** et on écrit
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$
>
> si, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre correspondant $\delta > 0$ tel que
>
> $$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Les figures 3 à 5 illustrent la définition 1. Dès que $\varepsilon > 0$ est fixé, on trace les droites horizontales $y = L + \varepsilon$ et $y = L - \varepsilon$ et la courbe f (voyez la figure 3). S'il est vrai que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, alors on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que si x n'est autorisé à varier que dans l'intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ tout en restant différent de a, alors la courbe $y = f(x)$ se trouve entre les droites $y = L - \varepsilon$ et $y = L + \varepsilon$ (voyez la figure 4). On voit aussi que, dès qu'un tel δ est trouvé, n'importe quel δ inférieur convient aussi.

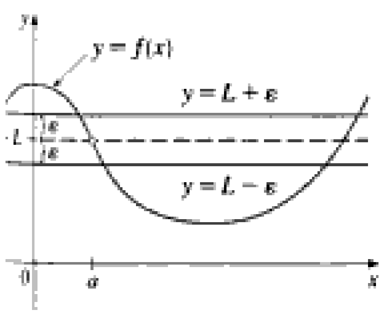


FIGURE 3

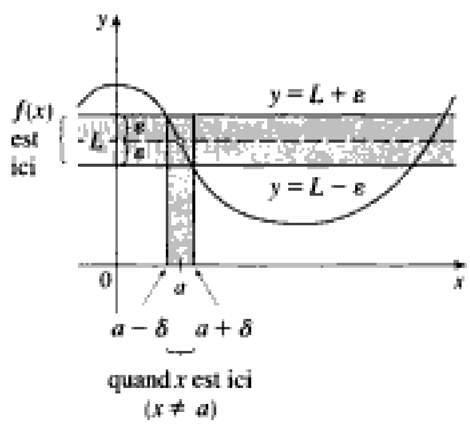


FIGURE 4

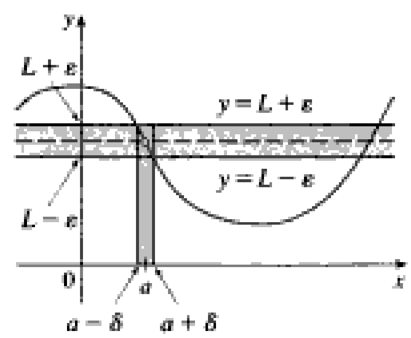


FIGURE 5

Il est important de prendre conscience que le résultat illustré dans les figures 3 et 4 doit marcher pour *tout* nombre positif ε, aussi petit soit-il. La figure 5 montre qu'un ε plus petit requiert (le plus souvent) un δ plus petit.

EXEMPLE 2 ■ Démontrez que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ par la définition en ε-δ.

SOLUTION Soit ε un nombre positif donné. Conformément à la définition 1 avec $a = 0$ et $L = 0$, on a besoin de trouver un nombre δ tel que

$$|x^2 - 0| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |x - 0| < \delta,$$

ce qui équivaut à

$$x^2 < \varepsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |x| < \delta.$$

Or, vu que la fonction racine carrée est une fonction croissante, on sait que

$$x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}.$$

De là, en choisissant $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, on a $x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \delta$ (voyez la figure 6). Ceci démontre que $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

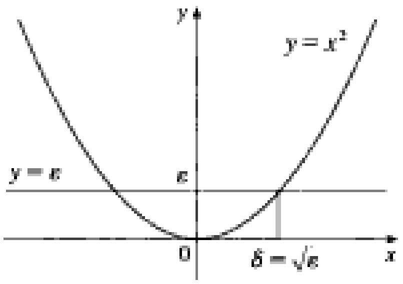


FIGURE 6

Lors de la démonstration de résultats sur les limites, il peut être bénéfique de voir la définition comme un jeu. Confronté à un nombre ε, vous devez être capable de trouver le δ qui convient, et ce, pas seulement pour un ε particulier mais *quel que soit* le $\varepsilon > 0$.

Imaginez un jeu entre deux personnes, A et B. Vous êtes B. La personne A provoque en annonçant qu'un certain nombre fixé L peut être approché par les valeurs de $f(x)$ à moins de ε près (disons 0,01). B relève le défi en déterminant un nombre δ tel que, effectivement, $|f(x) - L| < \varepsilon$ quand $0 < |x - a| < \delta$. Après quoi A peut se montrer plus exigeant et faire à B la même annonce avec une valeur plus petite de ε (disons 0,0001). B répond à nouveau en déterminant le δ correspondant. Normalement, plus la valeur de ε est petite, plus celle de δ le devient aussi. Si B gagne toujours, aussi petit que A choisisse ε, alors $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

EXEMPLE 3 ■ Démontrez que $\lim\limits_{x\to 3}(4x - 5) = 7$.

SOLUTION

1. **Étude préliminaire du problème (conjecturer une valeur de δ)** Soit ε un nombre positif. On est à la recherche d'un nombre δ tel que

$$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Or, $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Par conséquent, on souhaite que

$$4|x - 3| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |x - 3| < \delta,$$

ou

$$|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{quand} \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Cette dernière ligne suggère de choisir $\delta = \varepsilon/4$.

2. **Démonstration (que ce δ marche)** Une fois que $\varepsilon > 0$ est fixé, on choisit $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, alors

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon.$$

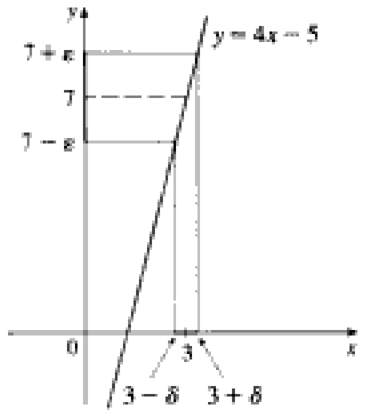


FIGURE 7

Donc,

$$|(4x-5)-7| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad 0 < |x-3| < \delta.$$

Et, en vertu de la définition de la limite,

$$\lim_{x \to 3}(4x-5) = 7.$$

Cet exemple est illustré dans la figure 7.

Remarquez que la solution de l'exemple 2 se divise en deux étapes—conjecturer d'abord et démontrer ensuite. L'analyse préliminaire nous a permis de conjecturer une valeur de δ. La deuxième étape impose un retour en arrière et un raisonnement soigneux et logique pour prouver que la conjecture était correcte. Cette démarche est caractéristique d'une bonne partie des mathématiques. Il est parfois nécessaire de commencer par une conjecture intelligente de la solution du problème avant de revenir à la preuve que cette conjecture était la bonne.

Il n'est pas toujours facile de démontrer une limite à partir de la définition en ε-δ. Dès que la fonction est un peu compliquée, comme par exemple $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, une telle démonstration demande beaucoup d'ingéniosité. Heureusement, il est possible de s'en passer grâce aux Lois algébriques des limites de la section 2.3 qui peuvent être démontrées à l'aide de la définition 1. Ainsi, les limites des fonctions compliquées sont acquises indirectement par le biais de ces lois rigoureusement démontrées.

■ Les limites à l'infini

Les limites infinies et les limites à l'infini peuvent elles aussi être définies de façon précise. Voici une version précise de la définition 4 de la section 2.5.

4 Définition Soit f une fonction définie sur un certain intervalle $]a, \infty[$. Alors,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre correspondant N tel que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad x > N.$$

En mots, cette définition veut dire que les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches que l'on veut de L (à une distance inférieure à ε, où ε est un nombre positif quelconque) en prenant x suffisamment grand (plus grand que N, où N dépend naturellement de ε). Graphiquement, cette définition exprime qu'à partir de valeurs de x assez importantes (plus grandes qu'un nombre N) le graphique de f ne sort plus de l'étroite région délimitée par les deux horizontales $y = L - \varepsilon$ et $y = L + \varepsilon$ (voyez la figure 8). Et

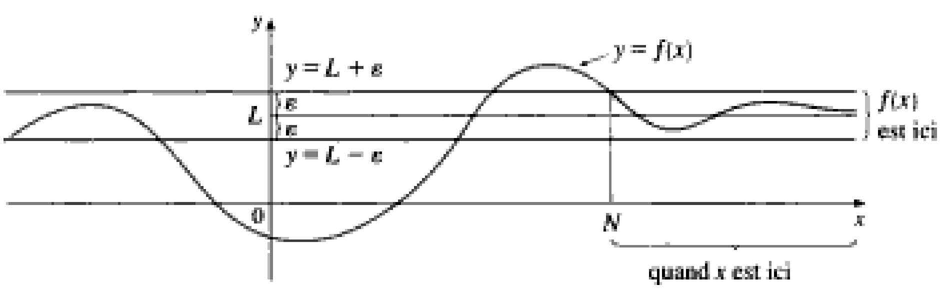


FIGURE 8
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

ceci doit être possible quel que soit ε, aussi petit soit-il. Plus la valeur de ε est petite, plus grande probablement sera la valeur de N correspondante.

Dans l'exemple 5 de la section 2.5, il a été calculé que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}.$$

L'exemple suivant lie ce résultat, à l'aide d'un outil graphique, à la définition 2 où $L = \frac{3}{5}$ et $\varepsilon = 0{,}1$.

EXEMPLE 4 ■ Déterminez graphiquement un nombre N tel que

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6\right| < 0{,}1 \quad \text{quand} \quad x > N.$$

SOLUTION On réécrit l'inégalité donnée comme ceci

$$0{,}5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0{,}7.$$

Il s'agit donc de déterminer les valeurs de x pour lesquelles la courbe donnée se situe entre les horizontales $y = 0{,}5$ et $y = 0{,}7$. C'est pourquoi on fait dessiner la courbe ainsi que ces deux droites (voyez la figure 9). À l'aide du curseur, on estime que la courbe traverse la droite $y = 0{,}5$ en $x \approx 6{,}7$. À droite de cet abscisse, la courbe ne sort plus de la région délimitée par les droites $y = 0{,}5$ et $y = 0{,}7$. On peut donc affirmer, en arrondissant pour être sûr, que

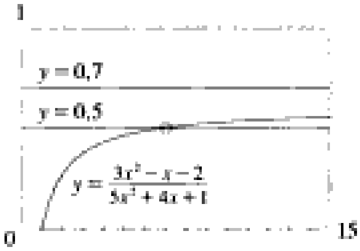


FIGURE 9

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0{,}6\right| < 0{,}1 \quad \text{quand} \quad x > 7.$$

Autrement dit, à $\varepsilon = 0{,}1$ correspond $N = 7$ (ou tout autre nombre plus grand) dans la définition 2.

EXEMPLE 5 ■ Démontrez, par la définition 2, que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUTION Soit ε un nombre positif donné. Selon la définition 2, il faut chercher un nombre N tel que

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad x > N.$$

On va supposer $x > 0$. Dès lors,

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on cherche à faire en sorte que

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \quad \text{quand} \quad x > N,$$

c'est-à-dire

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{quand} \qquad x > N.$$

Donc en choisissant $N = 1/\varepsilon$, $1/x < \varepsilon \Leftrightarrow x > N$. Ceci démontre la limite proposée. La figure 10 illustre la démonstration en mettant en évidence, pour quelques valeurs de ε, la valeur de N correspondante.

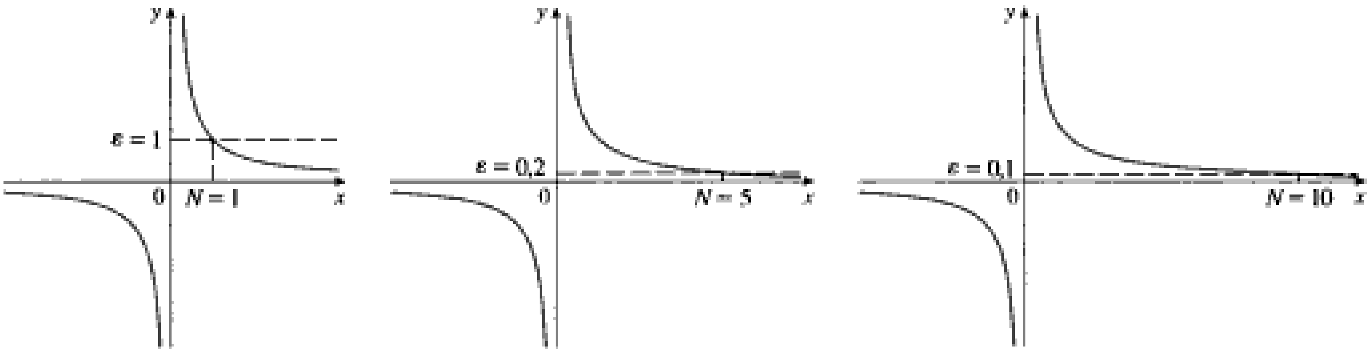


FIGURE 10

Les limites infinies ont elles aussi leur formulation précise. Voyez l'exercice 16.

Les suites

Dans la section 8.1, la notation

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

signifiait que les termes de la suite $\{a_n\}$ approchaient L lorsque n devenait grand. Vous remarquerez certainement la similitude de la définition précise que voici de la limite d'une suite avec celle d'un fonction à l'infini (définition 2).

3 Définition Une suite $\{a_n\}$ a comme **limite** L et on écrit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{ou} \qquad a_n \to L \text{ lorsque } n \to \infty$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier correspondant N tel que

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{quand} \quad n > N.$$

La définition 3 est illustrée par la figure 11 qui montre les termes $a_1, a_2, a_3, \ldots$ marqués sur une droite réelle. Quelque petit que soit l'intervalle $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$, il existe un N tel que tous les termes de la suite à partir de et au-delà de a_{N+1} se trouvent dans cet intervalle.

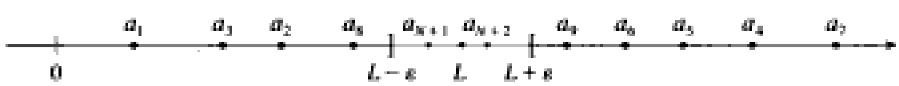


FIGURE 11

La figure 12 donne une autre illustration de la définition 3. Les points du graphique de $\{a_n\}$ ne peuvent pas sortir du couloir étroit formé par les droites horizontales $y = L + \varepsilon$ et $y = L - \varepsilon$ lorsque $n > N$. Cette image doit être valable aussi petit que soit ε, et habituellement un ε plus petit requiert un N plus grand.

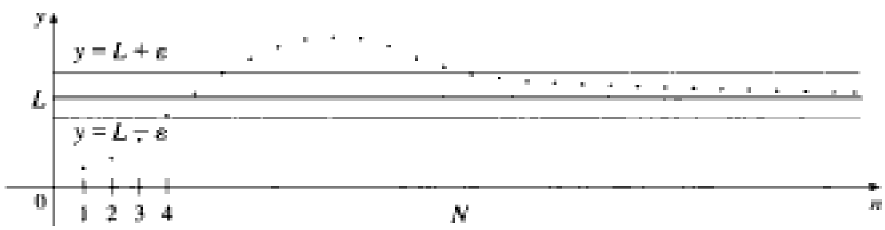


FIGURE 12

Une comparaison des définitions 2 et 3 montre que la seule différence entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ est que n doit être un entier. La définition suivante précise l'idée que a_n devient infiniment grand à mesure que n devient infiniment grand.

4 Définition $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ signifie que, pour tout nombre positif M, il existe un nombre entier N tel que

$$a_n > M \qquad \text{quand} \qquad n > N.$$

EXEMPLE 6 ■ Démontrez que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

SOLUTION Soit M un nombre positif quelconque. (Pensez-le vraiment très grand.) Alors,

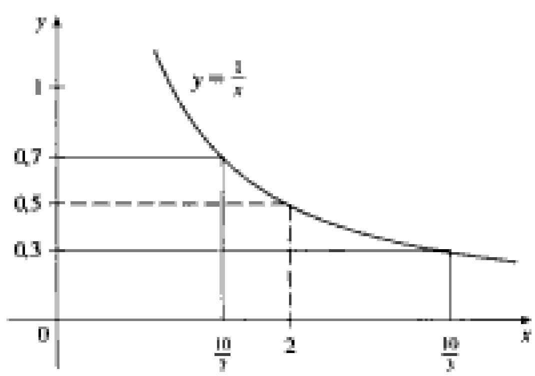
$$\sqrt{n} > M \Leftrightarrow n > M^2.$$

Donc, si on prend $N = M^2$, alors selon la définition 4 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$.

D Exercices

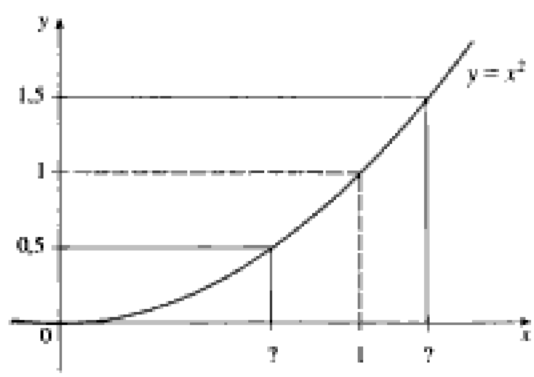
1. Déterminez à partir du graphique de $f(x) = 1/x$ un nombre δ tel que

$$\left|\frac{1}{x} - 0{,}5\right| < 0{,}2 \quad \text{quand} \quad |x - 2| < \delta$$



2. Déterminez à partir du graphique de $f(x) = x^2$ un nombre δ tel que

$$|x^2 - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{quand} \quad |x - 1| < \delta$$



3. Déterminez à partir d'un graphique un nombre δ tel que

$$|\sqrt{4x+1} - 3| < 0{,}5 \quad \text{quand} \quad |x - 2| < \delta.$$

4. Déterminez à partir d'un graphique un nombre δ tel que

$$\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1 \quad \text{quand} \quad \left|x - \frac{\pi}{6}\right| < \delta.$$

5. Illustrez la définition 1 à propos de la limite

$$\lim_{x \to 1}(4 + x - 3x^3) = 2$$

en déterminant des valeurs de δ qui correspondent à $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0{,}1$.

6. Illustrez la définition 1 à propos de la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

en déterminant des valeurs de δ qui correspondent à $\varepsilon = 0{,}5$ et $\varepsilon = 0{,}1$.

7. Démontrez par la définition 1 que $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$.

8. a) Formulez une définition en ε-δ de la limite unilatère $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.
   b) Utilisez votre définition de la partie a) pour démontrer que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

9-10 ■ Prouvez chacun des résultats à l'aide d'une définition en ε-δ de la limite et illustrez d'un diagramme semblable à celui de la figure 7.

9. $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$ 10. $\lim\limits_{x \to 4} (5 - 2x) = -3$

11. Un ouvrier métallurgiste doit fabriquer un disque en métal de 1000 cm^2 de surface.
   a) Calculez le rayon d'un tel disque.
   b) Si l'ouvrier peut se permettre une erreur de $\pm 5 \text{ cm}^2$ sur la surface du disque, quelle est l'incertitude du rayon par rapport au rayon théorique de la partie a) ?
   c) En termes de définition en ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, qu'est x ? Qu'est $f(x)$? Qu'est a ? Qu'est L ? Quelle est la valeur donnée de ε ? Quelle est la valeur correspondante de δ ?

12. Un four intervient dans la production des cristaux et la recherche se préoccupe de comment mieux fabriquer les cristaux destinés aux composants électroniques d'une navette spatiale.
   Pour un développement régulier des cristaux, la température doit être contrôlée soigneusement en ajustant la puissance à l'entrée du four. On suppose connaître la relation

$$T(w) = 0{,}1w^2 + 2{,}155w + 20$$

qui lie T, la température en degrés Celsius, et w, la puissance à l'entrée en watts.
   a) Quelle est la puissance requise pour maintenir la température à 200 °C ?
   b) Si la température est autorisée à s'écarter de ± 1°C des 200°C, quelle est la latitude laissée à la puissance à l'entrée ?
   c) En termes de définition en ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, qu'est x ? Qu'est $f(x)$? Qu'est a ? Qu'est L ? Quelle est la valeur donnée de ε ? Quelle est la valeur correspondante de δ ?

13. Déterminez à partir d'un graphique un nombre N tel que

$$\left|\frac{6x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 1} - 3\right| < 0{,}2 \qquad \text{quand} \qquad x > N$$

14. Illustrez la définition 2 à propos de la limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

en déterminant des valeurs de N qui correspondent à $\varepsilon = 0{,}5$ et $\varepsilon = 0{,}1$.

15. a) Comment faut-il prendre x pour que

$$\frac{1}{x^2} < 0{,}0001 ?$$

   b) Utilisez la définition 2 pour démontrer que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

16. a) Pour quelles valeurs de x est-il vrai que

$$\frac{1}{x^2} > 1\,000\,000 ?$$

   b) La définition précise de $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ affirme que, pour tout nombre positif M (si grand soit-il), il existe un nombre positif δ tel que $f(x) > M$ quand $0 < |x - a| < \delta$. Démontrez par cette définition que $\lim_{x \to 0}(1/x^2) = \infty$.

17. a) Conjecturez graphiquement la valeur de la limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^5}{n!}.$$

   b) Utilisez un graphique de la suite de la partie a) pour déterminer les plus petites valeurs de N qui correspondent à $\varepsilon = 0{,}1$ et $\varepsilon = 0{,}001$ dans la définition 3.

18. Démontrez par la définition 3 que $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ quand $|r| < 1$.

19. Utilisez la définition 3 pour démontrer que si $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

20. Utilisez la définition 4 pour démontrer que $\lim_{n \to \infty} n^3 = \infty$.

E Quelques démonstrations

Dans cette annexe, nous présentons les démonstrations de certains théorèmes qui ont été énoncés dans le corps du texte. Nous commençons par démontrer l'inégalité triangulaire qui est une importante propriété de la valeur absolue.

L'inégalité triangulaire Si a et b sont des nombres réels quelconques, alors

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Observons qu'au cas où les nombres a et b sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs, les deux membres de l'inégalité triangulaire sont manifestement égaux. Mais si a et b sont de signes opposés, le membre de gauche contient un signe moins tandis que le membre de droite pas ; ce qui rend l'inégalité triangulaire vraisemblable. Voici sa démonstration.

Remarquons que

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

est une relation toujours vraie parce que a est égal, soit à $|a|$, soit à $-|a|$. La même relation pour b est

$$-|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Additionnons ces inégalités,

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Les propriétés 4 et 5 de la valeur absolue (Annexe A) combinées reviennent à

$$|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$$

En vertu des propriétés 4 et 5 de la valeur absolue énoncées dans l'annexe A (avec x remplacé par $a + b$ et a par $|a| + |b|$), nous obtenons

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

qui est l'inégalité que nous voulions démontrer. ■

Ensuite, nous mettons l'inégalité triangulaire à l'œuvre dans la démonstration d'une des lois algébriques des limites, celle de la somme.

La loi de la somme a déjà été énoncée dans la section 2.3.

Loi de la somme Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ et $\lim_{x\to a} g(x) = M$ existent toutes les deux, alors

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$$

Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ donné. Conformément à la définition 1 de l'annexe D, il faut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \qquad \text{quand} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| = |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \leq |f(x)-L|+|g(x)-M|. \tag{1}$$

Pour rendre $|f(x)+g(x)-(L+M)|$ inférieur à ε, nous allons rendre chacun des termes $|f(x)-L|$ et $|g(x)-M|$ inférieur à $\varepsilon/2$.

Comme $\varepsilon/2>0$ et $\lim_{x\to a} f(x)=L$, il existe un nombre $\delta_1>0$ tel que

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{quand} \quad 0<|x-a|<\delta_1.$$

De même, comme $\lim_{x\to a} g(x)=M$, il existe un nombre $\delta_2>0$ tel que

$$|g(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{quand} \quad 0<|x-a|<\delta_2.$$

Soit $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Il est important de noter que

$$0<|x-a|<\delta \implies 0<|x-a|<\delta_1 \text{ et } 0<|x-a|<\delta_2,$$

et de là

$$|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, selon (1),

$$|f(x)+g(x)-(L+M)| \leq |f(x)-L|+|g(x)-M| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

En résumé,

$$|f(x)+g(x)-(L+M)|<\varepsilon \qquad \text{quand} \qquad 0<|x-a|<\delta.$$

Donc, en vertu de la définition d'une limite,

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M. \qquad \blacksquare$$

Le théorème de Fermat a été étudié dans la section 4.2.

Le Théorème de Fermat Si f admet un maximum ou un minimum local en c, et si $f'(c)$ existe, alors $f'(c)=0$.

Démonstration Supposons, pour une question de précision, que ce soit un maximum qui est atteint par f en c. Alors, $f(c)\geqslant f(x)$ pour x suffisamment près de c. Cela implique que, si h est suffisamment proche de 0, positif ou négatif, alors

$$f(c)\geqslant f(c+h)$$

et de là

$$f(c+h)-f(c)\leqslant 0. \tag{2}$$

Nous pouvons diviser les deux membres de l'inégalité par un nombre strictement positif. Donc, si $h > 0$ et suffisamment petit, nous avons

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0.$$

Nous prenons maintenant la limite à droite des deux membres de l'inégalité (application du théorème 2 de la section 2.3) et nous obtenons

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.$$

Or, par hypothèse, $f'(c)$ existe. Donc

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h},$$

de sorte que $f'(c) \leqslant 0$.

Envisageons le cas $h < 0$. Lors de la division par h, le sens de l'inégalité est renversé :

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0.$$

La limite à gauche des deux membres de cette inégalité conduit à

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0.$$

Les deux résultats démontrés sont $f'(c) \geqslant 0$ et $f'(c) \leqslant 0$. Comme ils sont vrais tous les deux, ils impliquent $f'(c) = 0$.

C'est la démonstration du théorème de Fermat dans le cas d'un maximum local. Le cas d'un minimum local se traite de façon analogue. ■

F Intégration des fonctions rationnelles par décomposition en éléments simples . . . .

Dans cette annexe, nous montrons comment intégrer une fonction rationnelle quelconque (un rapport de polynômes) en l'exprimant comme une somme de fractions plus simples, appelées *éléments simples*, dont l'intégration est immédiate. Pour illustrer la méthode, observons que la réduction au même dénominateur des fractions $2/(x-1)$ et $1/(x+2)$conduit à

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Si maintenant nous lisons de droite à gauche, nous comprenons comment intégrer la fonction du membre de droite de cette équation :

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C.$$

Voyons maintenant de façon générale comment fonctionne la méthode de décomposition en éléments simples. Considérons une fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des polynômes. Il est possible d'exprimer f comme une somme d'éléments simples, à condition que le degré de P soit strictement inférieur à celui de Q. Une telle fonction rationnelle est dite *propre*. Rappelons que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où $a_n \neq 0$, alors le degré de P est n et cela s'écrit $\deg(P) = n$.

Au cas où f est impropre, c'est-à-dire $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$, alors il faut au préalable effectuer la division euclidienne de P par Q jusqu'à obtenir un reste $R(x)$ dont le degré est strictement inférieur à celui de Q. Après division

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

où S et R sont aussi des polynômes.

Parfois cette étape préliminaire suffit, comme le montre l'exemple que voici.

EXEMPLE 1 ■ Calculez $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,dx.$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad + x & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 + x + 2 \\ \quad x^2 + x & \\ \quad \underline{x^2 - x} & \\ \qquad 2x & \\ \qquad \underline{2x - 2} & \\ \qquad\quad 2 & \end{array}$$

SOLUTION Vu que le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, nous effectuons la division suivant les puissances décroissantes. Cela nous permet d'écrire :

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x - 1| + C.$$

L'étape suivante consiste à factoriser le dénominateur $Q(x)$ aussi loin que possible. Il est démontré qu'un polynôme Q peut être factorisé en un produit de facteurs du premier degré (de la forme $ax + b$) et de facteurs irréductibles du second degré (de la forme $ax^2 + bx + c$, où $b^2 - 4ac < 0$). Par exemple, si $Q(x) = x^4 - 16$, nous pouvons le factoriser en

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

La troisième étape consiste à exprimer la fonction rationnelle propre $R(x)/Q(x)$ (de l'équation 1) comme une somme d'**éléments simples** de la forme

$$\frac{A}{(ax + b)^i} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^j}.$$

Un théorème d'algèbre assure qu'une telle décomposition est toujours possible. Nous détaillons les quatre cas qui peuvent se présenter.

CAS 1 Le dénominateur est un produit de facteurs du premier degré distincts

Ce qui veut dire que

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k),$$

où aucun facteur n'est répété. Dans ce cas, le théorème de décomposition en éléments simples certifie qu'il existe des constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ telles que

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k} \tag{2}$$

La détermination de ces constantes se fait comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE 2 ■ Calculez $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$

SOLUTION Puisque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, il n'est pas nécessaire de diviser. Le dénominateur se factorise comme suit :

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2).$$

Comme le dénominateur est le produit de trois facteurs du premier degré distincts, la décomposition de la fraction à intégrer en éléments simples est de la forme

Une autre méthode pour trouver les coefficients A, B et C est donnée dans la remarque qui termine cet exemple.

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}. \tag{3}$$

Pour déterminer les valeurs de A, B et C, nous multiplions les deux membres de cette équation par le produit des dénominateurs $x(2x - 1)(x + 2)$, et cela donne

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1). \tag{4}$$

Après avoir effectué les produits du membre de droite et ordonné en puissances décroissantes, nous obtenons

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A. \tag{5}$$

Comme les polynômes de l'équation 5 sont identiques, leurs coefficients doivent être égaux. Le coefficient de x^2 dans le membre de droite, à savoir $2A + B + 2C$, doit être égal au coefficient de x^2 dans le membre de gauche, à savoir 1. De même, les coefficients de x sont égaux ainsi que les termes indépendants. Ce qui conduit au système d'équations en A, B et C :

La figure 1 montre les graphiques de l'intégrande de l'exemple 2 et de sa primitive (avec $K = 0$). Les reconnaissez-vous ?

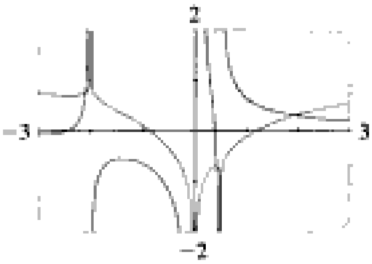


FIGURE 1

$$\begin{cases} 2A + B + 2C = 1 \\ 3A + 2B - C = 2 \\ -2A = -1 \end{cases}$$

Sa solution est $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$ et $C = -\frac{1}{10}$. D'où,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx &= \int \left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{x + 2}\right]dx \\ &= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K.\end{aligned}$$

Pour intégrer le terme central il a fallu mentalement faire la substitution $u = 2x - 1$, qui conduit à $du = 2dx$ et $dx = du/2$.

REMARQUE ● Il y a moyen de déterminer les coefficients A, B et C dans l'exemple 2 par une autre méthode. L'équation 4 est une identité, ce qui veut dire qu'elle est vérifiée quel que soit x. Choisissons des valeurs de x qui simplifie cette équation. Pour $x = 0$, les deux derniers termes du membre de droite disparaissent et l'équation devient $-1 = -2A$, ou $A = \frac{1}{2}$. De même, $x = \frac{1}{2}$ donne $\frac{1}{4} = 5B/4$ ou $B = \frac{1}{5}$ et $x = -2$ donne $-1 = 10C$ ou $C = -\frac{1}{10}$. (Vous pourriez objecter que l'équation 3 n'est pas valable pour $x = 0, \frac{1}{2}$ ou -2 et que, de ce fait, l'équation 4 non plus. En fait, l'équation 4 est valable pour toutes valeurs de x et donc aussi pour $x = 0, \frac{1}{2}$ et -2. L'exercice 35 en donne la raison.)

EXEMPLE 3 ■ Calculez $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ où $a \neq 0$.

SOLUTION La méthode de la décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

et de là

$$A(x + a) + B(x - a) = 1.$$

Déterminons les coefficients par la méthode expliquée dans la remarque : posons $x = a$, il vient $A(2a) = 1$ ou $A = 1/(2a)$. Posons ensuite $x = -a$; il vient $B(-2a) = 1$ ou $B = -1/(2a)$. D'où

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2a}[\ln|x - a| - \ln|x + a|] + C.$$

Comme $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, la primitive s'écrit aussi sous la forme

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$$

CAS 2 $Q(x)$ **est un produit de facteurs du premier degré, dont certains sont multiples.**

Supposons que le premier facteur du premier degré $(a_1x + b_1)$ soit présent r fois ; autrement dit, $(a_1x + b_1)^r$ est un facteur de $Q(x)$. Alors, dans l'équation 2, au lieu du seul terme $A_1/(a_1x + b_1)$, doivent apparaître les termes

6
$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}.$$

Voici un exemple de décomposition en éléments simples de ce type

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x - 1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2} + \frac{E}{(x - 1)^3}$$

mais nous ne le traiterons pas en détail. Nous en choisissons un plus simple.

EXEMPLE 4 ■ Calculez $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

SOLUTION La première chose à faire est d'effectuer la division euclidienne :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

La deuxième est de factoriser le dénominateur $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Puisque $Q(1) = 0$, $x - 1$ est un facteur et de là

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1) \end{aligned}$$

Vu que le facteur $x - 1$ est présent deux fois, la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$\frac{4x}{(x - 1)^2(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1}.$$

Multiplions par le plus petit dénominateur commun $(x - 1)^2(x + 1)$:

7
$$\begin{aligned} 4x &= A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C). \end{aligned}$$

Voici une autre façon de calculer les coefficients :

Poser $x = 1$ dans (7) : $B = 2$.

Poser $x = -1$: $C = -1$.

Poser $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Et maintenant, égalons les coefficients des mêmes puissances de x :

$$\begin{cases} A \phantom{{}+B} + C = 0 \\ \phantom{-A+{}} B - 2C = 4 \\ -A + B + C = 0 \end{cases}$$

La solution du système est $A = 1$, $B = 2$ et $C = -1$. Le calcul de l'intégrale indéfinie se poursuit ainsi :

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1}\right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - \ln|x + 1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x - 1} + \ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + K. \end{aligned}$$

CAS 3 **$Q(x)$ contient des facteurs quadratiques irréductibles, aucun n'est multiple.** Lorsque $Q(x)$ contient le facteur $ax^2 + bx + c$, avec $b^2 - 4ac < 0$, alors, à côté des termes simples des équations 2 et 6, l'expression de $R(x)/Q(x)$ va comporter un terme de la forme

8
$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c},$$

où A et B sont des constantes à déterminer. Par exemple, la fonction définie par $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]$ se décompose en éléments simples de la façon suivante

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

L'intégration d'un terme de la forme (8) s'effectue en complétant le carré et en utilisant la formule

9 $$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

EXEMPLE 5 ■ Calculez $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$.

SOLUTION Vu que $x^3+4x = x(x^2+4)$ ne peut pas être factorisé davantage, nous écrivons

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

En multipliant par $x(x^2+4)$, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2+4) + (Bx+C)x \\ &= (A+B)x^2 + Cx + 4A. \end{aligned}$$

Égalisons les coefficients :

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4.$$

D'où, $A = 1$, $B = 1$ et $C = -1$. Ensuite,

$$\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right] dx$$

Afin d'intégrer le second terme, nous le séparons en deux :

$$\int \frac{x-1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

Nous faisons la substitution $u = x^2+4$ dans la première de ces deux intégrales, de sorte que $du = 2x\,dx$. La deuxième intégrale est calculée à l'aide de la formule 9 avec $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-x+4}{x(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{2}\operatorname{Arctg}(x/2) + K. \end{aligned}$$

EXEMPLE 6 ■ Calculez $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx$.

SOLUTION Comme le degré du numérateur n'est pas strictement inférieur à celui du dénominateur, nous commençons par effectuer la division :

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}.$$

Remarquez que le trinôme du second degré $4x^2 - 4x + 3$ est irréductible puisque son réalisant $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Il ne peut donc plus être factorisé et la technique de décomposition en éléments simples n'est pas à appliquer.

Pour intégrer la fraction rationnelle, nous complétons le carré au dénominateur :

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2.$$

Ce qui suggère la substitution $u = 2x - 1$. Alors, $du = 2dx$ et $x = (u + 1)/2$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} dx &= \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx \\
&= x + \tfrac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2} du \\
&= x + \tfrac{1}{4} \int \frac{u - 1}{u^2 + 2} du \\
&= x + \tfrac{1}{4} \int \frac{u}{u^2 + 2} du - \tfrac{1}{4} \int \frac{1}{u^2 + 2} du \\
&= x + \tfrac{1}{8} \ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= x + \tfrac{1}{8} \ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{Arctg}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

REMARQUE ● L'exemple 6 illustre la procédure générale d'intégration d'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{où } b^2 - 4ac < 0.$$

Il faut compléter le carré au dénominateur et faire ensuite la substitution qui fait prendre à l'intégrale la forme suivante :

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2} du = C \int \frac{u}{u^2 + a^2} du + D \int \frac{1}{u^2 + a^2} du.$$

La première intégrale indéfinie est un logarithme et la deuxième implique la fonction Arctg.

CAS 4 ***$Q(x)$ contient un facteur quadratique irréductible qui est multiple.***
Lorsque $Q(x)$ comporte un facteur $(ax^2 + bx + c)^r$, où $b^2 - 4ac < 0$, alors la décomposition en éléments simples de $R(x)/Q(x)$, au lieu d'une seule fraction (8), se présente comme ceci :

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}. \qquad \textbf{(10)}$$

Chaque terme de (10) peut être intégré en complétant le carré.

EXEMPLE 7 ■ Décomposez en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}.$$

Il serait extrêmement fastidieux de déterminer à la main les valeurs des coefficients dans l'exemple 7. Mais la plupart des logiciels de calcul symbolique peuvent le faire très rapidement. Par exemple, la commande de Maple est

convert(f, parfrac, x)

ou la commande de Mathematica

Apart[f]

donnent les valeurs suivantes :

$$A = -1, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = D = -1,$$

$$E = -\frac{1}{8}, \quad F = \frac{15}{8}, \quad G = H = \frac{3}{4},$$

$$I = -\frac{1}{2}, \quad J = \frac{1}{2}.$$

SOLUTION

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^3}.$$

EXEMPLE 8 ■ Calculez $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

SOLUTION La décomposition en éléments simples est de la forme

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Nous multiplions par $x(x^2+1)^2$:

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C+E)x + A. \end{aligned}$$

Nous égalisons les coefficients et obtenons le système d'équations :

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1.$$

La solution est $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ et $E = 0$. D'où

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx & \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctg} x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K. \end{aligned}$$

F Exercices

1-10 ■ Décomposez la fonction en éléments simples (comme à l'exemple 7). Ne calculez pas la valeur des coefficients.

1. $\dfrac{5}{2x^2 - 3x - 2}$

2. $\dfrac{x^2 + 9x - 12}{(3x - 1)(x + 6)^2}$

3. $\dfrac{1}{x^4 - x^3}$

4. $\dfrac{x^4 + x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - x}$

5. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

6. $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$

7. $\dfrac{x^2 - 2}{x(x^2 + 2)}$

8. $\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)^2}$

9. $\dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^4 + x^3 + 2x^2}$

10. $\dfrac{19x}{(x - 1)^3(4x^2 + 5x + 3)^2}$

11-28 ■ Calculez l'intégrale.

11. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x + 1}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{x - 5}\,dx$

13. $\displaystyle\int_2^4 \frac{4x - 1}{(x - 1)(x + 2)}\,dx$

14. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{(x + 1)(x - 2)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x + 3}{(x + 1)^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3 + x^2 - 12x + 1}{x^2 + x - 12}\,dx$

17. $\displaystyle\int_2^3 \frac{6x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x}\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 4x + 4}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{5x^2 + 3x - 2}{x^3 + 2x^2}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x - 3)(x + 2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 2}\,dx$

23. $\displaystyle\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{(x - 1)(x^2 + 1)}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{2x + 3}{x^3 + 3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3 - 1}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4 - 1}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{3x^3 - x^2 + 6x - 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x(x^2 + 1)^2}\,dx$

29. Utilisez le graphique de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

pour décider si $\int_0^2 f(x)dx$ est positive ou négative. Faites aussi, à la lecture du graphique, une estimation grossière de la valeur de l'intégrale, puis calculez la valeur exacte de cette intégrale après avoir décomposé la fraction à intégrer en éléments simples.

30. Dessinez la courbe représentative de $y = 1/(x^3 - 2x^2)$ et celle d'une primitive dans une même fenêtre.

31. Calculez l'aire de la région sous la courbe

$$y = \frac{1}{x^2 - 6x + 8} \qquad 5 \leqslant x \leqslant 10$$

en complétant le carré et en utilisant le résultat de l'exemple 3.

32. La région sous la courbe

$$y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ subit une révolution autour de l'axe Ox. Calculez le volume du solide ainsi engendré.

33. a) À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, décomposez en éléments simples la fonction

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

b) Utilisez la partie a) pour calculer (à la main) $\int f(x)dx$ et comparez avec le résultat que fournit un logiciel de calcul symbolique chargé de calculer directement cette intégrale. Commentez les différences.

34. a) Décomposez en éléments simples la fonction

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

b) Utilisez la partie a) pour calculer $\int f(x)dx$ et dessinez f et sa primitive dans une même fenêtre.

c) Utilisez le graphique de f pour mettre en évidence les caractéristiques principales du graphique de $\int f(x)dx$.

35. Soit F, G et Q des polynômes tels que

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)},$$

pour tout x sauf ceux qui annulent $Q(x)$. Démontrez que $F(x) = G(x)$ quel que soit x. [*Suggestion :* Utilisez la continuité.]

36. Si f est une fonction quadratique telle que $f(0) = 1$ et si

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x + 1)^3}\,dx$$

est une fonction rationnelle, calculez la valeur de $f'(0)$.

G Les coordonnées polaires

Les coordonnées polaires offrent une autre façon de localiser les points dans le plan. Elles sont précieuses parce que certaines régions et certaines courbes bénéficient, dans ces coordonnées, d'une description et d'une équation très simples. C'est en calcul différentiel et intégral à plusieurs variables que les coordonnées polaires trouvent leurs principales applications : le calcul des intégrales doubles et l'établissement des lois de Kepler sur le mouvement planétaire.

G.1 Les courbes en coordonnées polaires

Dans un système de coordonnées, un point du plan est désigné par un couple de nombres, appelées ses coordonnées. Habituellement, nous utilisons les coordonnées cartésiennes, qui sont les distances orientées par rapport aux deux axes perpendiculaires. Ici, nous voulons décrire un autre système de coordonnées, introduit par Newton, appelé **système de coordonnées polaires**, qui convient mieux à beaucoup de points de vue.

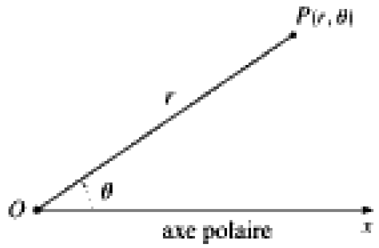


FIGURE 1

Nous choisissons un point du plan, appelé **pôle** (ou origine) et marqué O. Ensuite, nous traçons un rayon (une demi-droite) qui part de O, appelée **axe polaire**. Cet axe est généralement dessiné horizontalement et orienté positivement vers la droite. Il correspond à la partie positive de l'axe Ox dans un repère cartésien.

Pour un point P du plan, soit r la distance de O à P et soit θ l'angle (mesuré le plus souvent en radians) entre l'axe polaire et la droite OP, comme indiqué dans la figure 1. Le point P peut alors être repéré par le couple (r, θ) et r et θ sont appelées les **coordonnées polaires** de P. Il est convenu qu'un angle est positif s'il est mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre à partir de l'axe polaire et au contraire négatif s'il est mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre. Au cas où $P = O$, alors $r = 0$ et il est convenu que $(0, \theta)$ représente le pôle quelle que soit la valeur de θ.

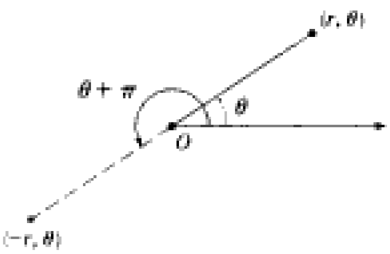


FIGURE 2

Nous étendons la signification des coordonnées polaires (r, θ) au cas où r est négatif en acceptant que, comme dans la figure 2, les points $(-r, \theta)$ et (r, θ) soient sur la même droite passant par O et à la même distance $|r|$ de O, mais de part et d'autre de O. Lorsque $r > 0$, le point (r, θ) appartient au même quadrant que θ ; mais si $r < 0$, il est dans le quadrant opposé par rapport au pôle. Remarquez que $(-r, \theta)$ et $(r, \theta + \pi)$ représentent le même point.

EXEMPLE 1 ■ Repérez les points de coordonnées polaires données.

a) $(1, 5\pi/4)$ b) $(2, 3\pi)$ c) $(2, -2\pi/3)$ d) $(-3, 3\pi/4)$.

SOLUTION Les points sont marqués dans la figure 3. En particulier, le point $(-3, 3\pi/4)$ est situé à trois unités du pôle et dans le quatrième quadrant parce que $3\pi/4$ est un angle qui termine dans le deuxième quadrant et que $r = -3$ est négatif.

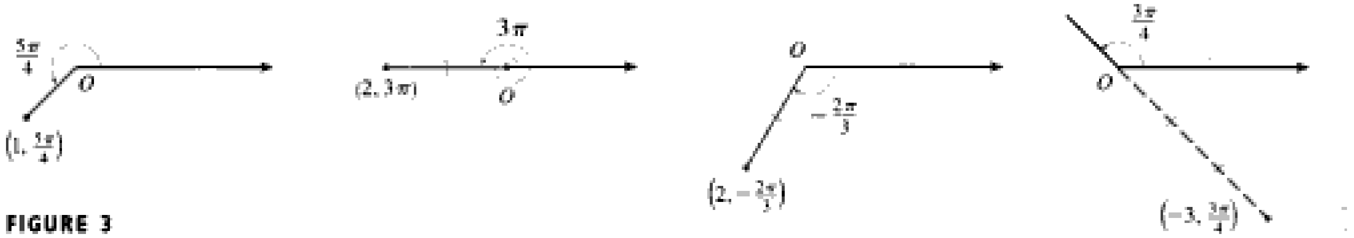


FIGURE 3

En coordonnées cartésiennes, chaque point n'a qu'une seule représentation alors qu'en coordonnées polaires chaque point en a plusieurs. Par exemple, le point $(1, 5\pi/4)$ de l'exemple 1 a) peut aussi être repéré par $(1, -3\pi/4)$ ou $(1, 13\pi/4)$ ou $(-1, \pi/4)$ (voyez la figure 4).

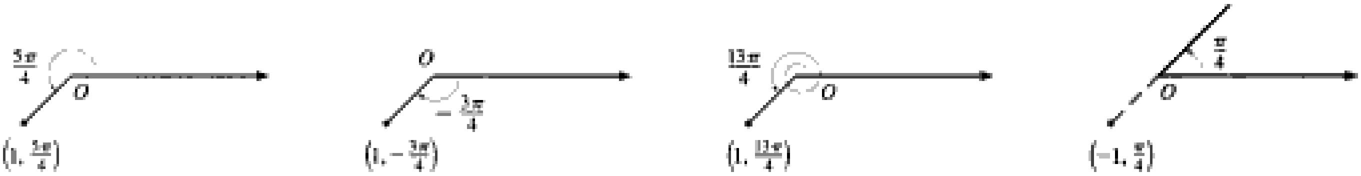


FIGURE 4

Comme à un tour complet dans le sens contraire des aiguilles d'une montre correspond un angle de 2π, un point représenté par les coordonnées polaires (r, θ) l'est aussi par

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{et} \qquad (-r, \theta + (2n+1)\pi),$$

où n est un entier quelconque.

La relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires se lit dans la figure 5, sur laquelle le pôle correspond à l'origine et l'axe polaire coïncide avec le demi-axe positif Ox. Si le point P admet le couple (x, y) en coordonnées cartésiennes et le couple (r, θ) en coordonnées polaires, alors, d'après la figure,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

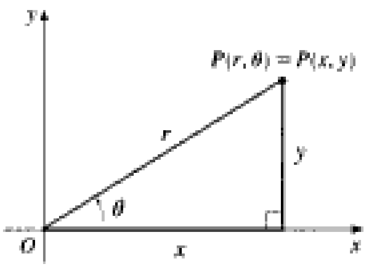


FIGURE 5

Aussi,

1 $$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta}$$

Même si les équations 1 ont été déduites de la figure 5, qui illustre le cas particulier où $r > 0$ et $0 < \theta < \pi/2$, elles sont néanmoins valables quelles que soient les valeurs de r et θ. (Voyez les définitions générales de $\sin\theta$ et $\cos\theta$ dans l'annexe C.)

Les équations 1 nous permettent de trouver les coordonnées cartésiennes d'un point au départ des coordonnées polaires. À l'inverse, pour trouver r et θ, connaissant x et y, il faut employer les équations

2 $$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{tg}\ \theta = \frac{y}{x},}$$

qui s'obtiennent aussi par lecture de la figure 5 ou se déduisent des équations 1.

EXEMPLE 2 ■ Convertissez les coordonnées polaires du point $(2, \pi/3)$ en coordonnées cartésiennes.

SOLUTION Étant donné que $r = 2$ et $\theta = \pi/3$, les équations 1 donnent

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Il s'agit donc du point $(1, \sqrt{3})$ en coordonnées cartésiennes.

EXEMPLE 3 ■ Quelles sont les coordonnées polaires du point de coordonnées cartésiennes $(1, -1)$?

SOLUTION Si on décide de prendre r positif, alors les équations 2 donnent

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Comme le point $(1, -1)$ appartient au quatrième quadrant, on choisit $\theta = -\pi/4$ ou $\theta = 7\pi/4$. Dès lors, une réponse possible est $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; une autre, $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$.

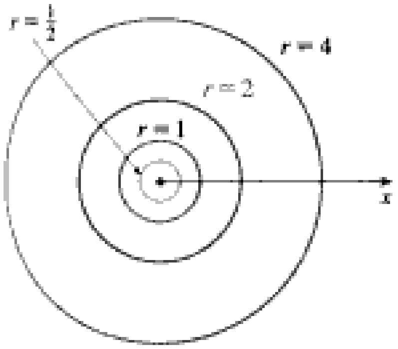


FIGURE 6

REMARQUE ● Les équations 2 ne déterminent pas univoquement θ à partir de x et y parce que, lorsque θ parcourt l'intervalle $0 \leqslant \theta < 2\pi$, chaque valeur de tg θ est atteinte deux fois. Il ne suffit donc pas, lors de la conversion des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires, de déterminer r et θ qui vérifient les équations 2, encore faut-il, comme dans l'exemple 3, choisir θ de manière à ce que le point soit dans le bon quadrant.

Le **graphique d'une équation polaire** $r = f(\theta)$, ou plus généralement $F(r, \theta) = 0$, est fait de tous les points P dont une représentation en coordonnées polaires vérifie l'équation.

EXEMPLE 4 ■ Quelle courbe est représentée par l'équation polaire $r = 2$?

SOLUTION La courbe se compose de tous les points (r, θ) où $r = 2$. Comme r représente la distance du pôle au point, la courbe $r = 2$ représente le cercle centré en O et de rayon 2. De façon générale, l'équation $r = a$ représente un cercle de centre O et de rayon $|a|$ (voyez la figure 6).

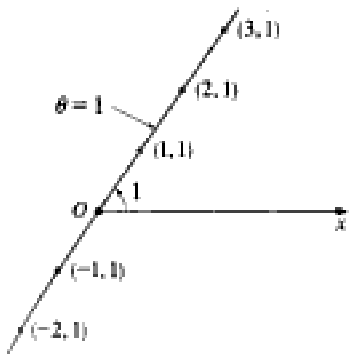


FIGURE 7

EXEMPLE 5 ■ Dessinez la courbe polaire $\theta = 1$.

SOLUTION Cette courbe comprend tous les points (r, θ) tels que l'angle polaire θ soit de 1 radian. C'est une droite qui passe par O et qui fait un angle de 1 radian avec l'axe polaire (voyez la figure 7). Remarquez que si $r > 0$, les points $(r, 1)$ de la droite se trouvent dans le premier quadrant, tandis que si $r < 0$, ils sont dans le troisième.

EXEMPLE 6 ■

a) Dessinez la courbe d'équation polaire $r = 2\cos\theta$.
b) Déterminez l'équation cartésienne de cette courbe.

SOLUTION

a) La figure 8 présente la table des valeurs de r pour certaines valeurs habituelles de θ et la position des points correspondants (r, θ). On relie ces points pour

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

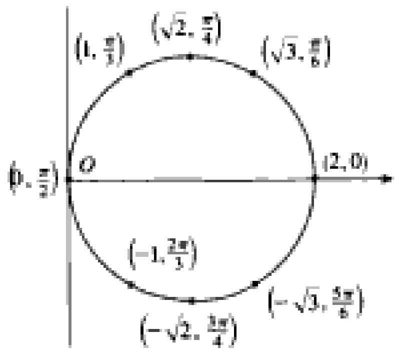


FIGURE 8
Table des valeurs et graphique de $r = 2\cos\theta$

obtenir le graphique qui semble être un cercle. Seules ont été prises en considération des valeurs de θ comprises entre 0 et π, puisque lorsque θ croît au-delà de π, on retombe sur les mêmes points.

b) Ce sont les formules 1 et 2 qui sont mises en œuvre pour convertir l'équation donnée en équation cartésienne. Comme de $x = r\cos\theta$, on tire $\cos\theta = x/r$, l'équation $r = 2\cos\theta$ devient $r = 2x/r$, ce qui donne

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

En complétant le carré, on arrive à

$$(x-1)^2 + y^2 = 1,$$

qui est bien l'équation d'un cercle centré en $(1, 0)$ et de rayon 1.

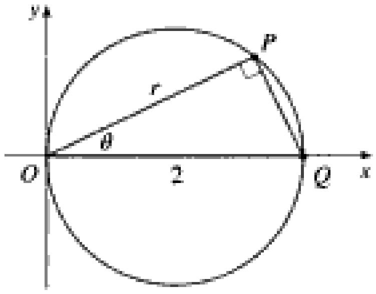


FIGURE 9

La figure 9 a pour but de montrer géométriquement que le cercle de l'exemple 6 a comme équation $r = 2\cos\theta$. Comme l'angle OPQ est un angle droit (pourquoi ?) il s'ensuit bien $r/2 = \cos\theta$.

EXEMPLE 7 ■ Dessinez la courbe $r = 1 + \sin\theta$.

SOLUTION Au lieu de marquer les points comme dans l'exemple 6, on commence par faire le graphique de $r = 1 + \sin\theta$ en coordonnées *cartésiennes* dans la figure 10 ; il suffit pour cela de translater la courbe sinus d'une unité vers le haut. Cette courbe permet de lire d'un coup d'oeil comment varient les valeurs de r lorsque θ augmente.

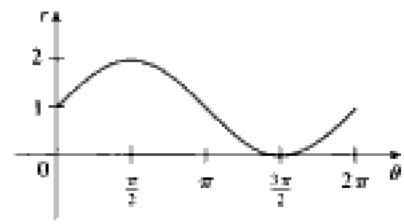


FIGURE 10
$r = 1 + \sin\theta$ en coordonnées cartésiennes, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

Par exemple, on lit que, lorsque θ va de 0 à $\pi/2$, r (la distance vis-à-vis de O) va de 1 à 2. On trace donc la partie correspondante de la courbe polaire dans la figure 11 (a). Lorsque θ croît de $\pi/2$ à π, la figure 10 montre que r décroît de 2 à 1, et il en résulte le tronçon suivant de la courbe dans la figure 11(b). Lorsque θ va de π à $3\pi/2$, r décroît de 1 à 0 ainsi que le montre la partie (c). Enfin, lorsque θ passe de $3\pi/2$ à 2π, r passe de 0 à 1, comme on le voit sur la partie (d). En faisant parcourir à θ des valeurs au-delà de 2π ou en dessous de 0, on ne ferait que repasser sur le premier tracé. La figure 11(e) de la courbe complète provient de la mise bout à bout des tronçons des figures 11(a)-(d). Cette courbe porte le nom de **cardioïde** parce qu'elle rappelle la forme d'un cœur.

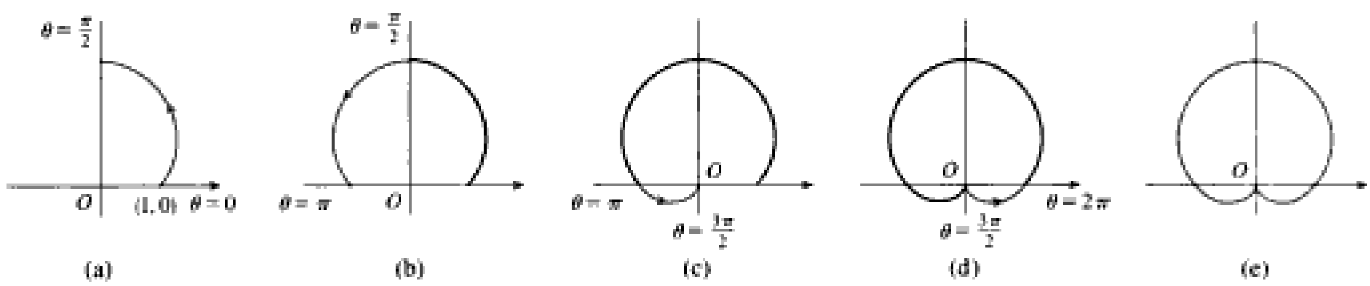


FIGURE 11 Étapes du tracé de la cardioïde $r = 1 + \sin\theta$

EXEMPLE 8 ■ Tracez la courbe $r = \cos 2\theta$.

SOLUTION On commence, comme dans l'exemple 7, par tracer $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ dans un repère cartésien, c'est la figure 12. Lorsque θ varie de 0 à $\pi/4$, la figure 12 montre que r varie de 1 à 0 et on dessine la portion correspondante de la courbe polaire dans la figure 13 (simplement fléchée). Lorsque θ croît de $\pi/4$ à $\pi/2$, r va de 0 à -1. Cela signifie que la distance par rapport à O augmente de 0 à 1, mais au lieu d'être dans le premier quadrant, cette portion de la courbe polaire (doublement fléchée) est dans le quadrant opposé par rapport à O, c'est-à-dire le troisième. Le reste de la courbe est obtenu de façon analogue, les flèches et les chiffres indiquant l'ordre dans lequel les divers morceaux sont tracés. La courbe finale a quatre boucles et s'appelle une **rosace à quatre lobes**.

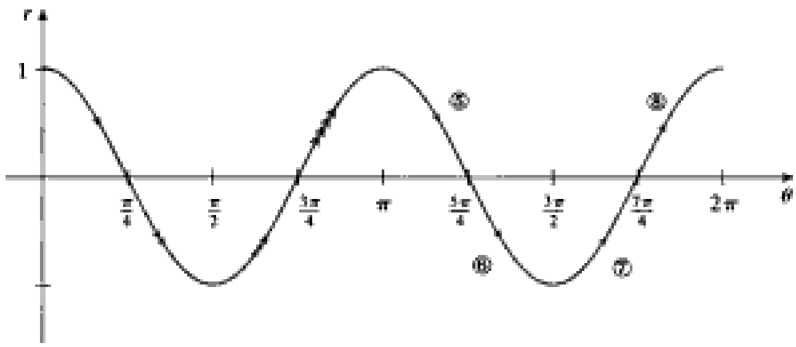


FIGURE 12
$r = \cos 2\theta$ en coordonnées cartésiennes

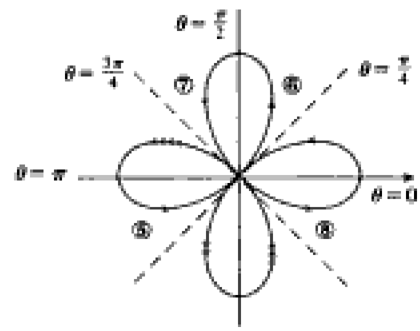


FIGURE 13
Rosace à quatre lobes $r = \cos 2\theta$

Tirer parti des symétries peut parfois être utile lors du tracé des courbes polaires. Les trois règles suivantes sont expliquées par la figure 14.

a) Si l'équation polaire ne change pas lorsque θ est remplacé par $-\theta$, la courbe est symétrique par rapport à l'axe polaire.

b) Si l'équation polaire ne change pas lorsque r est remplacé par $-r$, la courbe est symétrique par rapport au pôle. (Cela signifie que la courbe est inchangée après une rotation de 180° autour de l'origine.)

c) Si l'équation polaire ne change pas lorsque θ est remplacé par $\pi - \theta$, la courbe est symétrique par rapport à la droite verticale $\theta = \pi/2$.

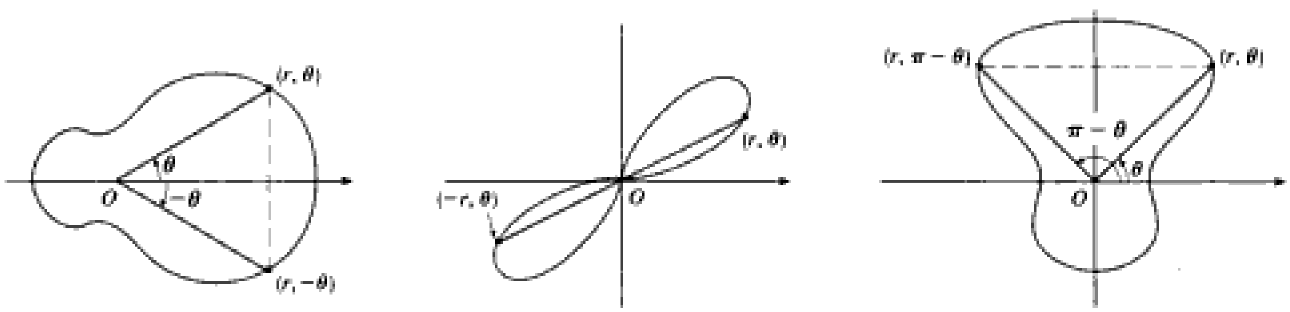


FIGURE 14 (a) (b) (c)

Les courbes tracées dans les exemples 6 et 8 sont symétriques par rapport à l'axe polaire, puisque $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Les courbes des exemples 7 et 8 sont symétriques par rapport à $\theta = \pi/2$ parce que $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ et $\cos 2(\pi - \theta) =$

$\cos 2\theta$. De plus, la rosace est aussi symétrique par rapport au pôle. Ces symétries auraient pu être exploitées au moment de dessiner les courbes. C'est ainsi, qu'à l'exemple 6, il aurait suffi de considérer les points correspondants à $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ et de prendre ensuite l'image symétrique par rapport à l'axe polaire pour compléter le cercle.

■ Les tangentes aux courbes polaires

Pour déterminer une tangente à une courbe polaire $r = f(\theta)$, on considère θ comme un paramètre et on décrit la courbe au moyen des équations paramétriques :

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

Ensuite, on fait appel à la méthode du calcul des pentes dans cette situation (équation 7 de la section 3.5) et à la Règle de dérivation du produit :

3
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}$$

Les tangentes sont horizontales aux points en lesquels $dy/d\theta = 0$ (mais $dx/d\theta \neq 0$). De même, les tangentes sont verticales aux points en lesquels $dx/d\theta = 0$ (mais $dy/d\theta \neq 0$).

Remarquez que pour les tangentes au pôle, c'est-à-dire quand $r = 0$, l'équation 3 se simplifie en

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \qquad \text{à condition que } \frac{dr}{d\theta} \neq 0.$$

Dans l'exemple 8, $r = \cos 2\theta = 0$ pour $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$. De ce fait, les droites $\theta = \pi/4$ et $\theta = 3\pi/4$ (ou $y = x$ et $y = -x$) sont des droites tangentes à la courbe $r = \cos 2\theta$ à l'origine.

EXEMPLE 9 ■

a) Déterminez la pente de la tangente au point de la cardioïde de l'exemple 7 correspondant à $\theta = \pi/3$.

b) En quels points de la cardioïde, la tangente est-elle horizontale ou verticale ?

SOLUTION Selon l'équation 3 appliquée à la courbe $r = 1 + \sin\theta$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta} = \frac{\cos\theta\sin\theta + (1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cos\theta - (1+\sin\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta(1 + 2\sin\theta)}{1 - 2\sin^2\theta - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)}.$$

a) La pente de la tangente au point en lequel $\theta = \pi/3$ est

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)\,(1 + 2\sin(\pi/3))}{(1 + \sin(\pi/3))\,(1 - 2\sin(\pi/3))}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,)}{(1 + \sqrt{3}/2)\,(1 - \sqrt{3}\,)} = \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3}\,)\,(1 - \sqrt{3}\,)}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1.$$

b) Observez que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\sin\theta) = 0 \qquad \text{quand } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \sin\theta)\,(1 - 2\sin\theta) = 0 \qquad \text{quand } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Par conséquent, les tangentes sont horizontales aux points $(2, \pi/2)$, $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$ et $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$ et verticales aux points $(\frac{3}{2}, \pi/6)$ et $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$. Lorsque $\theta = 3\pi/2$, $dy/d\theta$ et $dx/d\theta$ sont tous les deux nuls et il faut donc être prudent. Par application de la Règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta\to(3\pi/2)^-} \frac{1 + 2\sin\theta}{1 - 2\sin\theta} \lim_{\theta\to(3\pi/2)^-} \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$$

$$= -\frac{1}{3} \lim_{\theta\to(3\pi/2)^-} \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = \infty$$

Et par symétrie,

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+} \frac{dy}{dx} = -\infty$$

Au pôle, la tangente est donc verticale (voyez la figure 15).

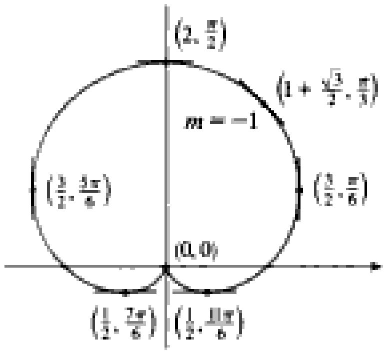


FIGURE 15
Des tangentes à $r = 1 + \sin\theta$

REMARQUE • Au lieu de retenir la formule 3, on peut employer directement la manière dont elle a été établie. Par exemple, on aurait pu écrire immédiatement dans l'exemple 9 :

$$x = r\cos\theta = (1 + \sin\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$y = r\sin\theta = (1 + \sin\theta)\sin\theta = \sin\theta + \sin^2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \sin 2\theta}{-\sin\theta + \cos 2\theta}$$

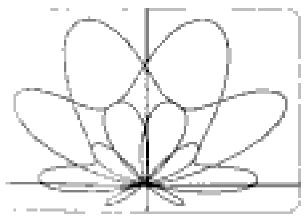


FIGURE 16
$r = \sin\theta + \sin^3(5\theta/2)$

Dessiner des courbes polaires à l'aide d'outils graphiques

Bien qu'il soit bon de savoir dessiner à la main des courbes polaires simples, il faut nécessairement recourir à une calculatrice graphique ou à un ordinateur lorsqu'il s'agit de représenter une courbe aussi compliquée que celle de la figure 16.

Certains outils graphiques disposent de commandes qui leur permettent de tracer directement le graphique d'une courbe polaire. D'autres par contre ne le font que par le biais des équations paramétriques. Dans ce cas, on prend l'équation polaire $r = f(\theta)$ et on écrit les équations paramétriques suivantes

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta.$$

Parfois, pour certaines machines, il est obligatoire d'appeler le paramètre t et non θ.

EXEMPLE 10 ■ Faites dessiner la courbe $r = \sin(8\theta/5)$.

SOLUTION On suppose que notre outil graphique ne dispose pas d'une commande intégrée de tracé de courbes polaires. Il faut donc dans ce cas travailler avec les équations paramétriques, qui sont

$$x = r\cos\theta = \sin(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\sin\theta = \sin(8\theta/5)\sin\theta$$

De toutes façons, il est nécessaire de déterminer le domaine de définition de θ. La question à se poser est celle-ci : combien de rotations complètes faut-il pour que la courbe se superpose à elle-même ? Si la réponse est notée n, alors

$$\sin\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \sin\frac{8\theta}{5}$$

et la question devient : pour quelles valeurs de n $16n\pi/5$ est-il un multiple pair de π ? Cela se produit pour la première fois pour $n = 5$. Par conséquent, on aura tracé la courbe entière une fois en faisant varier θ dans l'intervalle $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Après avoir changé θ en t, les équations paramétriques à introduire sont

$$x = \sin(8t/5)\cos t \qquad y = \sin(8t/5)\sin t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

et la figure 17 dévoile la courbe produite. Remarquez que cette courbe a 16 boucles. ■

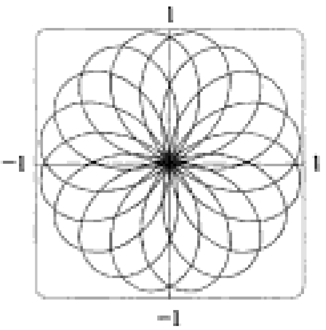


FIGURE 17
$r = \sin(8\theta/5)$

EXEMPLE 11 ■ Étudiez la famille des courbes polaires définie par $r = 1 + c\sin\theta$. Examinez comment la forme change avec c. (Ces courbes s'appellent des **limaçons**, à cause de leur forme pour certaines valeurs de c.)

L'exercice 45 consiste à prouver analytiquement les constatations faites sur les figures.

SOLUTION Voici les graphiques produits par ordinateur pour différentes valeurs de c. Lorsque $c > 1$, la courbe présente une boucle dont l'ampleur diminue avec c. Lorsque

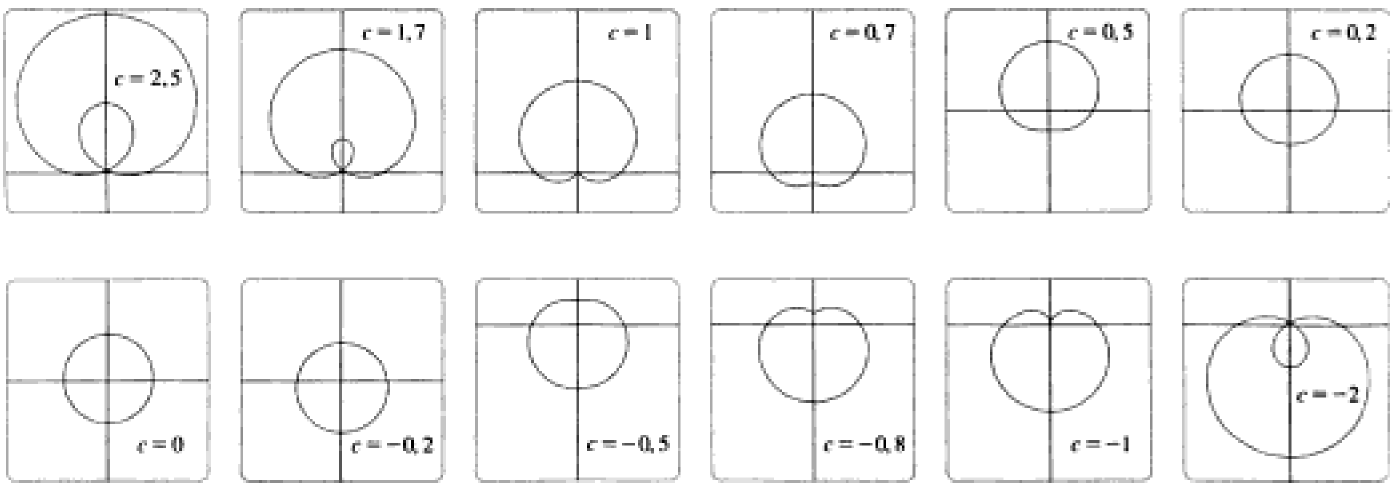


FIGURE 18 Quelques membres de la famille des limaçons $r = 1 + c\sin\theta$

$c = 1$, la boucle a disparu et la courbe est la cardioïde dessinée dans l'exemple 7. Pour c compris entre 1 et $\frac{1}{2}$, le point de rebroussement de la cardioïde s'est émoussé et est devenu une fossette. Quand c décroît encore de $\frac{1}{2}$ à 0, le limaçon a une forme ovale. Cet ovale devient de plus en plus rond quand $c \to 0$ et quand $c = 0$, cette courbe n'est autre que le cercle $r = 1$.

Le reste de la figure 18 montre que lorsque c est négatif, la courbe change de forme dans l'ordre inverse. Ces courbes ne sont en fait que les images symétriques par rapport à l'axe horizontal des courbes correspondant aux valeurs de c positives. □

G.1 Exercices

1-2 ■ Marquez le point de coordonnées polaires données. Cherchez ensuite deux autres couples de coordonnées polaires de ce point, l'un où $r > 0$ et l'autre où $r < 0$.

1. a) $(1, \pi/2)$ b) $(-1, \pi/5)$ c) $(3, 2)$

2. a) $(3, 0)$ b) $(2, -\pi/7)$ c) $(-1, \pi)$

3-4 ■ Marquez le point de coordonnées polaires données. Cherchez ensuite le couple de coordonnées cartésiennes du point.

3. a) $(\sqrt{2}, \pi/4)$ b) $(1{,}5,\ 3\pi/2)$ c) $(-1, \pi/3)$

4. a) $(2, 2\pi/3)$ b) $(4, 3\pi)$ c) $(-2, -5\pi/6)$

5-6 ■ Voici les coordonnées cartésiennes d'un point. Déterminez ses coordonnées polaires (r, θ) où $r > 0$ et $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. a) $(-1, 1)$ b) $(2\sqrt{3}, -2)$

6. a) $(-1, -\sqrt{3})$ b) $(3, 4)$

7-12 ■ Ombrez la région du plan faite des points dont les coordonnées polaires satisfont aux conditions données.

7. $r > 1$

8. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

9. $0 \leqslant r \leqslant 2, \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$

10. $1 \leqslant r < 3, \quad -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$

11. $3 < r < 4, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $-1 \leqslant r \leqslant 1, \quad \pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4$

13-16 ■ Trouvez une équation cartésienne de la courbe décrite par l'équation polaire donnée.

13. $r \sin\theta = 2$

14. $r = 2\sin\theta$

15. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

16. $r^2 = \sin 2\theta$

17-20 ■ Cherchez une équation polaire de la courbe représentée par l'équation cartésienne donnée.

17. $y = 5$

18. $y = x + 1$

19. $x^2 + y^2 = 25$

20. $x^2 - y^2 = 1$

21-32 ■ Dessinez la courbe d'équation polaire donnée.

21. $r = 5$

22. $\theta = 3\pi/4$

23. $r = 2\sin\theta$

24. $r = 1 + \cos\theta$

25. $r = \theta, \ \theta \geqslant 0$

26. $r = 1/\theta$

27. $r = 1 - 2\cos\theta$

28. $r = 2 + \cos\theta$

29. $r = 2\cos 4\theta$

30. $r = 2\cos 3\theta$

31. $r^2 = 4\cos 2\theta$

32. $r = 2\cos(3\theta/2)$

33. Montrez que la courbe polaire $r = 4 + 2\sec\theta$ (appelée une **conchoïde**) admet la droite $x = 2$ comme tangente verticale en établissant que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Aidez-vous de cela pour tracer la conchoïde.

34. Montrez que la droite $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe $r = \sin\theta \operatorname{tg}\theta$ (appelée **cissoïde de Dioclès**). Montrez aussi que la courbe est entièrement située dans la tranche $0 \leqslant x < 1$. Aidez-vous de cette caractéristique pour dessiner la cissoïde.

35-38 ■ Calculez la pente de la tangente à la courbe polaire donnée au point spécifié par la valeur de θ.

35. $r = 3\cos\theta, \quad \theta = \pi/3$

36. $r = \cos\theta + \sin\theta, \quad \theta = \pi/4$

37. $r = \theta, \quad \theta = \pi/2$

38. $r = \sin 3\theta, \quad \theta = \pi/6$

39-42 ■ Déterminez les points en lesquels la courbe donnée admet une tangente horizontale ou verticale.

39. $r = \cos 2\theta$

40. $r = \cos\theta + \sin\theta$

41. $r = 1 + \cos\theta$

42. $r = e^\theta$

43. Montrez que l'équation polaire $r = a\sin\theta + b\cos\theta$, où $ab \neq 0$, représente un cercle. Déterminez son centre et son rayon.

44. Montrez que les courbes $r = a\sin\theta$ et $r = a\cos\theta$ se coupent à angle droit.

45. a) Dans l'exemple 11, les graphiques suggèrent que le limaçon $r = 1 + c\sin\theta$ a une boucle intérieure quand $|c| > 1$. Démontrez que c'est vrai et déterminez les valeurs de θ auxquelles correspondent les points de la boucle intérieure.

b) De la figure 18, il ressort que le limaçon perd sa fossette quand $c = \frac{1}{2}$. Démontrez-le.

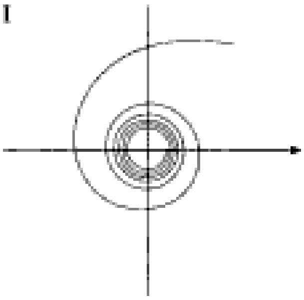
46. Mettez en correspondance les équations polaires et les graphiques étiquetés I-IV. Justifiez vos choix.

a) $r = \sin(\theta/2)$ b) $r = \sin(\theta/4)$

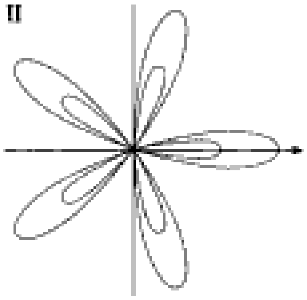
c) $r = \sec(3\theta)$ d) $r = \theta\sin\theta$

e) $r = 1 + 4\cos 5\theta$ f) $r = 1/\sqrt{\theta}$

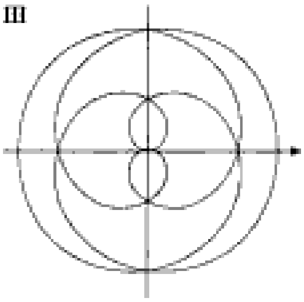
I



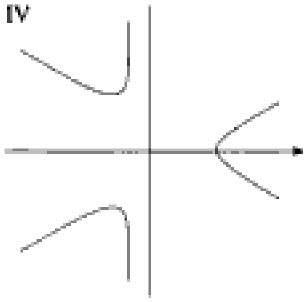
II



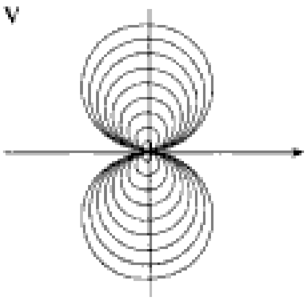
III



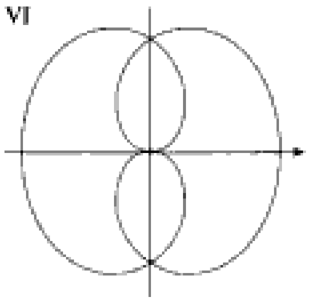
IV



V



VI



-50 ■ Produisez le graphique de la courbe polaire à l'aide d'un outil graphique. Choisissez l'intervalle de variation du paramètre qui fait apparaître la totalité de la courbe.

47. $r = 1 + 2\sin(\theta/2)$ (néphroïde)

48. $r = \sqrt{1 - 0{,}8\sin^2\theta}$ (hippopède)

49. $r = \sin(9\theta/4)$

50. $r = 1 + 4\cos(\theta/3)$

51. Comment les graphiques de $r = 1 + \sin(\theta - \pi/6)$ et $r =$ $1 + \sin(\theta - \pi/3)$ sont-ils liés à celui de $r = 1 + \sin\theta$? De façon générale, comment le graphique de $r = f(\theta - \alpha)$ est-il relié à celui de $r = f(\theta)$?

52. Cherchez graphiquement d'abord l'ordonnée du point le plus haut de la courbe $r = \sin 2\theta$. Calculez ensuite la valeur exacte grâce aux techniques du calcul différentiel.

53. a) Étudiez la famille des courbes définie par les équations polaires $r = \sin n\theta$, où n est un entier positif. Comment le nombres de boucles est-il lié à n ?

b) Que se passe-t-il si l'équation de la partie a) est remplacée par $r = |\sin n\theta|$?

54. Une famille de courbes est définie par les équations

$$r = 1 + c\sin n\theta,$$

où c est un nombre réel et n un entier positif. Comment le graphique change-t-il lorsque n croît ? Comment change-t-il lorsque n change ? Illustrez en montrant un nombre suffisant de graphiques pour soutenir vos conclusions.

55. Une famille de courbes a les équations polaires

$$r = \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a\cos\theta}.$$

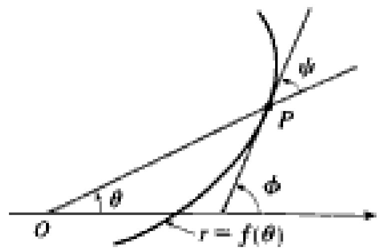
Observez comment le graphique change avec les valeurs du nombre a. En particulier, pointez les valeurs de transition d'une forme de courbe à une autre.

56. L'astronome Giovanni Cassini (1625-1712) a étudié la famille de courbes d'équation polaire

$$r^4 - 2c^2r^2\cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0,$$

où a et c sont des nombres réels positifs. Ces courbes portent le nom de **ovales de Cassini**, même si elles n'ont la forme ovale que pour certaines valeurs de a et c. (Cassini était convaincu que ces courbes représentaient les orbites planétaires mieux que les ellipses de Kepler.) Examinez les différentes formes que ces courbes peuvent présenter. En particulier, quelle relation lie a et c quand la courbe se divise en deux parties ?

57. Soit P un point quelconque (autre que l'origine) de la courbe $r = f(\theta)$. Si ψ est l'angle entre la tangente en P et le rayon OP.



montrez que

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r}{dr/d\theta}.$$

[*Suggestion :* Observez sur la figure que $\psi = \phi - \theta$.]

58. a) Grâce à l'exercice 57, démontrez que pour la courbe $r = e^{\theta}$, l'angle entre la tangente et le rayon-vecteur de n'importe lequel de ses points mesure $\pi/4$.

b) Illustrez la partie a) en dessinant la courbe et les tangentes aux points correspondant à $\theta = 0$ et $\pi/2$.

c) Démontrez que toutes les courbes polaires $r = f(\theta)$ qui jouissent de la propriété que l'angle ψ entre le rayon-vecteur et la tangente est une constante sont forcément de la forme $r = Ce^{k\theta}$, où C et k sont des constantes.

G.2 Les aires et les longueurs d'arcs en coordonnées polaires

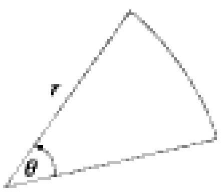


FIGURE 1

Dans cette section, nous mettons au point la formule de calcul de l'aire d'une région dont les frontières sont données par des équations polaires. Nous avons besoin pour cela de la formule de l'aire d'un secteur circulaire

1 $$A = \tfrac{1}{2} r^2 \theta,$$

où, comme dans la figure 1, r est le rayon et θ la mesure en radians de l'angle au centre du secteur. La formule 1 provient de ce que l'aire d'un secteur est proportionnelle à l'angle au centre : $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta$.

Soit $\mathcal{R}$ la région, illustrée dans la figure 2, délimitée par la courbe polaire $r = f(\theta)$ et par les rayons $\theta = a$ et $\theta = b$, où f est une fonction continue positive et où $0 < b - a \leqslant 2\pi$. Nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles d'extrémités $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ et de longueur égale $\Delta\theta$. Les rayons $\theta = \theta_i$ divisent alors $\mathcal{R}$ en n régions plus petites d'angle au centre $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si nous choisissons θ_i^* dans le sous-intervalle $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ d'indice i, l'aire ΔA_i de la $i^{\text{ième}}$ région vaut à peu près celle d'un secteur circulaire d'angle au centre $\Delta\theta$ et de rayon $f(\theta_i^*)$ (voyez la figure 3).

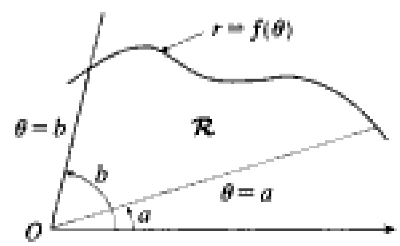


FIGURE 2

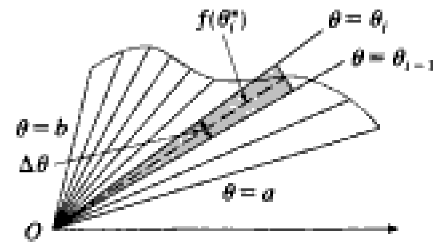


FIGURE 3

D'après la formule 1, l'aire de ce secteur est égale à

$$\Delta A_i \approx \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta,$$

et ainsi, l'aire totale A de $\mathcal{R}$ vaut à peu près

2 $$A \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta.$$

Il ressort de la figure 3 que, plus n est grand, meilleure est cette approximation. Or, les sommes 2 sont des sommes de Riemann de la fonction $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta = \int_a^b \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta.$$

Par conséquent, il semble acceptable (et il peut du reste être démontré) que la formule de l'aire A de la région polaire $\mathcal{R}$ est

3 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

La formule 3 est souvent écrite

4 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2} r^2\,d\theta$$

où il est entendu que $r = f(\theta)$. Notez la similitude entre les formules 1 et 4.

Lors de l'application des formules 3 ou 4, il est bon de visualiser la région comme balayée par un rayon qui tourne de la position initiale d'angle a jusqu'à la position finale d'angle b.

EXEMPLE 1 ■ Calculez l'aire de la région enfermée dans une boucle de la rosace à 4 lobes $r = \cos 2\theta$.

SOLUTION La courbe $r = \cos 2\theta$ a été dessinée dans l'exemple 8 de la section G.1. La figure 4 reproduit cette courbe en mettant en évidence que la région formée par la boucle de droite est entièrement balayée par un rayon qui tourne de $\theta = -\pi/4$ jusqu'à $\theta = \pi/4$. De là,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

On fait appel à la formule de l'angle demi

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

C'est la formule 17a de l'annexe C. Sinon, on peut appliquer la formule 64 de la table de primitives.

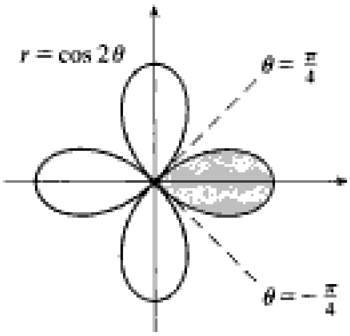


FIGURE 4

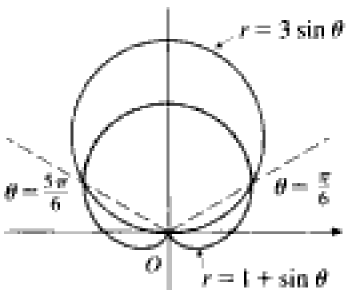


FIGURE 5

EXEMPLE 2 ■ Calculez la mesure de la région située à l'intérieur du cercle $r = 3\sin\theta$ et à l'extérieur de la cardioïde $r = 1 + \sin\theta$.

SOLUTION La région en question est ombrée dans la figure 5 où ont été tracés le cercle et la cardioïde (voyez l'exemple 7 de la section G.1). Les valeurs de a et b qui interviennent dans la formule 4 sont déterminées par les points d'intersection des deux courbes. Celles-ci se coupent quand $3\sin\theta = 1 + \sin\theta$, ou $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Les solutions de cette équation sont $\theta = \pi/6$ et $\theta = 5\pi/6$. L'aire demandée s'obtient en retranchant l'aire intérieure à la cardioïde entre $\theta = \pi/6$ et $\theta = 5\pi/6$ de l'aire intérieure au cercle entre $\theta = \pi/6$ et $\theta = 5\pi/6$:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3\sin\theta)^2\,d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \sin\theta)^2 d\theta.$$

Comme la région est symétrique par rapport à la droite verticale $\theta = \pi/2$, on peut écrire

$$A = 2\left[\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9\sin^2\theta\,d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\,d\theta\right]$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8\sin^2\theta - 1 - 2\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\cos 2\theta - 2\sin\theta)\,d\theta$$
$$= 3\theta - 2\sin 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi.$$

On fait appel à la formule de l'angle demi

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta).$$

C'est la formule 17b de l'annexe C. Sinon, on peut appliquer la formule 63 de la table de primitives.

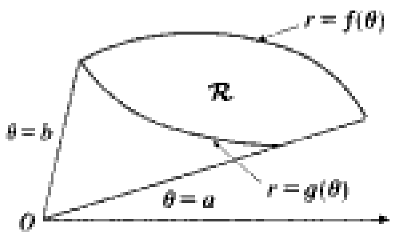


FIGURE 6

À l'exemple 2, on a en fait calculé l'aire d'une région délimitée par deux courbes polaires. De façon générale, soit $\mathcal{R}$ une région, telle que celle de la figure 6, dont les frontières se composent des courbes d'équation polaire $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ et $\theta = b$, où $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ et $0 < b - a \leqslant 2\pi$. L'aire A de $\mathcal{R}$ est obtenue en retranchant l'aire intérieure à $r = g(\theta)$ de l'aire intérieure à $r = f(\theta)$, ce qui, d'après la formule 3, conduit à

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\,d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_a^b ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\,d\theta.$$

MISE EN GARDE ● Le fait que la représentation en coordonnées polaires d'un point ne soit pas univoque rend parfois difficile le repérage des points en lesquels deux courbes polaires se coupent. Par exemple, il est évident, au vu de la figure 5, que le cercle et la cardioïde ont trois points d'intersection ; pourtant, la résolution simultanée des équations $r = 3\sin\theta$ et $r = 1 + \sin\theta$ n'a conduit qu'aux deux solutions $(\frac{3}{2}, \pi/6)$ et $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$. L'origine est aussi un point d'intersection, mais il ne peut pas sortir de la résolution simultanée des équations des courbes car l'origine n'a pas une unique représentation en coordonnées polaires qui vérifie à la fois les deux équations. Quand l'origine est représentée par $(0, 0)$ ou par $(0, \pi)$, alors elle vérifie $r = 3\sin\theta$ et donc elle se trouve sur le cercle ; et quand l'origine est représentée par $(0, 3\pi/2)$, elle vérifie $r = 1 + \sin\theta$ et se trouve donc sur la cardioïde. Imaginez un moment que deux points parcourent chacune des courbes à mesure que θ balaie l'intervalle $[0, 2\pi]$. Sur une des courbes, l'origine est atteinte quand $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, tandis que sur l'autre courbe, elle est atteinte quand $\theta = 3\pi/2$. Les deux points ne se rencontrent pas à l'origine parce qu'ils y passent à des moments différents. Cela n'empêche pas les deux courbes de s'y croiser néanmoins.

En conclusion, pour trouver *tous* les points d'intersection de deux courbes polaires, il est recommandé de les dessiner et un calculateur graphique ou un ordinateur sont particulièrement bienvenus pour cela.

EXEMPLE 3 ■ Chercher tous les points d'intersection des courbes $r = \cos 2\theta$ et $r = \frac{1}{2}$.

SOLUTION La résolution des équations $r = \cos 2\theta$ et $r = \frac{1}{2}$ conduit à $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$, ou $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Les valeurs de θ comprises entre 0 et 2π qui vérifient les deux équations sont donc $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Cette résolution repère donc les quatre points d'intersection $(\frac{1}{2}, \pi/6)$, $(\frac{1}{2}, 5\pi/6)$, $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$, $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$.

Pourtant, la figure 7 montre clairement que les courbes ont encore quatre autres points d'intersection, à savoir $(\frac{1}{2}, \pi/3)$, $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$, $(\frac{1}{2}, 4\pi/3)$, $(\frac{1}{2}, 5\pi/3)$. Ces points peuvent être obtenus soit par symétrie, soit en choisissant $r = -\frac{1}{2}$ comme équation du cercle et en résolvant simultanément les équations $r = \cos 2\theta$ et $r = -\frac{1}{2}$.

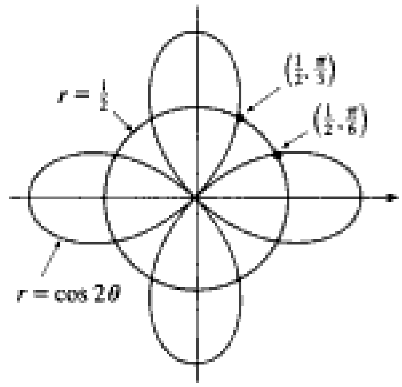


FIGURE 7

Les longueurs d'arcs

Pour déterminer la longueur d'une courbe polaire $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, nous regardons θ comme un paramètre et écrivons les équations paramétriques de la courbe

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta.$$

Nous calculons les dérivées par rapport à θ à l'aide de la Règle de dérivation du produit :

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

Ainsi, grâce à l'identité $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta \\ &\quad + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2.\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse que f' est une fonction continue, nous faisons appel à la formule 1 de la section 6.3 qui nous donne la longueur d'un arc

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Dès lors, la longueur d'une courbe polaire $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$ est

5 $$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta}$$

EXEMPLE 4 ■ Calculez la longueur de la cardioïde $r = 1 + \sin\theta$.

SOLUTION La cardioïde est dessinée dans la figure 11 de la section G.1. Pour avoir sa longueur totale, il faut faire varier le paramètre dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. La formule 5 donne

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \sin\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\sin\theta}\, d\theta.$$

Le calcul de cette intégrale effectué par un logiciel de calcul symbolique donne comme résultat $L = 8$.

G.2 Exercices

1-4 ■ Calculez l'aire de la région délimitée par la courbe donnée et appartenant au secteur indiqué.

1. $r = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
2. $r = e^{\theta}$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$
3. $r = 2\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/6$
4. $r = 1/\theta$, $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/6$

5-8 ■ Tracez la courbe et calculez l'aire de la région qu'elle entoure.

5. $r^2 = 4\cos 2\theta$
6. $r = 4(1 - \cos\theta)$
7. $r = 4 - \sin\theta$
8. $r = \sin 3\theta$

9. Dessinez la courbe $r = 2 + \cos 6\theta$ et calculez l'aire de la région qu'elle entoure.

10. La courbe d'équation polaire $r = 2\sin\theta\cos^2\theta$ porte le nom de **bifolium**. Dessinez-la et calculez l'aire de la région qu'elle entoure.

11-14 ■ Calculez l'aire d'une boucle de la courbe.

11. $r = \sin 5\theta$
12. $r = 2\cos 4\theta$
13. $r = 1 + 2\sin\theta$ (la boucle intérieure)
14. $r = 2 + 3\cos\theta$ (la boucle intérieure)

15-18 ■ Calculez l'aire de la région qui se trouve à l'intérieur de la première courbe et à l'extérieur de la seconde.

15. $r = 1 - \cos\theta$, $r = \frac{3}{2}$
16. $r = 3\cos\theta$, $r = 2 - \cos\theta$
17. $r = 4\sin\theta$, $r = 2$
18. $r = 1 + \cos\theta$, $r = 3\cos\theta$

19-22 ■ Calculez l'aire de la région qui se trouve entre les deux courbes.

19. $r = \sin\theta$, $r = \cos\theta$
20. $r = \sin 2\theta$, $r = \sin\theta$
21. $r = \sin 2\theta$, $r = \cos 2\theta$
22. $r^2 = 2\sin 2\theta$, $r = 1$

23. Calculer l'aire de la région intérieure à la grande boucle et extérieure à la petite boucle du limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

24. Dessinez l'hippopède $r = \sqrt{1 - 0{,}8\sin^2\theta}$ et le cercle $r = \sin\theta$ et calculez exactement l'aire de la région comprise entre ces deux courbes.

25-28 ■ Recherchez tous les points d'intersection des courbes données.

25. $r = \cos\theta$, $r = 1 - \cos\theta$
26. $r = \cos 3\theta$, $r = \sin 3\theta$
27. $r = \sin\theta$, $r = \sin 2\theta$
28. $r^2 = \sin 2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

29. Il n'est pas possible de déterminer exactement les points d'intersection de la cardioïde $r = 1 + \sin\theta$ et de la spirale $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Déterminez ces valeurs approximativement en les lisant sur un graphique. Servez-vous en pour calculer une estimation de l'aire de la région qui se trouve comprise entre ces deux courbes.

30. Estimez les valeurs de θ pour lesquelles les courbes $r = 3 + \sin 5\theta$ et $r = 6\sin\theta$ se coupent. Servez-vous en pour calculer une estimation de l'aire de la région qui se trouve comprise entre ces deux courbes.

31-34 ■ Calculez la longueur exacte des arcs polaires.

31. $r = 2^{\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
32. $r = e^{-\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi$
33. $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
34. $r = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

35-36 ■ À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, calculez avec 4 décimales correctes la longueur de la boucle décrite.

35. Une boucle de la rosace à quatre lobes $r = \cos 2\theta$.
36. La boucle de la conchoïde $r = 4 + 2\sec\theta$.

Sujet à découvrir

Les sections coniques en coordonnées polaires

Nous vous invitons à découvrir un traitement unifié des trois types de conique en termes de foyer et de directrice. Nous allons voir qu'une conique dont le foyer occupe l'origine admet une équation polaire très simple. Au chapitre 10, c'est l'équation de l'ellipse sous sa forme polaire qui nous conduit aux lois de Kepler du mouvement planétaire.

Soit F un point fixe (appelé **foyer**) et d une droite fixe (appelée **directrice**) du plan. Soit e un nombre positif fixé (appelé **excentricité**). Soit C l'ensemble de tous les points P du plan tels que

$$\frac{|PF|}{|Pd|} = e$$

(c'est-à-dire que, pour un point P, le rapport entre sa distance à F et sa distance à d est la constante e.) Vous remarquez immédiatement que si $e = 1$, alors $|PF| = |Pd|$ et la condition donnée devient tout simplement la définition d'une parabole telle qu'elle a été donnée dans l'annexe B.

1. Si le foyer F occupe l'origine et si la directrice est parallèle à l'axe Oy, à q unités vers la droite, son équation est $x = q$ et elle est perpendiculaire à l'axe polaire. Servez-vous de la figure 1 pour montrer que

$$r = e(q - r\cos\theta)$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires du point P.

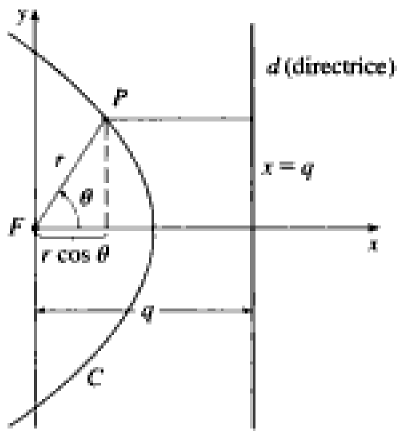


FIGURE 1

2. En convertissant l'équation polaire du problème 1 en coordonnées cartésiennes, montrez que la courbe C est une ellipse si $e < 1$. (Voyez l'annexe B pour une étude des ellipses.)
3. Montrez que C est une hyperbole si $e > 1$.
4. Démontrez que l'équation polaire

$$r = \frac{eq}{1 + e\cos\theta}$$

représente une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$ ou une hyperbole si $e > 1$.

5. Déterminez l'excentricité et la directrice de chacune des coniques suivantes. Identifiez de quelle conique il s'agit et dessinez-la.

a) $r = \dfrac{4}{1 + 3\cos\theta}$ b) $r = \dfrac{8}{3 + 3\cos\theta}$ c) $r = \dfrac{2}{2 + \cos\theta}$

6. Tracez dans un même système d'axes les coniques $r = e/(1 - e\cos\theta)$ pour $e = 0{,}4$, $0{,}6$, $0{,}8$ et 1. Comment la valeur de e affecte-t-elle la forme de la courbe ?

7. a) Montrez que l'équation polaire d'une ellipse de directrice $x = q$ peut être mise sous la forme

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}.$$

b) Écrivez une équation approximative de l'orbite elliptique de la planète Terre autour du Soleil (en un foyer) étant donné que l'excentricité vaut environ 0,017 et la longueur du plus grand axe $2{,}99 \times 10^8$ km.

8. a) Les planètes tournent autour du Soleil suivant une trajectoire elliptique dont le soleil occupe un des foyers. On appelle respectivement *périhélie* et *aphélie* les points de l'orbite où la distance au Soleil est la plus courte et la plus longue. (Voyez la figure 2.) Servez-vous de l'équation du problème 7 a) pour montrer que la distance du périhélie d'une planète au Soleil est $a(1 - e)$ et celle de l'aphélie, $a(1 + e)$.

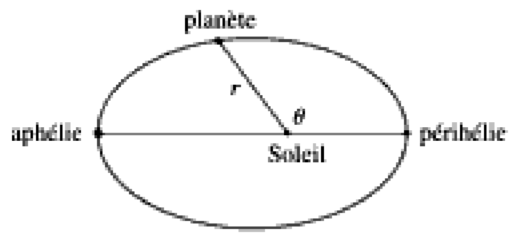


FIGURE 2

b) Utilisez les données du problème 7 b) pour calculer à quelle distance du Soleil se trouve la Terre à l'aphélie et au périhélie.

9. a) La planète Mercure suit une trajectoire elliptique d'excentricité 0,206. Elle ne s'approche pas du Soleil à moins de $4{,}6 \times 10^7$ km. Calculez sa distance maximale du Soleil à l'aide des résultats du problème 8 a).

b) Calculez la longueur de la trajectoire complète parcourue par Mercure au cours d'une révolution autour du Soleil. (Calculez l'intégrale définie à l'aide de votre calculatrice ou de votre ordinateur.)

H Les nombres complexes

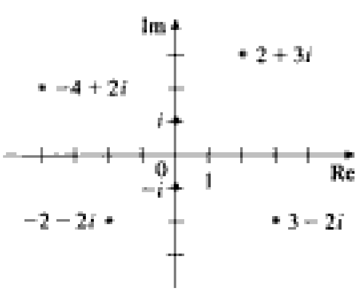


FIGURE 1
Des nombres complexes associés à des points du plan d'Argand-Cauchy

Un **nombre complexe** peut être représenté par une expression de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels et où i est un symbole qui jouit de la propriété $i^2 = -1$. Le nombre complexe $a + bi$ peut aussi être représenté par le couple (a, b) et marqué comme un point dans le plan (appelé plan d'Argand-Cauchy) comme dans la figure 1. De cette façon, le nombre complexe $i = 0 + 1 \cdot i$ a comme image le point de coordonnées $(0, 1)$.

La **partie réelle** d'un nombre complexe $a + bi$ est le nombre réel a et **la partie imaginaire** est le nombre réel b. La partie réelle de $4 - 3i$ par exemple est 4 et la partie imaginaire -3. Deux nombres complexes $a + bi$ et $c + di$ sont **égaux** si $a = c$ et $b = d$, c'est-à-dire si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires égales. Dans le plan d'Argand-Cauchy, l'axe Ox est appelé l'axe réel et l'axe Oy, l'axe imaginaire.

La somme ou la différence de deux nombres complexes est, par définition, un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont respectivement la somme ou la différence des parties réelles et des parties imaginaires :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Par exemple,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i.$$

Le produit des nombres complexes est défini de manière à ce que les lois habituelles de commutativité et de distributivité tiennent :

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= a(c + di) + (bi)(c + di)\\ &= ac + adi + bci + bdi^2\end{aligned}$$

Comme $i^2 = -1$, cette expression devient

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

EXEMPLE 1 ■

$$\begin{aligned}(-1 + 3i)(2 - 5i) &= (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)\\ &= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i.\end{aligned}$$

La division des nombres complexes s'apparente à la manière qu'on a de rendre rationnel le dénominateur d'une fraction rationnelle. À un nombre complexe $z = a + bi$ est associé $\bar{z} = a - bi$ que l'on appelle le **complexe conjugué**. Pour effectuer la divison de deux nombres complexes, on multiplie numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur.

EXEMPLE 2 ■ Exprimez le nombre $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ sous la forme $a + bi$.

SOLUTION On multiplie numérateur et dénominateur par le complexe conjugué de $2 + 5i$, à savoir par $2 - 5i$, et on exploite au passage le résultat de l'exemple 1 :

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i.$$

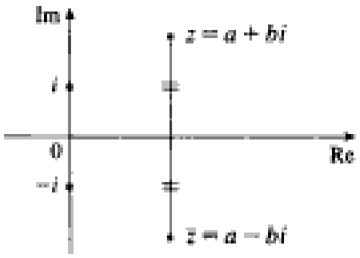


FIGURE 2

La figure 2 montre l'interprétation géométrique du complexe conjugué : $\bar{z}$ est l'image symétrique de l'image de z par rapport à l'axe réel. Voici encadrées les principales propriétés des complexes conjugués. Les démonstrations découlent de la définition et sont demandées à titre d'exercice (voyez l'exercice 18).

Propriétés des conjugués

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

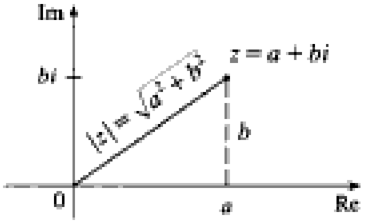


FIGURE 3

Le **module**, ou **valeur absolue**, $|z|$ d'un nombre complexe $z = a + bi$ est la distance de son image à l'origine. À la figure 3 on peut lire que, si $z = a + bi$, alors

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Remarquez que

$$z\bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2,$$

et donc

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2.}$$

Ceci explique pourquoi la procédure de division expliquée ci-dessus, et mise en œuvre dans l'exemple 2, est générale :

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Comme $i^2 = -1$, on peut penser que i est une racine carrée de -1. Mais on a aussi $(-i)^2 = i^2 = -1$, d'où $-i$ est également une racine carrée de -1. On dit que i est la **principale racine carrée** de -1 et on écrit $\sqrt{-1} = i$. De ce fait, pour un nombre positif quelconque c, on écrit

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i.$$

Désormais, avec cette convention, l'établissement et la formule des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont valables même quand $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLE 3 ■ Quelles sont les racines de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$?

SOLUTION Conformément à la formule, on a

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}.$$

On remarque que les solutions de l'équation dans l'exemple 3 sont des nombres complexes conjugués l'un de l'autre. Ce sera toujours le cas des solutions d'une équation quadratique quelconque $ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients a, b et c réels. (Si z est réel, $\bar{z} = z$ et z est son propre conjugué.)

On a vu que si on admet les nombres complexes comme solutions, alors toute équation quadratique a une solution. Plus généralement, il est vrai que toute équation polynomiale

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

de degré au moins égal à un a une solution parmi les nombres complexes. Ce résultat est connu comme le Théorème fondamental de l'algèbre ou Théorème de Gauss-d'Alembert et a été démontré par Gauss.

■ La forme polaire

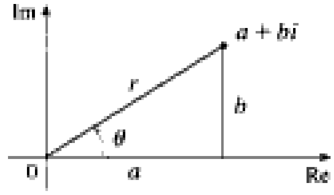


FIGURE 4

On sait que tout nombre complexe $z = a + bi$ a comme image un point (a, b) et que n'importe quel point peut être représenté par ses coordonnées polaires (r, θ) avec $r \geqslant 0$. Si on regarde la figure 4, on voit que

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta.$$

D'où, il vient

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\sin\theta)i.$$

Par conséquent, tout nombre complexe z peut être écrit sous la forme

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

où

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}\,\theta = \frac{b}{a}.$$

L'angle θ est appelé l'**argument** de z et on écrit $\theta = \operatorname{Arg} z$. Notez que $\operatorname{Arg} z$ n'est pas unique ; deux arguments quelconques de z diffèrent d'un multiple entier de 2π.

EXEMPLE 4 ■ Écrivez chacun des nombres suivants sous forme polaire.

a) $z = 1 + i$ b) $w = \sqrt{3} - i$.

SOLUTION

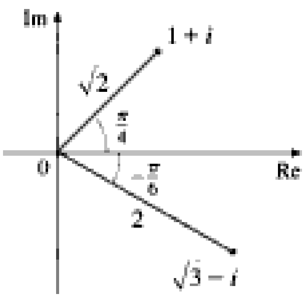


FIGURE 5

a) On calcule $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et $\operatorname{tg}\,\theta = 1$. On peut donc prendre $\theta = \pi/4$. La forme polaire est

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Ici, $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ et $\operatorname{tg}\,\theta = -1/\sqrt{3}$. Comme w est dans le quatrième quadrant, on prend $\theta = -\pi/6$ et

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Les images de z et w sont dans la figure 5.

La forme polaire des nombres complexes éclaire les opérations de multiplication et de division. Soit

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

deux nombres complexes écrits sous forme polaire. Alors

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \end{aligned}$$

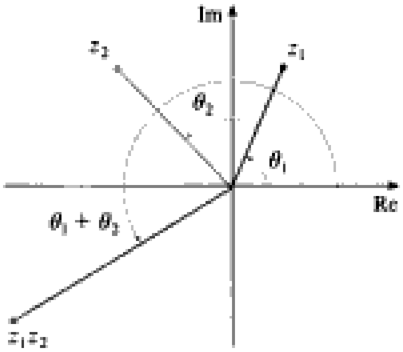


FIGURE 6

De là, grâce aux formules d'addition du sinus et du cosinus, on a

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]} \tag{1}$$

Cette formule dit que *pour multiplier deux nombres complexes, on multiplie les modules et on additionne les arguments.* (Voyez la figure 6.)

Un développement semblable exploitant les formules de soustraction des sinus et des cosinus montre que *pour diviser deux nombres complexes, on divise les modules et on soustrait les arguments.*

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0}$$

Le cas particulier où $z_1 = 1$ et $z_2 = z$ (et par conséquent $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \theta$) est illustré dans la figure 7. Il s'écrit

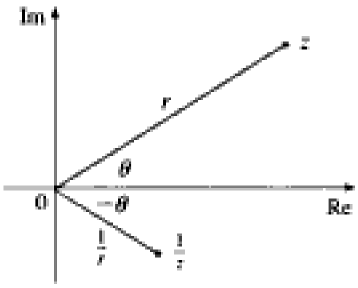


FIGURE 7

$$\boxed{\text{Si } z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).}$$

EXEMPLE 5 ■ Effectuez le produit des nombres complexes $1 + i$ et $\sqrt{3} - i$ en passant à la forme polaire.

SOLUTION D'après l'exemple 4, on a

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Maintenant, en vertu de l'équation 1,

$$\begin{aligned}(1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).\end{aligned}$$

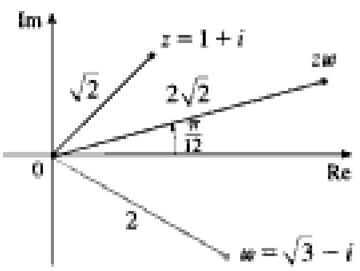


FIGURE 8

La figure 8 illustre ce produit.

Calculer des puissances de nombres complexes revient à employer la formule 1 plusieurs fois. Si

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

alors

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

et

$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta).$$

La formule générale de la puissance n d'un nombre complexe z porte le nom du mathématicien français Abraham de Moivre (1667-1754).

> **4 Formule de Moivre** Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et si n est un entier positif, alors
> $$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Elle affirme que *pour prendre la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre complexe, on élève le module à la $n^{\text{ième}}$ puissance et on multiplie l'argument par n.*

EXEMPLE 6 ■ Calculez $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$.

SOLUTION Comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, la forme polaire suit du résultat de l'exempe 4a) :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Reste à appliquer la Formule de Moivre,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i.$$

La Formule de Moivre sert aussi à découvrir les racines $n^{\text{ièmes}}$ des nombres complexes. Une racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z est un nombre complexe w tel que

$$w^n = z.$$

Écrivons ces deux nombres sous forme trigonométrique

$$w = s(\cos\phi + i\sin\phi) \qquad \text{et} \qquad z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

et appliquons la Formule de Moivre :

$$s^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

L'égalité de ces deux nombres complexes conduit à

$$s^n = r \qquad \text{ou} \qquad s = r^{1/n}$$

et

$$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{et} \qquad \sin n\phi = \sin\theta.$$

Compte tenu du fait que sinus et cosinus sont des fonctions périodiques de période 2π, il suit que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

D'où

$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right].$$

Il y a donc autant de racines que de valeurs différentes de w et c'est le cas pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

3 **Les racines d'un nombre complexe** Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et n un entier positif. Alors z a n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

où $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Il est à noter que le module de toutes ces racines est $|w_k| = r^{1/n}$. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de z se trouvent donc toutes sur le cercle de rayon $r^{1/n}$ du plan d'Argand-Cauchy. De plus, comme les arguments de ces n racines diffèrent de $2\pi/n$, elles sont régulièrement espacées autour du cercle.

EXEMPLE 7 ■ Déterminez les 6 racines sixièmes de $z = -8$ et marquez-les dans le plan d'Argand-Cauchy.

SOLUTION Sous forme trigonométrique, $z = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. L'expression des racines est, d'après 3,

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Les six racines de -8 sont alors obtenues en donnant à k dans cette formule successivement les valeurs $0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\,i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\,i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Les images de ces racines sont réparties sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$ comme le montre la figure 9.

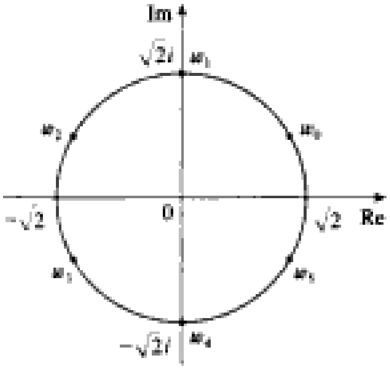


FIGURE 9
Les six racines sixièmes de $z = -8$

■ Les exponentielles complexes

Il est nécessaire de donner un sens à l'expression e^z quand $z = x + iy$ est un nombre complexe. La théorie des séries infinies que nous avons vue dans le chapitre 8 peut être étendue au cas où les termes sont des nombres complexes. Guidés par la série de Taylor de e^x (équation 11 de la section 8.7), nous définissons

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

et il s'avère que cette fonction exponentielle complexe a les mêmes propriétés que la fonction exponentielle réelle. En particulier, il est vrai que

5 $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Au cas où $z = iy$, avec y réel, l'équation 4 fournit, compte tenu de

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 i = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad i^5 = i, \ldots,$$

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

On a reconnu dans les parties réelles et imaginaires du second membre le développement en séries de Taylor de $\cos y$ et $\sin y$ (équations 16 et 15 de la section 8.7). Ce résultat est célèbre et connu sous le nom de **formule d'Euler** :

6 $$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

Les formules 5 et 6 mises ensemble donnent

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

EXEMPLE 8 ■ Calculez a) $e^{i\pi}$ b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUTION

a) D'après la formule d'Euler, on a

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i(0) = -1.$$

b) Grâce à l'équation 7, on a

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}.$$

Terminons par une démonstration de la Formule de Moivre, que la formule d'Euler rend aisée :

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

H Exercices

1-14 ■ Calculez l'expression et mettez-la sous la forme $a + bi$.

1. $(3 + 2i) + (7 - 3i)$ **2.** $(1 + i) - (2 - 3i)$

3. $(3 - i)(4 + i)$ **4.** $(4 - 7i)(1 + 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$ **6.** $\overline{2i(\frac{1}{2} - i)}$

7. $\dfrac{2 + 3i}{1 - 5i}$ **8.** $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$ **10.** $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3 **12.** i^{100}

13. $\sqrt{-25}$ **14.** $\sqrt{-3}\,\sqrt{-12}$

15-17 ■ Calculez le complexe conjugué et le module du nombre donné.

15. $3 + 4i$ **16.** $\sqrt{3} - i$ **17.** $-4i$

18. Démontrez les propriétés suivantes des nombres complexes.

a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

b) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$

c) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, où n est un entier positif. [*Suggestion :* Écrivez $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19-24 ■ Déterminez toutes les solutions de l'équation.

19. $4x^2 + 9 = 0$ **20.** $x^4 = 1$

21. $x^2 - 8x + 17 = 0$ **22.** $x^2 - 4x + 5 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$ **24.** $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25-28 ■ Écrivez le nombre sous forme polaire en choisissant l'argument compris entre 0 et 2π.

25. $-3 + 3i$ **26.** $1 - \sqrt{3}\,i$

27. $3 + 4i$ **28.** $8i$

29-32 ■ Déterminez les formes polaires de zw, z/w et $1/z$ après avoir mis z et w sous forme polaire.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}\,i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4(\sqrt{3} + i), \quad w = -3 - 3i$

33-36 ■ Calculez, par la Formule de Moivre, la puissance indiquée.

33. $(1 + i)^{20}$ **34.** $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

35. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$ **36.** $(1 - i)^8$

37-40 ■ Calculez les racines indiquées. Montrez leur image dans le plan d'Argand-Cauchy.

37. Les racines huitièmes de 1. **38.** Les racines cinquièmes de 32.

39. Les racines cubiques de i. **40.** Les racines cubiques de $1 + i$.

41-46 ■ Écrivez le nombre sous la forme $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$ **42.** $e^{2\pi i}$ **43.** $e^{i3\pi/4}$

44. $e^{-i\pi}$ **45.** $e^{2+i\pi}$ **46.** e^{1+2i}

47. Servez-vous de la Formule de Moivre avec $n = 3$ pour exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en termes de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

48. Utilisez la formule d'Euler pour démontrer les formules suivantes de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

49. Soit $u(x) = f(x) + ig(x)$ une fonction à valeurs complexes d'une variable réelle x. On suppose que les parties réelle et imaginaire $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions dérivables de x. Alors, la dérivée de u est définie par $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Employez cette définition ainsi que l'équation 7 pour démontrer que si $F(x) = e^{rx}$, alors $F'(x) = re^{rx}$, où $r = a + bi$ est un nombre complexe.

50. a) Si u est une fonction à valeurs complexes d'une variable réelle, l'intégrale indéfinie $\int u(x)dx$ est une primitive de u. Calculez

$$\int e^{(1+i)x}dx.$$

b) En considérant les parties réelle et imaginaire de l'intégrale de la partie a), calculez les intégrales réelles

$$\int e^x \cos x dx \qquad \text{et} \qquad \int e^x \sin x dx.$$

Comparez avec la méthode adoptée dans l'exemple 4 de la section 5.6.

I Réponses aux exercices impairs

CHAPITRE 1

Exercices 1.1 ■ page 23

1. a) -2 b) $2{,}8$ c) $-3{,}1$ d) $-2{,}5$, $0{,}3$
e) $[-3, 3]$, $[-2, 3]$ f) $[-1, 3]$

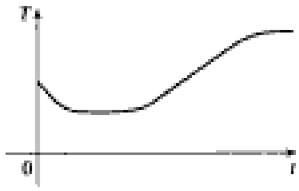
3. $[-85, 115]$, $[-325, 485]$, $[-210, 200]$

5. Oui, $[-3, 2]$, $[-2, 2]$

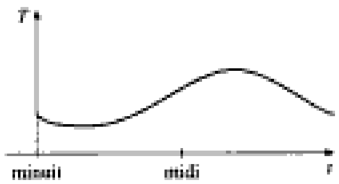
7. Non

9. Maladie ou diète.

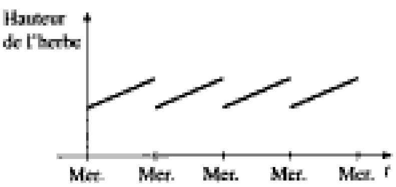
11.



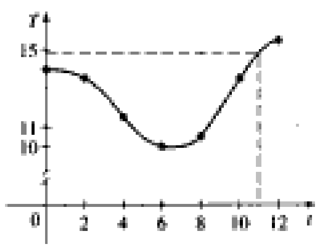
13.



15.



17. a)



b) 14,8°C

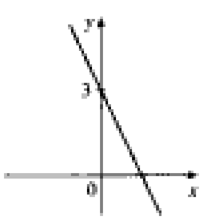
19. -4, 10, $3\sqrt{2}$, $5 + 7\sqrt{2}$, $2x^2 - 3x - 4$, $2x^2 + 7x + 1$, $4x^2 + 6x - 8$, $8x^2 + 6x - 4$

21. $-(h^2 + 3h + 2)$, $x + h - x^2 - 2xh - h^2$, $1 - 2x - h$

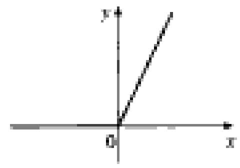
23. $]-\infty, -3[\cup]-3, 2[\cup]2, \infty[$

25. $]-\infty, \infty[$

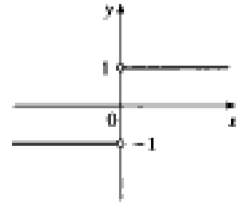
27. $]-\infty, \infty[$



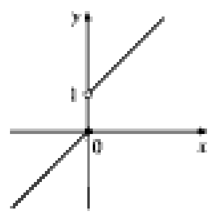
29. $]-\infty, \infty[$



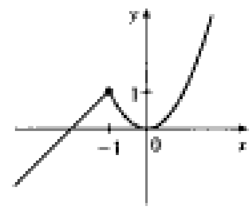
31. $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$



33. $]-\infty, \infty[$



35. $]-\infty, \infty[$



37. $f(x) = -\frac{7}{6}x - \frac{4}{3}$, $-2 \leqslant x \leqslant 4$

39. $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$

41. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 6 - 1{,}5x & \text{si } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

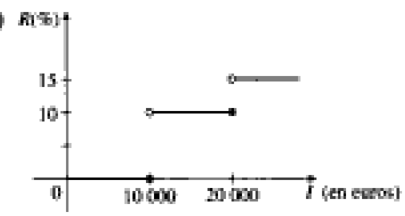
43. $A(L) = 10L - L^2$ $0 < L < 10$

45. $A(x) = \sqrt{3}x^2/4$, $x > 0$

47. $S(x) = x^2 + (8/x)$, $x > 0$

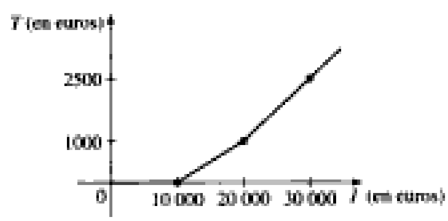
49. $V(x) = 4x^3 - 64x^2 + 240x$, $0 < x < 6$

51. a)



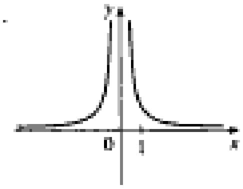
b) 400 euros, 1900 euros

c)

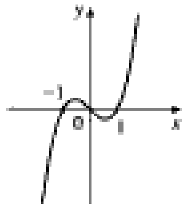


53. a) $(-5, 3)$ b) $(-5, -3)$

55. Paire.



57. Aucun des deux.
59. Impaire.



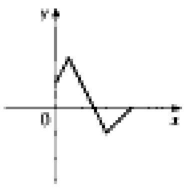
Exercices 1.2 ■ page 38

1. a) Racine b) Algébrique c) Polynomiale (degré 9)
d) Rationnelle e) Trigonométrique f) Logarithme

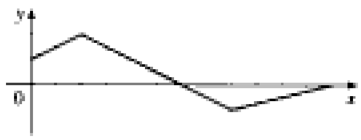
3. a) g b) h c) f

5. a) $y = f(x) + 3$ b) $y = f(x) - 3$ c) $y = f(x - 3)$
d) $y = f(x + 3)$ e) $y = -f(x)$ f) $y = f(-x)$
g) $y = 3f(x)$ h) $y = \frac{1}{3}f(x)$

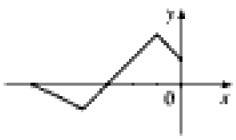
7. a)



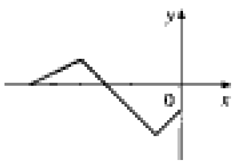
b)



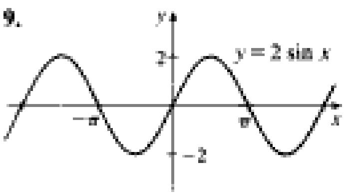
c)



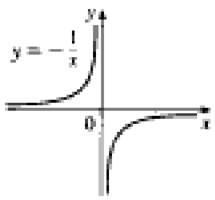
d)



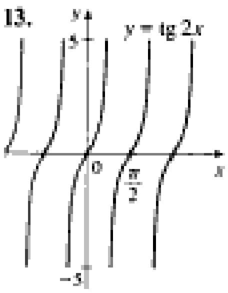
9.



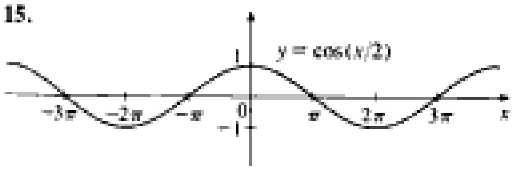
11.



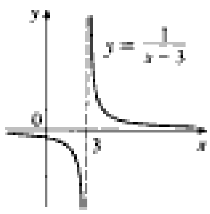
13.



15.

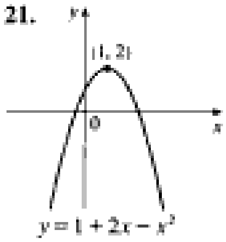


17.

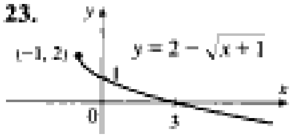


19.

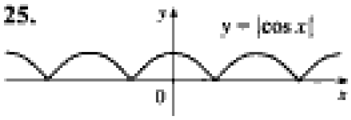
21.



23.

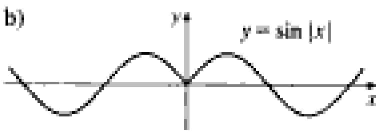


25.

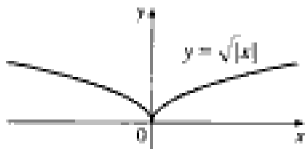


27. a) La partie du graphique à droite de l'axe Oy est réfléchie par rapport à Oy.

b)

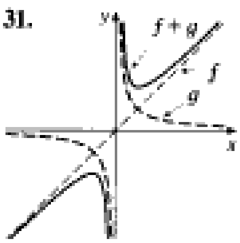


c)



29. $(f + g)(x) = x^3 + 5x^2 - 1,\ ]-\infty, +\infty[$
$(f - g)(x) = x^3 - x^2 + 1,\ ]-\infty, +\infty[$
$(fg)(x) = 3x^5 + 6x^4 - x^3 - 2x^2,\ ]-\infty, +\infty[$
$(f/g)(x) = (x^3 + 2x^2)/(3x^2 - 1),\ \{x \mid x \neq \pm 1/\sqrt{3}\}$

31.



33. $(f \circ g)(x) = 3(6x^2 + 7x + 2),\ ]-\infty, +\infty[$
$(g \circ f)(x) = 6x^2 - 3x + 2,\ ]-\infty, +\infty[$
$(f \circ f)(x) = 8x^4 - 8x^3 + x,\ ]-\infty, +\infty[$
$(g \circ g)(x) = 9x + 8,\ ]-\infty, +\infty[$

35. $(f \circ g)(x) = \sqrt{-x},\ ]-\infty, 0]$
$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}, [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$
$(f \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 2},\ ]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty[$
$(g \circ g)(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}, [0, 1]$

37. $(f \circ g \circ h)(x) = 1/(x^2 + 2)^3$

39. $g(x) = x - 9, f(x) = x^5$

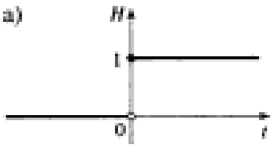
41. $g(x) = x^2, f(x) = x/(x + 4)$

43. $h(x) = x^2, g(x) = 3^x, f(x) = 1 - x$

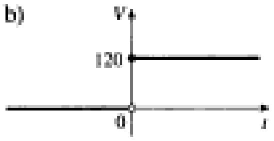
45. a) 4 b) 3 c) 0 d) N'existe pas ; $f(6) = 6$ n'appartient pas au domaine de définition de g. e) 4 f) -2

47. a) $r(t) = 60t$
b) $(A \circ r)(t) = 3600\pi t^2$; l'aire du cercle comme une fonction du temps.

49. a)

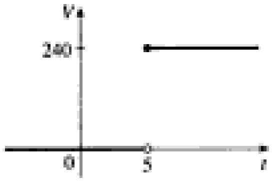


b)



$V(t) = 120H(t)$

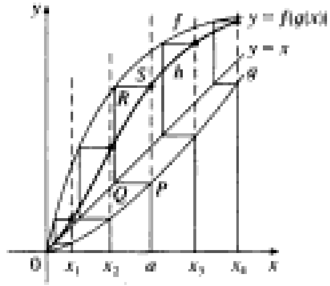
c)



$V(t) = 240H(t - 5)$

51. Oui

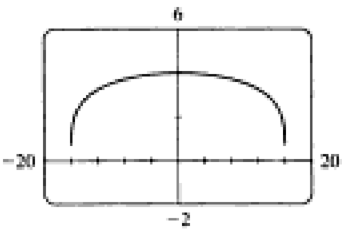
53. a) $P(a, g(a)), Q(g(a), g(a))$ b) $(g(a), f(g(a)))$
d)



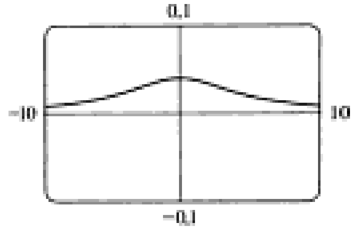
Exercices 1.3 ■ page 47

1. c)

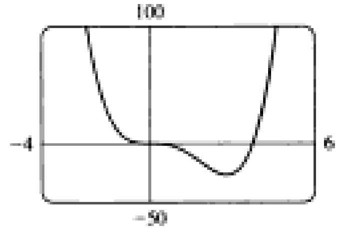
3. $[-20, 20]$ sur $[-2, 6]$



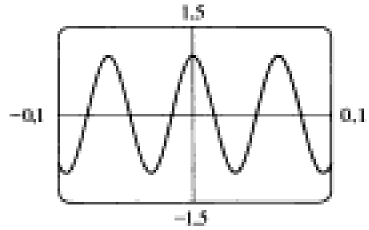
5. $[-10, 10]$ sur $[-0,1; 0,1]$



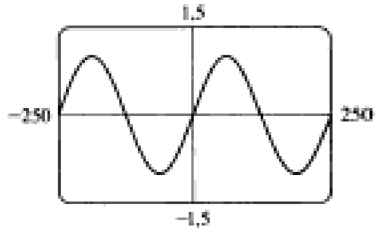
7. $[-4, 6]$ sur $[-50, 100]$



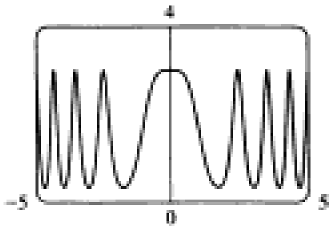
9. $[-0,1; 0,1]$ sur $[-1,5; 1,5]$



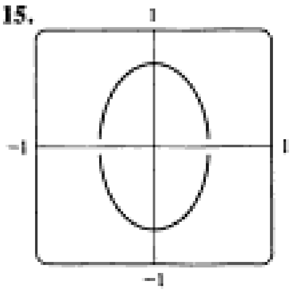
11. $[-250, 250]$ sur $[-1,5; 1,5]$



13. $[-5, 5]$ sur $[0, 4]$



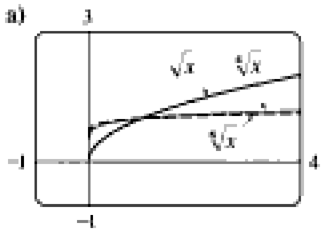
15.



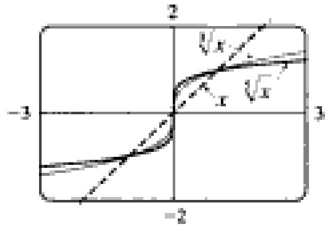
17. 0,67 **19.** −1,90, 0, 1,90 **21.** g

23. $-0{,}85 < x < 0{,}85$

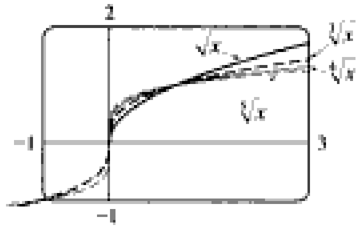
25. a)



b)

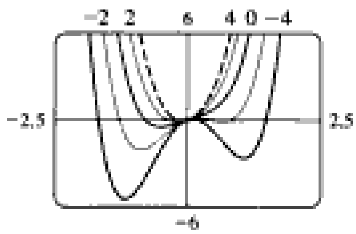


c)



d) Les graphiques des fonctions racine d'ordre pair ressemblent à $\sqrt{x}$, ceux des racines d'ordre impair, à $\sqrt[3]{x}$. Lorsque n croît, le graphique de $\sqrt[n]{x}$ devient plus raide à proximité de 0 et plus plat pour $x > 1$.

27.



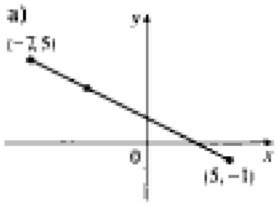
Lorsque $c < 0$, le graphique a trois bosses : deux minimums et un maximum. Ces bosses s'aplatissent à mesure que c augmente jusqu'à $c = 0$. Alors deux des bosses disparaissent et il ne reste qu'un minimum. Cette unique bosse se déplace alors vers la droite et s'approche de l'origine lorsque c augmente.

29. La bosse s'accentue et se déplace vers la droite.

31. Si $c < 0$, la boucle est à droite de l'origine ; si $c > 0$, la boucle est à gauche. Plus c est proche de l'origine, plus la boucle est grande.

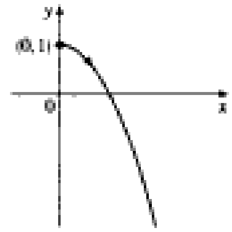
Exercices 1.4 ■ page 53

1. a)



b) $x + 2y = 3$, $-7 \leqslant x \leqslant 5$

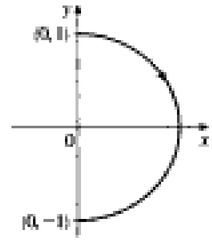
3. a)



b) $y = 1 - x^2$, $x \geqslant 0$

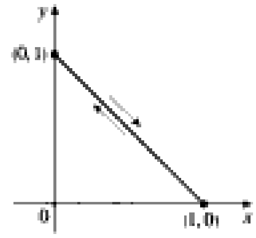
5. a) $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$

b)



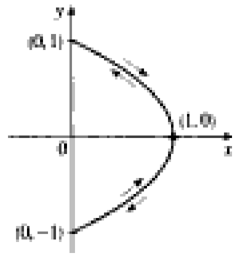
7. a) $x + y = 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$

b)



9. a) $x = 1 - y^2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

b)

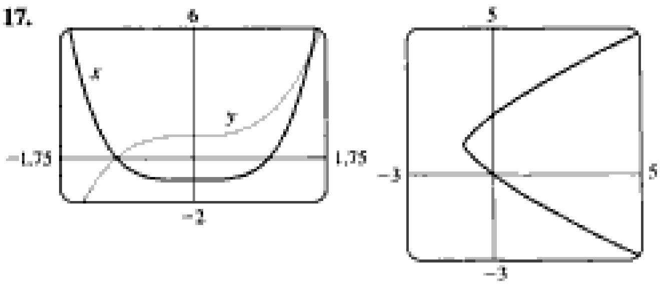


11. Se déplace dans le sens contraire des aiguilles d'une montre le long du cercle $x^2 + y^2 = 1$ depuis $(-1, 0)$ jusqu'à $(1, 0)$.

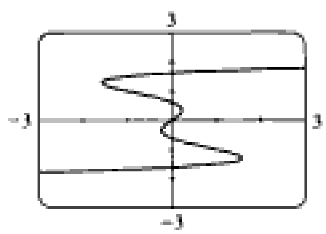
13. Fait une fois le tour de l'ellipse $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ dans le sens des aiguilles d'une montre depuis et jusqu'à $(0, 3)$

15. Descent sur la branche de l'hyperbole $xy = 1$ située dans le premier quadrant depuis $(1, 1)$ jusqu'à $(\sin 1, \operatorname{cosec} 1)$.

17.



21.



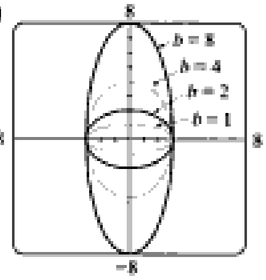
23. a) $x = 2\cos t$, $y = 1 - 2\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

b) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 6\pi$

c) $x = 2\cos t$, $y = 1 + 2\sin t$, $\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

25. a) $x = a \sin t,\ y = b \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

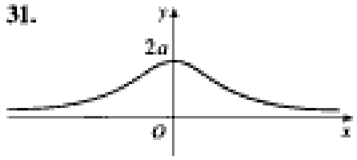
b)



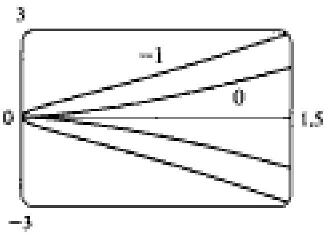
c) Lorsque b augmente, l'ellipse se rétrécit verticalement.

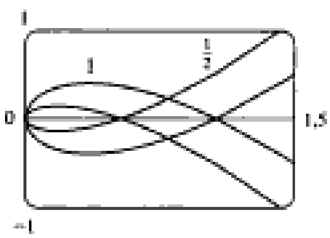
29. $x = a \cos\theta,\ y = b \sin\theta$; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, ellipse.

31.



33. Lorsque $c = 0$, il y a un point de rebroussement ; lorsque $c > 0$, il y a une boucle dont la taille augmente lorsque c augmente.





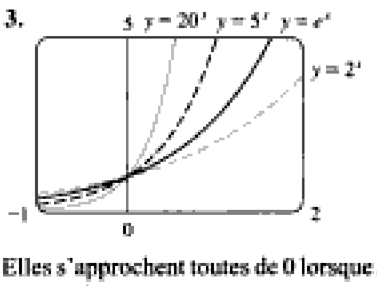
35. Lorsque n augmente, le nombre d'oscillations augmente ; a et b déterminent la largeur et la hauteur.

Exercices 1.5 ■ page 62

1. a) $f(x) = a^x, a > 0$ b) $\mathbb{R}$ c) $[0, \infty[$

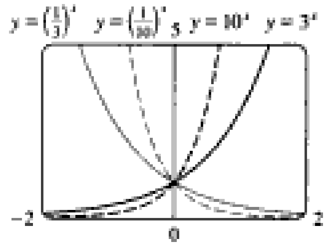
d) Voyez les figures 4c), 4b) et 4a), respectivement.

3.



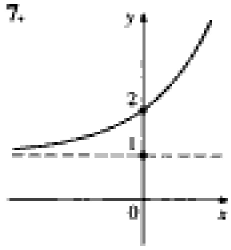
Elles s'approchent toutes de 0 lorsque $x \to -\infty$, elles passent toutes par $(0, 1)$ et elles sont toutes croissantes. Plus la base est grande, plus rapide est le taux de croissance pour $x > 0$.

5.

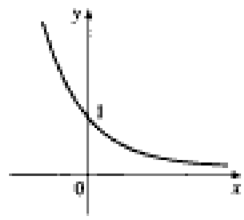


Les fonctions de base supérieure à 1 sont croissantes tandis que celles de base inférieure à 1 sont décroissantes. Les graphiques de ces dernières sont les symétriques des premières par rapport à l'axe Oy.

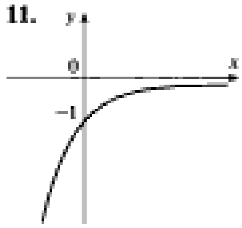
7.



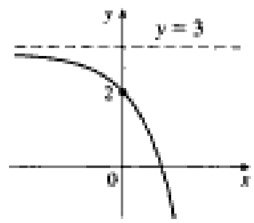
9.



11.



13.



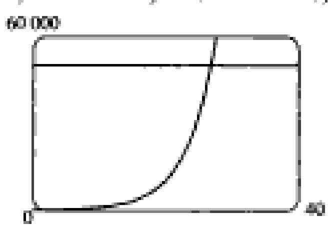
15. a) $y = e^x - 2$ b) $y = e^{x-2}$ c) $y = -e^x$

d) $y = e^{-x}$ e) $y = -e^{-x}$

17. $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **21.** En $x \approx 35{,}8$

23. a) 3200 b) $100 \cdot 2^{t/3}$ c) 10 159

d) $t \approx 26{,}9$ h



Exercices 1.6 ■ page 73

1. a) Voyez la définition 1.

b) Elle doit satisfaire au test de la droite horizontale.

3. Non **5.** Non **7.** Oui **9.** Oui **11.** Non

13. Non **15.** Non **17.** 2 **19.** 0

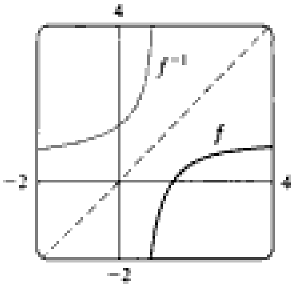
21. $F = \frac{9}{5}C + 32$; la température en degrés Fahrenheit comme fonction de la température en degrés Celsius ; $]-273{,}15; \infty[$

23. $f^{-1}(x) = (5x - 1)/(2x + 3)$

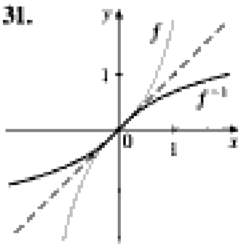
25. $f^{-1}(x) = (x^2 - 2)/5,\ x \geqslant 0$

27. $y = e^x - 3$

29. $f^{-1}(x) = \sqrt{2/(1-x)}$



31.

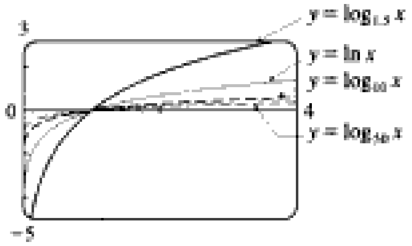


33. a) Elle est définie comme la réciproque de la fonction exponentielle de base a, c'est-à-dire $\log_a x = y \iff a^y = x$.
b) $]0, \infty[$ c) $\mathbb{R}$ d) Voyez la figure 13.

35. a) 6 b) −2 **37.** a) 2 b) 2 **39.** $3 \ln 2$

41. a) 2,321928 b) 2,025563

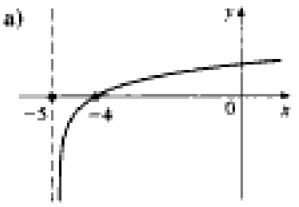
43.



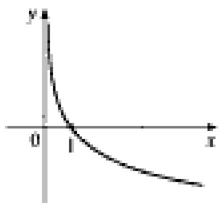
Tous les graphiques tendent vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0^+, ils passent tous par $(1, 0)$ et sont tous croissants. Plus la base est grande, plus lente est la croissance pour $x > 0$.

45. Environ 335,5 km

47. a)



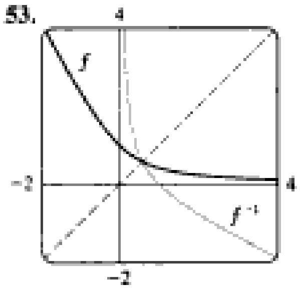
b)



49. a) $4 \ln 2$ b) $1/e$

51. a) $5 + \log_2 3$ ou $5 + (\ln 3)/\ln 2$ b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4e})$

53.



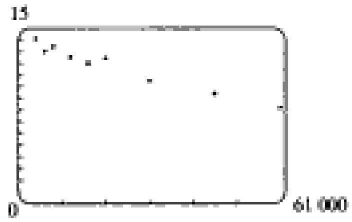
55. $f^{-1}(x) =$
$-(\sqrt[6]{4}/6)(\sqrt[3]{A - 27x^2 + 20} - \sqrt[3]{A + 27x^2 - 20} + \sqrt[3]{2})$, où $A = 3\sqrt{3}\sqrt{27x^4 - 40x^2 + 16}$; deux de ces expressions sont complexes.

57. a) $f^{-1}(n) = (3/\ln 2)\ln(n/100)$; le temps écoulé pour qu'il y ait n bactéries. b) Après environ 26,9 h.

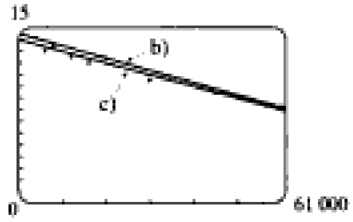
59. a) $y = \ln x + 3$ b) $y = \ln(x+3)$ c) $y = -\ln x$
d) $y = \ln(-x)$ e) $y = e^x$ f) $y = e^{-x}$
g) $y = -e^x$ h) $y = e^x - 3$.

Exercices 1.7 ■ page 82

1. a)



Oui, un modèle linéaire serait approprié.
b) $y = -0{,}000105357x + 14{,}521429$



c) $y = -0{,}0000997855x + 13{,}950764$ [Voyez le graphique en b)]
d) Environ 11,5 sur 100 personnes e) Environ 6 %

3. a) $y = 301{,}813054e^{-0{,}198762x}$;
$y = -0{,}00243042x^4 + 0{,}135159x^3 - 2{,}014322x^2 - 4{,}055294x + 199{,}092227$
b) Modèle exponentiel : environ 202,8 millions de tonnes en 1972, 27,8 millions de tonnes en 1982. Modèle polynomial : environ 184 millions de tonnes en 1972, 43,5 millions de tonnes en 1982

5. $y = 0{,}0272238976x^3 - 162{,}1725931x^2 + 322\,017{,}833x - 213\,136\,407{,}3$; 1982, 31,4 % ; 1995, 21,7 % ; environ 1 an.

Chapitre 1 Révision ■ page 84

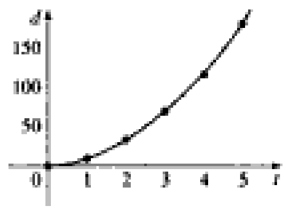
Vrai-Faux

1. Faux **3.** Faux **5.** Vrai **7.** Vrai

Exercices

1. a) 2,7 b) 2,3 ; 5,6 c) $[-6, 6]$ d) $[-4, 4]$
e) $[-4, 4]$ f) Non ; f ne satisfait pas au test de la droite horizontale.
g) Impaire ; son graphique est symétrique par rapport à l'origine.

3. a)



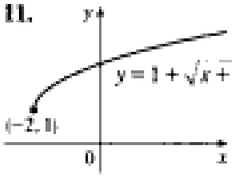
b) 150 dm

5. $[-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3]$, $[0, 2]$ **7.** $]-\infty, \infty[$, $]0, 1]$

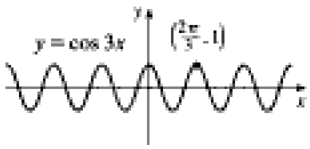
9. a) En translatant la courbe de 8 unités vers le haut.
b) En translatant la courbe de 8 unités vers la gauche.

c) En étirant la courbe verticalement d'un facteur 2, puis en la translatant d'une unité vers le haut.
d) En translatant la courbe de 2 unités vers la droite et 2 unités vers le bas.
e) En prenant l'image symétrique par rapport à l'axe Ox.
f) En prenant l'image symétrique par rapport à la droite $y = x$ (à condition que f soit injective).

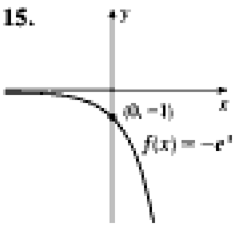
11.



13.

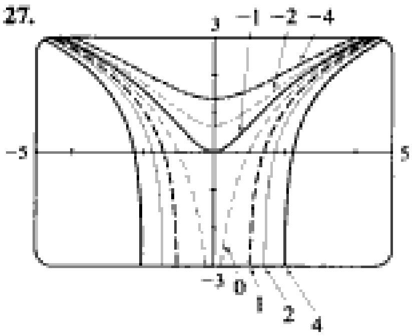


15.



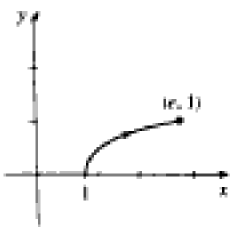
17. a) Ni l'un, ni l'autre. b) Impaire c) Paire d) Ni l'un, ni l'autre.
19. $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 9)$, $]-\infty, -3[\,\cup\,]3, \infty[$
$(g \circ f)(x) = (\ln x)^2 - 9$, $]0, \infty[$
$(f \circ f)(x) = \ln \ln x$, $]1, \infty[$
$(g \circ g)(x) = (x^2 - 9)^2 - 9$, $]-\infty, \infty[$
21. 1 **23.** a) 9 b) 2
25. a) $\frac{1}{16}$ g b) $m(t) = 2^{-t/4}$
c) $t(m) = -4 \log_2 m$; le temps écoulé jusqu'à ce qu'il reste m grammes de ^{100}Pd.
d) Environ 26,6 jours.

27.



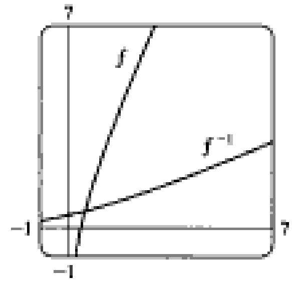
Lorsque $c < 0$, f est définie partout. Lorsque c croît, la déclivité en $x = 0$ devient plus profonde. Lorsque $c \geqslant 0$, la courbe présente une asymptote en $x = \pm\sqrt{c}$.

29. a)



b) $y = \sqrt{\ln x}$

31.

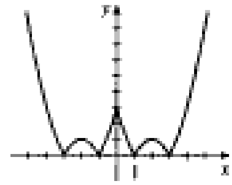


33. $y = 0{,}263x - 450{,}034$; environ 76 années.

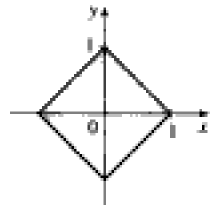
Principes de la résolution de problèmes ■ page 92

1. $a = 4\sqrt{h^2 - 16}/h$, où a est la mesure de la hauteur et h la longueur de l'hypoténuse.
3. $-\frac{7}{3}$, 9

5.



7.

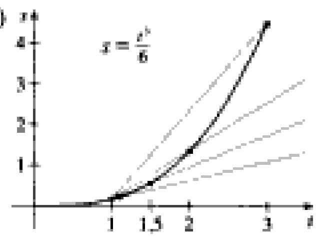


9. 5 **11.** $x \in [-1, 1 - \sqrt{3}[\,\cup\,]1 + \sqrt{3}, 3]$
17. $f_n(x) = x^{2^{n+1}}$

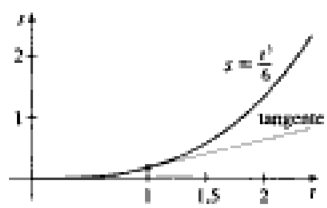
CHAPITRE 2

Exercices 2.1 ■ page 100

1. a) −0,43 ; −0,35 ; 0,2 ; 0,8 ; 1,1. b) 0,5 c) 0,57
3. a) ■ 0,236068 ■ 0,242641 ■ 0,248457 ■ 0,249844 ■ 0,249984 ■ 0,267949 ■ 0,258343 ■ 0,251582 ■ 0,250156 ■ 0,250016 b) $\frac{1}{4}$ c) $y = \frac{1}{4}x + 1$
5. a) ■ −10,05 m/s ■ −8,09 m/s ■ −7,845 m/s ■ −7,649 m/s b) −7,6 m/s
7. a) ■ $\frac{13}{6}$ m/s ■ $\frac{7}{6}$ m/s ■ $\frac{19}{24}$ m/s ■ $\frac{331}{600}$ m/s
b) $\frac{1}{2}$ m/s c)

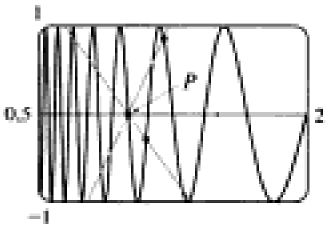


d)



9. a) 0 ; 1,7321 ; −1,0847 ; −2,7433 ; 4,3301 ; −2,8173 ; 0 ; −2,1651 ; −2,6061 ; −5, 3,4202 ; non

b)



c) −31,4

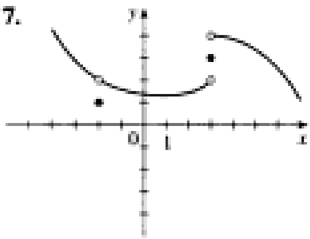
Exercices 2.2 ■ page 109

1. Oui

3. a) 3 b) 2 c) −2 d) N'existe pas. e) 1 f) −1 g) −1 h) −1 i) −3

5. a) 1 b) 0 c) N'existe pas.

7.



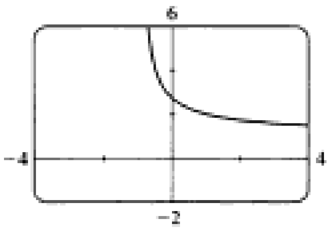
9. 0,806452 ; 0,641026 ; 0,510204 ; 0,409836 ; 0,369004 ; 0,336689 ; 0,165563 ; 0,193798 ; 0,229358 ; 0,274725 ; 0,302115 ; 0,330022 ; $\frac{1}{3}$

11. 0,459698 ; 0,489670 ; 0,493369 ; 0,496261 ; 0,498336 ; 0,499583 ; 0,499896 ; 0,499996 ; $\frac{1}{2}$

13. a) 4

15. a) 2,71828 ; c'est la valeur de e.

b)



17. a) 0,998000 ; 0,638259 ; 0,358484 ; 0,158680 ; 0,038851 ; 0,008928 ; 0,001465 ; 0

b) 0,000572 ; −0,000614 ; −0,000907 ; −0,000978 ; −0,000993 ; −0,001000 ; −0,001

19. À moins de 0,182 ; à moins de 0,095

Exercices 2.3 ■ page 118

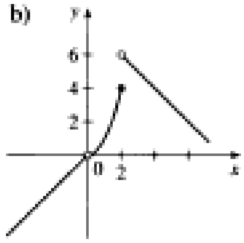
1. a) 5 b) 9 c) 2 d) $-\frac{1}{5}$ e) $-\frac{3}{8}$ f) 0 g) N'existe pas. h) $-\frac{6}{11}$

3. 75 **5.** −3 **7.** 0 **9.** N'existe pas **11.** −10 **13.** 6 **15.** $-\sqrt{2}/4$ **17.** $\frac{1}{2}$ **21.** 1 **25.** 0

27. N'existe pas

29. a) ■ 0 ■ 0 ■ 1 ■ 4 ■ 6 ■ N'existe pas

b)



31. a) ■ −2 ■ N'existe pas ■ −3

b) ■ $n-1$ ■ n c) a n'est pas un entier.

39. 15 ; −1.

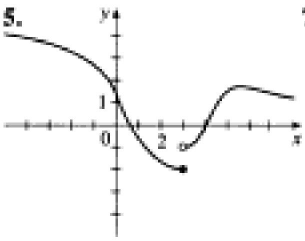
Exercices 2.4 ■ page 128

1. $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$

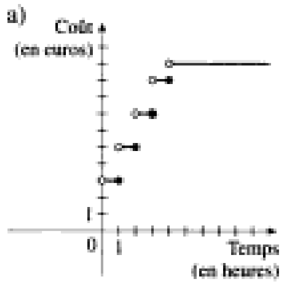
3. a) −5 (saut), −3 (infinie), −1 (non définie), 3 (réductible), 5 (infinie), 8 (saut), 10 (non définie)

b) −5, à gauche ; −3, à gauche ; −1, ni l'un, ni l'autre ; 3, ni l'un, ni l'autre ; 5, ni l'un, ni l'autre ; 8, à droite ; 10, ni l'un, ni l'autre.

5.

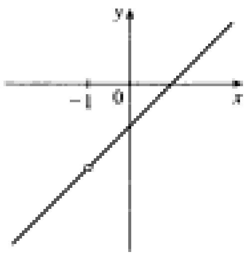


7. a)

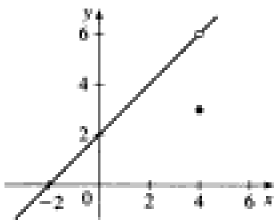


b) Discontinue en $t = 1, 2, 3, 4$

11. $f(-1)$ n'est pas défini

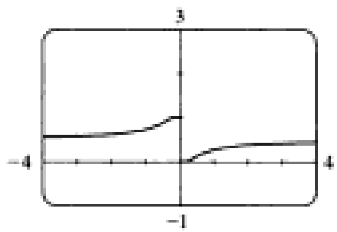


13. $\lim_{x\to 4} f(x) \neq f(4)$



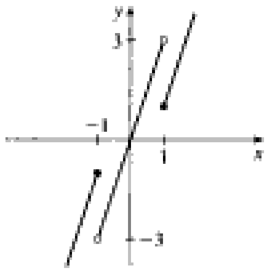
15. $\{x \mid x \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ **17.** $\mathbb{R}$ **19.** $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$

21. $x = 0$



23. $\frac{2}{3}$ **25.** 1

27. En -1, continue à gauche; en 1, continue à droite



29. $\frac{1}{3}$ **37.** b) $[0{,}44; 0{,}45]$ **39.** b) 5,016 **43.** Oui

Exercices 2.5 ■ page 140

1. a) Lorsque x tend vers 2, $f(x)$ devient grand.

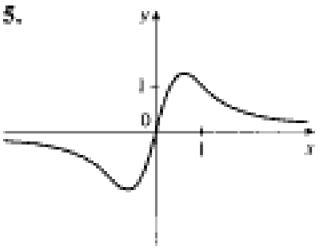
b) Lorsque x tend vers 1 par la droite, $f(x)$ est négatif et devient grand en valeur absolue.

c) Lorsque x devient grand, $f(x)$ tend vers 5.

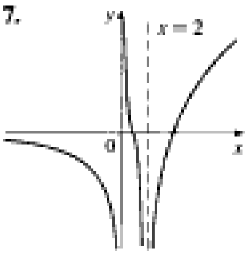
d) Lorsque x est négatif et devient grand en valeur absolue, $f(x)$ tend vers 3.

3. a) ∞ b) ∞ c) $-\infty$ d) 1 e) 2
f) $x = -1$, $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$.

5.



7.

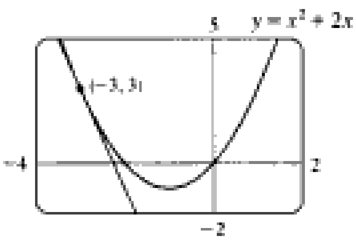


9. 0 **11.** 1,5 **13.** $x \approx -1{,}62$, $x \approx 0{,}62$, $x = 1$, $y = 1$
15. ∞ **17.** $-\infty$ **19.** 0 **21.** -3 **23.** $\frac{3}{2}$
25. N'existe pas **27.** ∞ **29.** 0
31. $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$
33. a) IV b) III c) II d) VI (e) I f) V
35. $(2 - x)/[x^2(x - 3)]$ **37.** a) 0 b) ∞ ou $-\infty$.
39. 4 **41.** b) La concentration approche celle de la saumure.
43. b) 23,03 c) Oui, $x > 10 \ln 10$

Exercices 2.6 ■ page 149

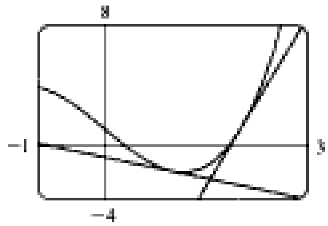
1. a) $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ b) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$
3. Pentes en D, E, C, A, B
5. a) ■ -4 ■ -4 b) $y = -4x - 9$

c)



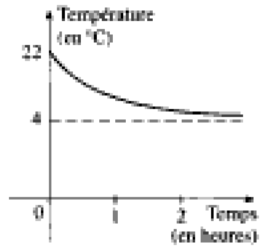
7. $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ **9.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
11. a) $3a^2 - 4$ b) $y = -x - 1$, $y = 8x - 15$

c)



13. a) 0 b) C c) En train d'accélérer, de ralentir, ni l'un ni l'autre (d) La voiture s'est arrêtée.
15. $-7{,}6$ m/s 17. $12a^2 + 6$, 18 m/s, 54 m/s, 114 m/s.

19. Plus grande (en norme)

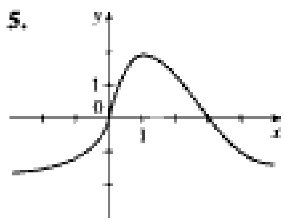


21. a) ■ $-1{,}2$°C/h ■ $-1{,}25$°C/h ■ $-1{,}3$°C/h
b) $-1{,}9$°C/h
23. a) ■ 20,25 euros/unité ■ 20,05 euros/unité b) 20 euros/unité

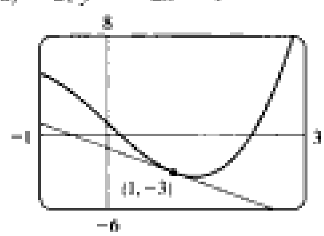
Exercices 2.7 ■ page 156

1. La droite qui relie $(2, f(2))$ à $(2 + h, f(2 + h))$
3. $g'(0)$, 0, $g'(4)$, $g'(2)$, $g'(-2)$.

5.



7. 7; $y = 7x - 12$
9. a) -2; $y = -2x - 1$
b)



11. 3,296 **13.** $1 - 4a$ **15.** $-(a^2 + 1)/(a^2 - 1)^2$
17. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ **19.** $f(x) = x^9$, $a = 1$
21. $f(x) = \sin x$, $a = \pi/2$ **23.** -2 m/s
25. a) La vitesse de variation du coût en fonction du nombre de grammes d'or produit ; euros par gramme.

b) Quand le 800^e gramme d'or est produit, le coût de production est de 17 euros/g.

c) Décroître à court terme ; croître à long terme.

27. a) La vitesse à laquelle la consommation de carburant change en fonction de la vitesse du véhicule ; en litres/km

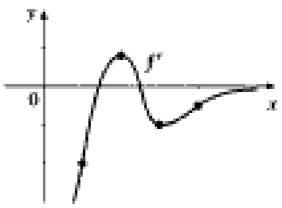
b) La consommation en carburant du véhicule diminue de 0,2 l/km quand la vitesse atteint 30 km/h.

29. Le prix du café en grains a augmenté de 0,54 euros/kg/an en 1983 et diminué d'environ 0,065 euros/kg/an en 1990.

31. N'existe pas

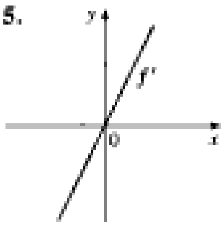
Exercices 2.8 ■ page 168

1. a) -2
b) $0{,}8$
c) -1
d) $-0{,}5$

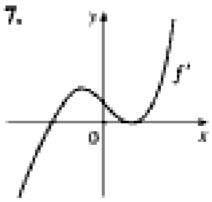


3. a) II b) IV c) I d) III

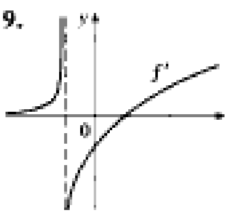
5.



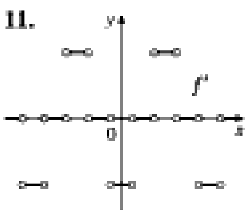
7.



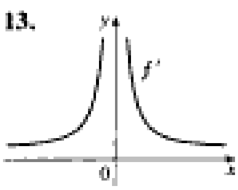
9.



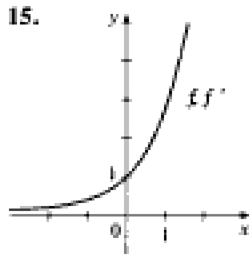
11.



13.



15.



$f'(x) = e^x$

17. a) 0, 1, 2, 4 b) -1, -2, -4 c) $f'(x) = 2x$

19. $f'(x) = 5$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

21. $g'(x) = 1/\sqrt{1+2x}$, $[-\frac{1}{2}, \infty[$, $]-\frac{1}{2}, \infty[$.

23. $f'(x) = -2/(x-1)^2$, $\{x \mid x \neq 1\}$, $\{x \mid x \neq 1\}$

25. a) $f'(x) = 1 + 2/x^2$

27. a) Le taux de variation du chômage en fonction du taux de chômage annuel en pour cent.

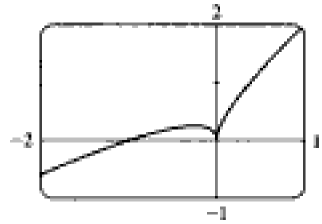
b)

t	1983	1984	1985	1986	1987
$U'(t)$	$-2{,}1$	$-1{,}2$	$-0{,}25$	$-0{,}5$	$-0{,}75$

t	1988	1989	1990	1991	1992
$U'(t)$	$-0{,}45$	0	0,7	0,95	0,7

29. 4 (discontinuité); 8 (point anguleux); $-1{,}11$ (tangentes verticales)

31.

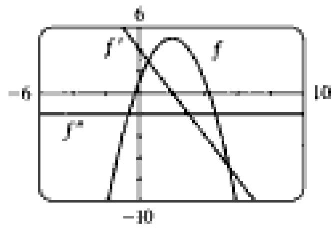


Dérivable en -1; pas dérivable en 0

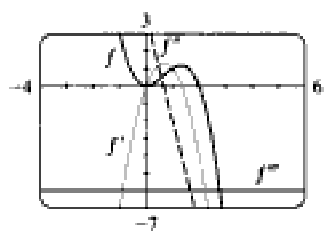
33. $a = f$, $b = f'$, $c = f''$

35. a = accélération, b = vitesse, c = position

37. $f'(x) = 4 - 2x$, $f''(x) = -2$

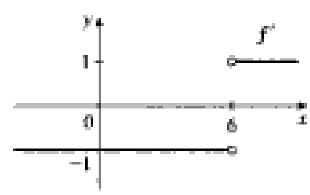


39. $f'(x) = 4x - 3x^2$, $f''(x) = 4 - 6x$, $f'''(x) = -6$, $f^{(4)}(x) = 0$



41. a) $\frac{1}{3}a^{-2/3}$

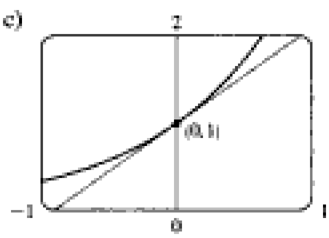
43. $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$ ou $f'(x) = \dfrac{x-6}{|x-6|}$



Exercices 2.9 ■ page 174

1. a) 1,0986 b) 1,0549 ; 1,1099.

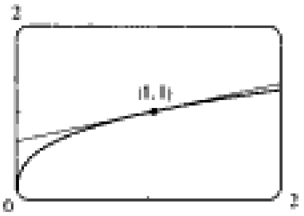
c)



Par défaut ; la tangente se trouve sous la courbe.

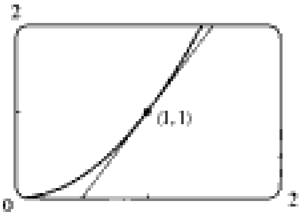
3. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
c) 0,83333 ; 0,96667 ; 0,99667 ; 1,00333 ; 1,03333 ; 1,16667 ; 1,33333 ; par excès ; celles de 0,99 et 1,01.

d)



La tangente se trouve au-dessus de la courbe.

5. a) 2 b) 0,8; 0,9; 0,98; 1,02; 1,1; 1,2; sous-estimations.
c)

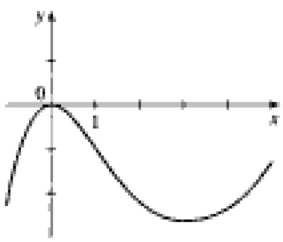


7. 148°C ; sous-estimation **9.** 32,5 %, 35 %
11. a) 4,8 ; 5,2 b) Trop grandes.

Exercices 2.10 ■ page 180

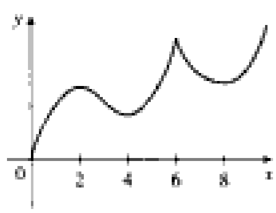
1. a) Croissante sur $]-\infty, 0[$ et $]3, \infty[$; décroissante sur $]0, 3[$.
b) Maximum local en $x = 0$, minimum local en $x = 3$.

c)

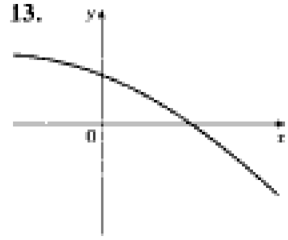


3. Croissante sur $]2, 5[$; décroissante sur $]-\infty, 2[$ et $]5, \infty[$
5. Si $D(t)$ est le montant de la dette publique en fonction du temps, alors, au moment du discours, $D'(t) > 0$, mais $D''(t) < 0$.
7. a) Le taux initial est faible, puis il croît rapidement, se stabilise. Il décroît et devient négatif.
b) (1932, 2,5) et (1937, 4,3) ; le taux de variation de la densité de la population commence à décroître en 1932 et recommence à croître en 1937.
9. $K(3) - K(2)$; concave.
11. a) Croissante sur $]0, 2[$, $]4, 6[$ et $]8, \infty[$; décroissante sur $]2, 4[$ et $]6, 8[$.
b) Maximums locaux en $x = 2, 6$; minimums en $x = 4, 8$.
c) Convexe sur $]3, 6[$ et $]6, \infty[$, concave sur $]0, 3[$

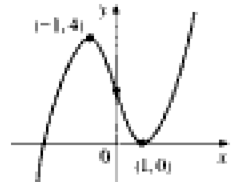
d) 3 e)



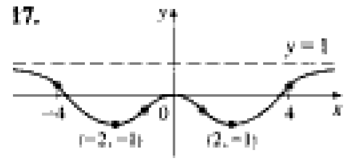
13.



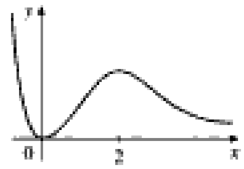
15.



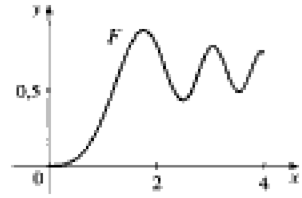
17.



19. a) Croissante sur $]0, \infty[$; décroissante sur $]-\infty, 0[$
b) Minimum en $x = 0$
21. *b*
23.



25.



Chapitre 2 Révision ■ page 182

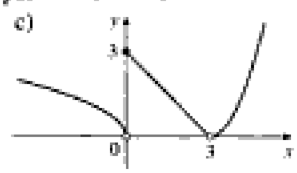
Vrai-Faux

1. Faux **3.** Vrai **5.** Faux **7.** Vrai **9.** Faux **11.** Vrai **13.** Faux **15.** Faux

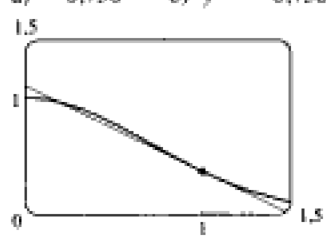
Exercices

1. a) ■ 3 ■ 0
■ N'existe pas car $\lim_{x\to -3^+} f(x) \neq \lim_{x\to -3^-} f(x)$
■ 2 ■ ∞ ■ $-\infty$ ■ 4 ■ -1
3. 0 **5.** 2 **7.** 0 **9.** ∞ **11.** -1 **13.** 0
15. 0 **17.** $x = 0, y = 0$ **19.** 1

21. a) ■ 3 ■ 0 ■ N'existe pas ■ 0 ■ 0
■ 0 b) En $x = 0$ et $x = 3$ c)



25. a) ■ 3 m/s ■ 2,75 m/s ■ 2,625 m/s
■ 2,525 m/s b) 2,5 m/s
27. $f''(5)$, 0, $f'(5)$, $f'(2)$, 1, $f'(3)$
29. a) $-0{,}736$ b) $y \approx -0{,}736x + 1{,}104$
c)

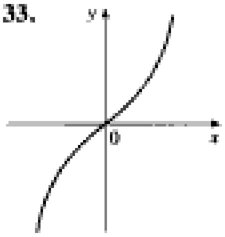


31. a) Le taux de variation du coût par rapport au taux d'intérêt ; en euros/(%/an).

b) Lorsque le taux d'intérêt atteint 10 %, le coût de remboursement augmente de 1200 euros par pour cent d'augmentation du taux.

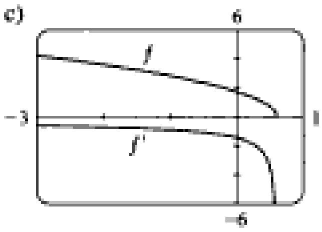
c) Toujours positive.

33.



35. a) $f'(x) = -\frac{5}{2}(3-5x)^{-1/2}$ b) $]-\infty, \frac{3}{5}]$, $]-\infty, \frac{3}{5}[$

c)



37. −4 (discontinuité), 1 (point anguleux), 2 (discontinuité), 5 (tangente verticale)

39. a) 1 b) $x+1$ c) 0,8 ; 0,9 ; 0,99 ; 1,01 ; 1,1 ; 1,2

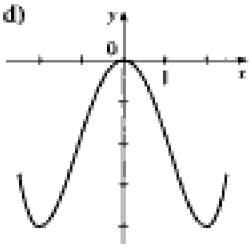
d) Sous-estimations ; celles de $e^{-0,01}$ et $e^{0,01}$

41. a) Croissante sur $]-2, 0[$ et $]2, \infty[$;
décroissante sur $]-\infty, -2[$ et $]0, 2[$

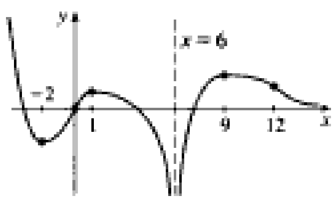
b) Maximum en 0 ; minimums en −2 et 2.

c) Convexe sur $]-\infty, -1[$ et $]1, \infty[$; concave sur $]-1, 1[$

d)



43.



45. a) Environ 10,75 m/s b) Aux environs du point (8, 55)

c) Le point en lequel la voiture atteint sa plus grande vitesse.

Pleins feux sur la résolution de problème ■ page 187

1. $\frac{2}{3}$ **3.** −4 **5.** 1 **7.** $a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

9. b) Oui c) Oui ; non **11.** $(\pm\sqrt{3}/2, \frac{1}{4})$

3. a) 0 b) 1 c) $f'(x) = x^2 + 1$ **15.** $\frac{1}{4}$.

CHAPITRE 3

Exercices 3.1 ■ page 199

1. a) Voyez la définition du nombre e (page 198).

b) 0,99 ; 1,03 ; $2,7 < e < 2,8$.

3. $y' = 8x^7$ **5.** $y' = -\frac{2}{5}x^{-7/5}$ **7.** $f'(x) = 2x - 10$

9. $V'(r) = 4\pi r^2$ **11.** $Y'(t) = -54t^{-10}$

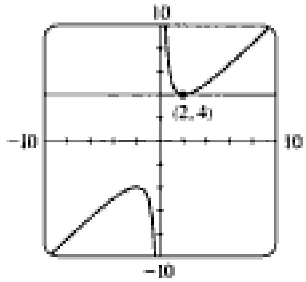
13. $F'(x) = 12\,288x^2$ **15.** $g'(x) = 2x - (2/x^3)$

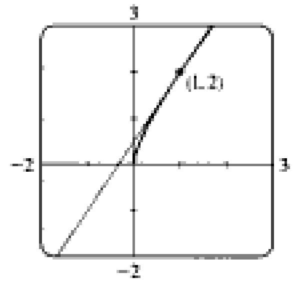
17. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + (2/\sqrt{x}) - 3/(2x\sqrt{x})$ **19.** $y' = 3 + 2e^x$

21. $4x - 4x^3$ **23.** $45x^{14} - 15x^2$ **25.** $1 - x^{-2/3}$

27. a) 0,264 b) $2^{2/5}/5 \approx 0,263902$

29. $y = 4$ **31.** $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$





33. $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 16$, $f''(x) = 12x^2 - 18x$

35. $f'(x) = 2 - \frac{15}{4}x^{-1/4}$, $f''(x) = \frac{15}{16}x^{-5/4}$

37. a) $v(t) = 3t^2 - 3$, $a(t) = 6t$ b) 12 m/s² c) $a(1) = 6$ m/s²

39. a) 16 millions/an ; 80 millions/an.

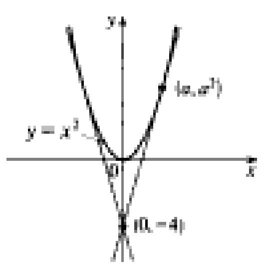
b) $P'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

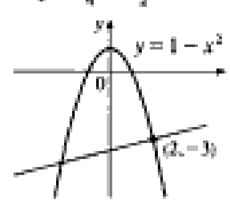
c) 14 millions/an (inférieure) ; 78,8 millions/an (inférieure)

d) 86,5 millions/an.

41. $[\ln\frac{3}{2}, \infty[$ **43.** $(1, 0)$, $(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27})$

47. $(\pm 2, 4)$ **49.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{2}$





53. $P(x) = x^2 - x + 3$

55. a) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, C est un nombre réel quelconque ; une infinité.

b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, $\frac{1}{5}x^5 + C$, C est un nombre réel quelconque.

c) $F(x) = x^{n+1}/(n+1) + C$, C est un nombre réel quelconque.

57. $y = 2x^2 - x$

59. 1000

Exercices 3.2 ■ page 206

1. $y' = 5x^4 + 3x^2 + 2x$ **3.** $f'(x) = x(x+2)e^x$

5. $y' = (x-2)e^x/x^3$ **7.** $h'(x) = -3/(x-1)^2$

9. $G'(s) = (2s+1)(s^2+2) + (s^2+s+1)(2s)$
$[= 4s^3 + 3s^2 + 6s + 2]$

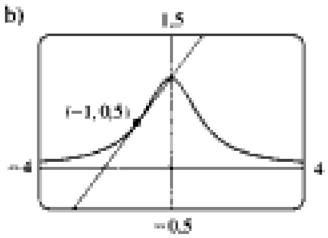
11. $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} + (2/\sqrt{x}) - 3/(2x\sqrt{x})$

13. $y' = (r^2 - 2)e^r$

15. $y' = -(4x^3 + 2x)/(x^4 + x^2 + 1)^2$

17. $f'(x) = 2cx/(x^2 + c)^2$

19. a) $y = \frac{1}{2}x + 1$ b)



21. a) $(x^3 - 3x^2)e^x/x^6 [= e^x(x^{-3} - 3x^{-4})]$

23. a) xe^x, $(x+1)e^x$

25. a) -16 b) $-\frac{20}{9}$ c) 20 **27.** 7

29. a) 0 b) $-\frac{2}{3}$

31. Environ 7,322 milliards par an **33.** $]-3, \infty[$

35. Deux, $(-2 \pm \sqrt{3}, (1 \mp \sqrt{3})/2)$ **37.** c) $y' = 3e^{-3x}$

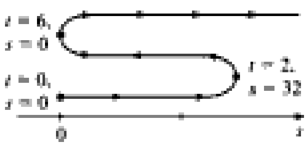
39. $(x^2 + 2x)e^x$, $(x^2 + 4x + 2)e^x$, $(x^2 + 6x + 6)e^x$, $(x^2 + 8x + 12)e^x$, $(x^2 + 10x + 20)e^x$; $f^{(n)}(x) = [x^2 + 2nx + n(n-1)]e^x$.

Exercises 3.3 ■ page 217

1. a) $3t^2 - 24t + 36$ b) -9 m/s c) $t = 2, 6$

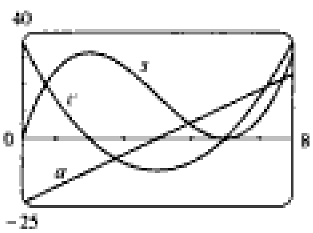
d) $0 \leqslant t < 2$, $t > 6$ e) 96 m

f)



g) $6t - 24$; -6 m/s^2

h)



i) Accélère quand $2 < t < 4$ ou $t > 6$; ralentit quand $0 \leqslant t < 2$ ou $4 < t < 6$

3. a) $t = 4$ s

b) $t = 1{,}5$ s ; la vitesse passe par un minimum absolu.

5. a) 30 mm^2/mm ; la vitesse à laquelle l'aire croît par rapport à la longueur du côté lorsque x atteint 15 mm

b) $\Delta A \approx 2x\Delta x$

7. a) ■ 5π ■ $4{,}5\pi$ ■ $4{,}1\pi$ b) 4π c) $\Delta A \approx 2\pi r \Delta r$

9. a) 8π dm^2/dm b) 16π dm^2/dm

c) 24π dm^2/dm. Le taux de croissance augmente avec le rayon.

11. a) 6 kg/m b) 12 kg/m c) 18 kg/m ;

À l'extrémité droite ; à l'extrémité gauche.

13. a) 4,75 A b) 5 A ; $t = \frac{2}{3}$ s

15. a) $dV/dP = -C/P^2$ b) Au début.

17. a) $a^2k/(akt+1)^2$

c) Elle approche a moles/L.

d) Il tend vers 0.

e) La réaction s'arrête.

19. a) 0,926 cm/s ; 0,694 cm/s ; 0

b) 0 ; $-92{,}6$ (cm/s)/cm ; $-185{,}2$ (cm/s)/cm

c) Au centre ; au bord.

21. a) $C'(x) = 3 + 0{,}02x + 0{,}0006x^2$

b) 11 euros/m, la vitesse à laquelle le coût varie quand le 100^e mètre est fabriqué.

c) 11,07 euros/m.

23. a) $[xp'(x) - p(x)]/x^2$; la productivité moyenne augmente lorsque de nouveaux travailleurs sont engagés.

25. $-0{,}2436$ K/min.

27. a) 0 et 0 b) $C = 0$

c) $(0, 0)$, $(500, 50)$; il est possible pour les deux espèces de coexister.

Exercices 3.4 ■ page 225

1. $\cos x - \sin x$ **3.** $2x \cos x - x^2 \sin x$

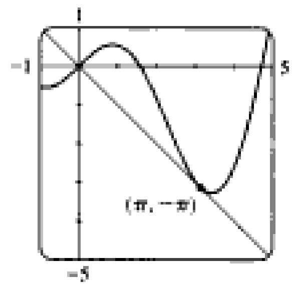
5. $-2\operatorname{cosec}^2 x - \sqrt{x} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2}x^{-1/2} \sec x$

7. $(x \sec^2 x - \operatorname{tg} x)/x^2$

9. $(\sin x + \cos x + x \sin x - x \cos x)/(1 + \sin 2x)$

11. $e^x(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - x)$ **17.** $y = 2x + 1 - \pi/2$

19. a) $y = -x$ b)



21. a) $2 - \operatorname{cosec}^2 x$

23. $g'(s) = 2s \cos s - s^2 \sin s$, $g''(s) = (2 - s^2)\cos s - 4s \sin s$

25. $(2n+1)\pi \pm \pi/3$, n entier

27. $(\pi/3, 5\pi/3)$

29. a) $v(t) = 8\cos t$, $a(t) = -8\sin t$

b) $4\sqrt{3}$, -4, $-4\sqrt{3}$; vers la gauche ; en train d'accélérer.

31. 1,5 m/rad **33.** $-\cos x$

35. $A = -\frac{3}{10}$, $A = -\frac{1}{10}$

37. 4 **39.** $\frac{1}{2}$ **41.** 1

Exercices 3.5 ■ page 234

1. $10(x^2 + 4x + 6)^4(x + 2)$ **3.** $-\sin(\operatorname{tg} x)\sec^2 x$

5. $e^{\sqrt{x}}/(2\sqrt{x})$ **7.** $g'(x) = (2x - 7)/(2\sqrt{x^2 - 7x})$

9. $y' = -3x^2 \sin(x^3)$ **11.** $y' = 5^{-1/x}(\ln 5)/x^2$

13. $y' = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

15. $G'(x) = 6(3x - 2)^9(5x^2 - x + 1)^{11}(85x^2 - 51x + 9)$

17. $y' = (\cos x - x \sin x)e^{x \cos x}$

19. $F'(y) = 39(y - 6)^2/(y + 7)^4$

21. $f'(z) = -\frac{2}{5}(2z - 1)^{-6/5}$

23. $y' = \sin(1/x) - \cos(1/x)/x$

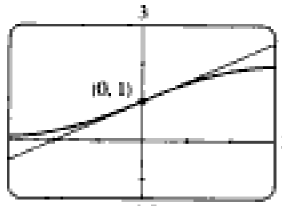
25. $y' = 6x^2 \operatorname{tg}(x^3)\sec^2(x^3)$

27. $y' = [1 + 1/(2\sqrt{x})]/(2\sqrt{x + \sqrt{x}})$

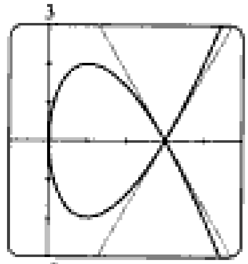
29. $y' = \cos(\operatorname{tg}\sqrt{\sin x})(\sec^2\sqrt{\sin x})[1/(2\sqrt{\sin x})](\cos x)$

31. $y = -\frac{3}{16}x + \frac{11}{4}$.

33. a) $y = \frac{1}{2}x + 1$
b)



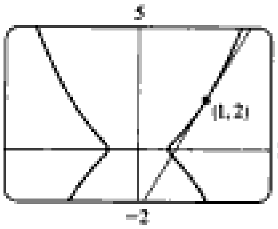
35. a) $-1/(x^2\sqrt{1-x^2})$ **37.** 28
39. a) $\frac{3}{4}$ b) N'existe pas c) -2 **41.** $-17,4$
43. a) $]0, \infty[$ b) $G'(x) = h'(\sqrt{x})/(2\sqrt{x})$
45. a) $F'(x) = e^x f'(e^x)$ b) $G'(x) = e^{f(x)} f'(x)$
47. $x = 2n\pi$ ou $(2n+1)\pi \pm \pi/3$, n entier quelconque.
51. $-2^{50}\cos 2x$
53. $v(t) = (5\pi/2)\cos(10\pi t)$ cm/s, $a(t) = -25\pi^2 \sin(10\pi t)$ cm/s^2
55. a) $dB/dt = (7\pi/54)\cos(2\pi t/5,4)$ b) 0,16
57. dv/dt est le taux de variation de la vitesse par rapport au temps ; dv/ds est le taux de variation de la vitesse par rapport à l'espace parcouru.
59. a) $y \approx 100,012437e^{-10,005531t}$ b) $-670,625828$ μA
61. $y = (1/\pi)x - \pi$
63. a) $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$
b) Horizontale en $(1, \pm 2)$; verticale en $(0, 0)$.
c)



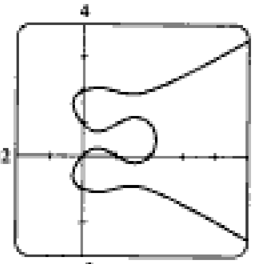
65. b) La forme factorisée.
67. b) $-n\cos^{n-1}x\sin[(n+1)x]$

Exercices 3.6 ■ page 245

1. a) $y' = -(2x + y + 3)/x$
b) $y = (5/x) - x - 3$, $y' = -(5/x^2) - 1$
3. $(y - 2x)/(3y^2 - x)$ **5.** $-x^3/y^3$
7. $1 + [e^x(1+x)]/\sin(x-y)$ **9.** $-y/x$
11. $y = -\frac{5}{4}x - 4$ **13.** $y = x$ **15.** $y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$
17. a) $y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}$
b)

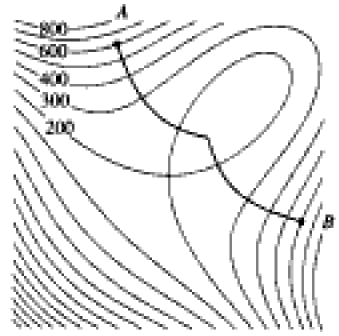


19. a)

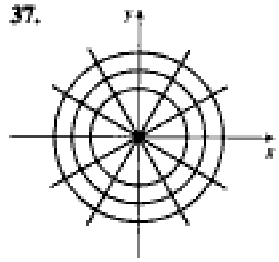


8 points; 0,42; 1,58
b) $y = -x + 1$, $y = \frac{1}{3}x + 2$
c) $1 \mp \sqrt{3}/3$

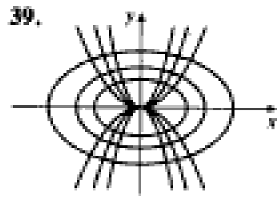
21. $(\pm 5\sqrt{3}/4, \pm 5/4)$
23. a) $y' = -x^2/y^2$ b) $-\dfrac{3x^2y^2 - 3x^3y^2(-x^2/y^2)}{y^6}$
25. $y' = 2x/\sqrt{1 - x^4}$ **27.** $y' = e^x/(1 + e^{2x})$
29. $H'(x) = 1 + 2x \operatorname{Arctg} x$
31. $f'(x) = e^x - x^2/(1 + x^2) - 2x \operatorname{Arctg} x$
35.



37.



39.



43. $(\pm\sqrt{3}, 0)$ **45.** $(-1, -1)$, $(1, 1)$ **47.** b) $\frac{3}{2}$
49. a) 0 b) $-\frac{1}{2}$

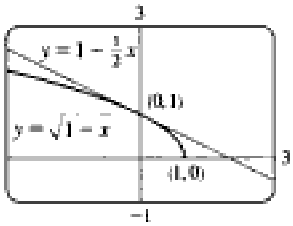
Exercices 3.7 ■ page 252

1. Elle est plus simple à dériver.
3. $f'(\theta) = -\operatorname{tg}\theta$ **5.** $f'(x) = 2x/[(x^2 - 4)\ln 3]$
7. $g'(x) = -2a/(a^2 - x^2)$ **9.** $F'(x) = 1/(2x)$
11. $f'(x) = (2 + \ln x)/(2\sqrt{x})$
13. $y' = (3x - 2)/[x(x - 1)]$ **15.** $y' = -x/(1 + x)$
17. $y' = 1/(x \ln 10)$, $y'' = -1/(x^2 \ln 10)$
19. $f'(x) = 2x\ln(1 - x^2) - 2x^3/(1 - x^2)$, $(-1, 1)$ **21.** 0
23. a) $]0, 1/e[$ b) $]0, \infty[$
25. $y' = (3x - 7)^4(8x^2 - 1)^3[12/(3x - 7) + 48x/(8x^2 - 1)]$
27. $y' = \frac{(x+1)^4(x-5)^3}{(x-3)^8}\left[\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-5} - \frac{8}{x-3}\right]$
29. $y' = x^x(\ln x + 1)$ **31.** $y' = x^{\sin x}[\cos x \ln x + (\sin x)/x]$
33. $y' = (\ln x)^x(\ln\ln x + 1/\ln x)$
35. $y' = 2x/(x^2 + y^2 - 2y)$
37. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!/(x - 1)^n$

Exercices 3.8 ■ page 258

1. $L(x) = 3x - 2$ **3.** $L(x) = 1 - 2x$

5. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$;
$\sqrt{0{,}9} \approx 0{,}95$,
$\sqrt{0{,}99} \approx 0{,}995$



7. $-0{,}69 < x < 1{,}09$ **9.** $-0{,}045 < x < 0{,}055$

11. b) $-0{,}344 < x < 0{,}344$

13. a) $dy = -\sin x\,dx$ b) $dy = -0{,}025$, $\Delta y \approx -0{,}02607$

15. a) 270 cm³ b) 36 cm² **17.** $\frac{1}{3}\pi \approx 2$ m³

Chapitre 3 Révision ■ page 260

Vrai-Faux

1. Vrai **3.** Vrai **5.** Faux **7.** Faux **9.** Vrai
11. Vrai

Exercices

1. $y' = 2(7x+18)(x+2)^7(x+3)^5$

3. $y' = (9-2x)/(9-4x)^{3/2}$ **5.** $y' = -\sin x \cos(\cos x)$

7. $y' = e^{-1/x}(1 + 1/x)$

9. $y' = -\sec^2\sqrt{1-x})/(2\sqrt{1-x})$

11. $y' = 8/(8-3x)^2$ **13.** $y' = (1+c^2)e^{cx}\sin x$

15. $y' = e^{x+e^x}$ **17.** $y' = (1-2xy^3)/(3x^2y^2+6y+4)$

19. $y' = (2x-1)/[(x^2-x)\ln 10]$

21. $y' = \operatorname{cotg} x - \sin x \cos x$

23. $y' = \cos(\operatorname{tg}\sqrt{1+x^3})(\sec^2\sqrt{1+x^3})\left(\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\right)$

25. $y' = \dfrac{(x-2)^4(3x^2-55x-52)}{2\sqrt{x+1}(x+3)^8}$

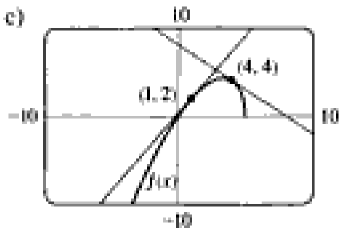
27. -120

29. $2^x(\ln 2)^n$

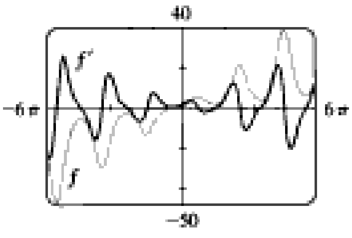
31. a) $(10-3x)/(2\sqrt{5-x})$

b) $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$, $y = -x + 8$

c)



33. $e^{\sin x}(x\cos x + 1)$



Les amplitudes des oscillations de f et de f' sont liées.

35. a) 2 b) 44 **37.** $f'(x) = 2xg(x) + x^2g'(x)$

39. $f'(x) = 2g(x)g'(x)$ **41.** $f'(x) = g'(e^x)e^x$

43. $f'(x) = g'(x)/g(x)$

45. $h'(x) = \dfrac{f'(x)[g(x)]^2 + g'(x)[f(x)]^2}{[f(x)+g(x)]^2}$ **47.** $(-3, 0)$

49. $(\pm 2/\sqrt{6}, \mp 1\sqrt{6})$

51. $v(t) = -Ae^{-ct}[c\cos(\omega t+\delta) + \omega\sin(\omega t+\delta)]$,
$a(t) = Ae^{-ct}[(c^2-\omega^2)\cos(\omega t+\delta) + 2c\omega\sin(\omega t+\delta)]$

53. 4 kg/m

55. a) $C'(x) = 2 - 0{,}04x + 0{,}00021x^2$

b) 0,1 ; le coût approximatif de la production de la 101ᵉ unité.

c) $C(101) - C(100) = 0{,}10107$

d) Environ 95,24 ; en cette valeur de x, le coût marginal est rendu minimum.

57. a) $L(x) = 1 + x$; $\sqrt[3]{1+3x} \approx 1 + x$; $\sqrt[3]{1{,}03} \approx 1{,}01$

b) $-0{,}23 < x < 0{,}40$

59. $(\cos\theta)'|_{\theta=\pi/3} = -\sqrt{3}/2$ **61.** $\frac{1}{4}$.

Pleins feux sur la résolution de problèmes ■ page 264

1. $(0, \frac{5}{4})$

3. a) $[-1, 2]$

b) $-1/(8\sqrt{3-x}\sqrt{2-\sqrt{3-x}}\sqrt{1-\sqrt{2-\sqrt{3-x}}})$

5. a) $4\pi\sqrt{3}/\sqrt{11}$ rad/s b) $40(\cos\theta + \sqrt{8+\cos^2\theta}$ cm

c) $-480\pi\sin\theta(1 + \sin\theta\cos\theta/\sqrt{8+\cos^2\theta})$ cm/s

9. $x_T \in [3, \infty[$, $y_T \in [2, \infty[$, $x_N \in]0, \frac{5}{3}]$, $y_N \in]-\frac{5}{2}, 0[$

11. $f^{(n)}(x) = n!/(1-x)^{n+1}$

13. b) ■ 53° ■ 63° (ou 117°)

15. R s'approche du point milieu du rayon AO.

17. $(1, -2)$, $(-1, 0)$ **19.** $\sqrt{29}/58$

CHAPITRE 4

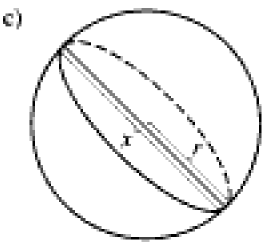
Exercises 4.1 ■ page 272

1. $dV/dt = 3x^2\,dx/dt$

3. a) L'aire de la surface diminue de 1 cm²/min.

b) La vitesse à laquelle le diamètre décroît quand le diamètre mesure 10 cm.

c)



d) $S = \pi x^2$

e) $1/(20\pi)$ cm/min

5. 5400 km/h

7. 65 km/h **9.** $837/\sqrt{8674} \approx 2{,}696$ m/s

11. $-1{,}6$ cm/min **13.** 0,73 m/s
15. $\frac{10}{3}$ cm/min **17.** 14,14 cm/min **19.** 0,3 m^2/s
21. 80 cm^3/min **23.** a) 108 m/s b) 0,096 rad/s
25. $1650/\sqrt{31} \approx 296$ km/h **27.** $7\sqrt{15}/4 \approx 6{,}78$ m/s

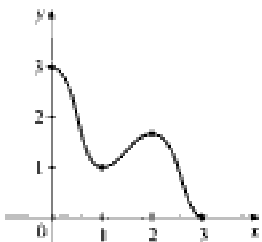
Exercices 4.2 ■ page 279

1. Minimum absolu : la plus petite valeur de la fonction sur tout son domaine de définition ; minimum local en c : la plus petite valeur de la fonction lorsque x est proche de c.

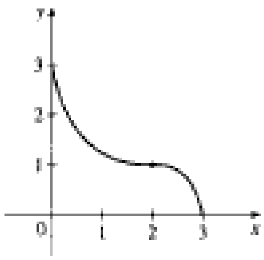
3. Maximum absolu en b, maximums locaux en b et e, minimum absolu en d, minimums locaux en d et s.

5. $f(4) = 4$ est un maximum absolu ; $f(7) = 0$ est un minimum absolu ; $f(4) = 4$ et $f(6) = 3$ sont des minimums locaux ; $f(2) = 1$ et $f(5) = 2$ sont des minimums locaux.

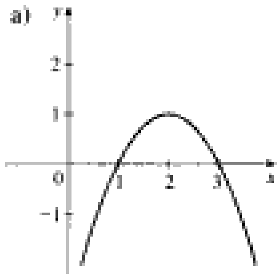
7.



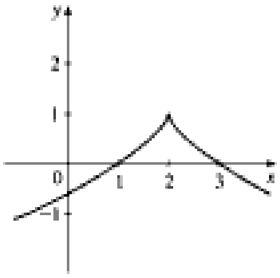
9.



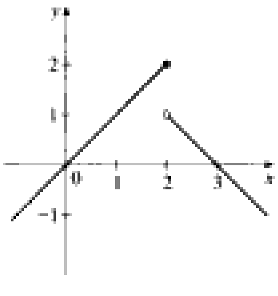
11. a)



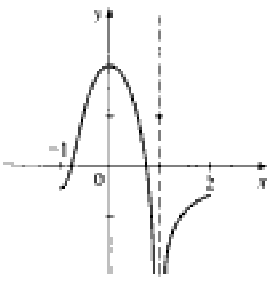
b)



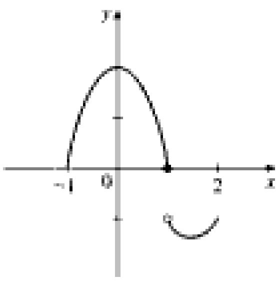
c)



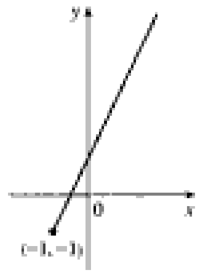
13. a)



b)

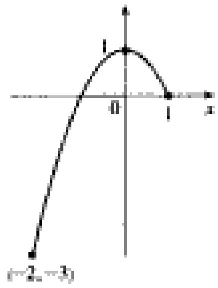


15.



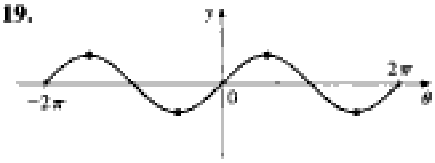
Pas de maximum, $f(-1) = -1$ est un minimum absolu.

17.



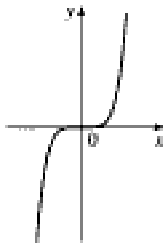
$f(0) = 1$ est un maximum local et absolu, $f(-2) = -3$ est un minimum absolu.

19.



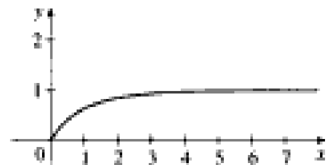
$(\pi/2) = f(-3\pi/2) = 1$ sont des maximums locaux et absolus.
$f(3\pi/2) = f(-\pi/2) = -1$ sont des minimums locaux et absolus.

21.



Ni maximum ni minimum

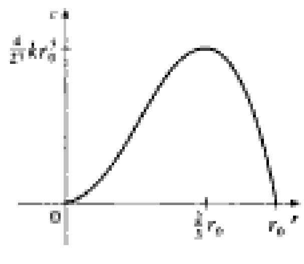
23.



Pas de maximum, $f(0) = 0$ est un minimum absolu.

25. $-\frac{1}{3}, 2$ **27.** $0, (-3 \pm \sqrt{5})/2$ **29.** ± 1
31. $0, \frac{8}{5}, 4$ **33.** $n\pi/4$ (n entier quelconque) **35.** $1/e$
37. $f(3) = 5, f(1) = 1$ **39.** $f(2) = 55, f(-2) = -57$
41. $f(2) = 5, f(1) = 3$ **43.** $f(\pi/4) = \sqrt{2}, f(0) = 1$
45. $f(1) = 1/e, f(0) = 0$
47. a) 9,71; −7,71 b) $1 \pm 32\sqrt{6}/9$
49. a) 0,32; 0,00 b) $3\sqrt{3}/16$, 0 **51.** 3,9665°C
53. $a(126) \approx 62{,}87$ m/s^2, $a(23{,}12) \approx 21{,}52$ m/s^2
55. a) $r = \frac{2}{3}r_0$ b) $v = \frac{4}{27}kr_0^3$

c)



Exercices 4.3 ■ page 292

Abréviations : AH, asymptote horizontale ; AV, asymptote verticale ; PI, point d'inflexion.

1. 0,8 ; 3,2 ; 4,4 ; 6,1.

3. a) Test C/D b) Test sur la concavité

c) En cherchant les points en lesquels la concavité change de sens.

5. $x = 1$ et $x = 7$

7. a) Croissante sur $]-2, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, -2[$.

b) Pas de maximum local, $f(-2) = -303$ est un minimum local

c) Convexe sur $]-\infty, \infty[$, pas de PI.

9. a) Croissante sur $]-1, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, -1[$

b) Pas de maximum local, $f(-1) = -1/e$ est un minimum local.

c) Concave sur $]-\infty, -2[$, convexe sur $]-2, \infty[$; PI $(-2, -2e^{-2})$

11. a) Croissante sur $]0, e^2[$, décroissante sur $]e^2, \infty[$

b) $f(e^2) = 2/e$ est un maximum local, pas de minimum local

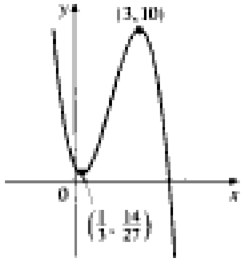
c) Concave sur $]0, e^{8/3}[$, convexe sur $]e^{8/3}, \infty[$; PI $(e^{8/3}, \frac{8}{3}e^{-4/3})$.

13. a) Croissante sur $]\frac{1}{3}, 3[$; décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{3}[$, $]3, \infty[$

b) Maximum local $f(3) = 10$, minimum local $f(\frac{1}{3}) = \frac{14}{27}$

c) Concave sur $]\frac{5}{3}, \infty[$, convexe sur $]-\infty, \frac{5}{3}[$; PI $(\frac{5}{3}, \frac{142}{27})$

d) Voyez le graphique.

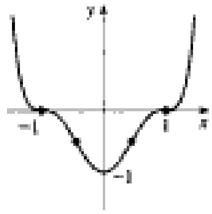


15. a) Croissante sur $]0, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, 0[$

b) Minimum local $f(0) = -1$

c) Concave sur $]-1, -1/\sqrt{5}[$, $]1/\sqrt{5}, 1[$; convexe sur $]-\infty, -1[$, $]-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}[$, $]1, \infty[$; PI $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1/\sqrt{5}, -\frac{64}{125})$

d) Voyez le graphique.

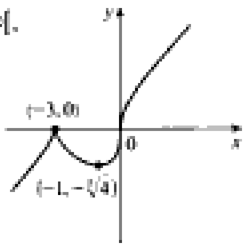


17. a) Croissante sur $]-\infty, -3[$, $]-1, \infty[$, décroissante sur $]-3, -1[$

b) Maximum local $f(-3) = 0$, minimum local $f(-1) = -\sqrt[3]{4}$

c) Concave sur $]0, \infty[$, convexe sur $]-\infty, -3[$, $]-3, 0[$; PI $(0, 0)$

d) Voyez le graphique.

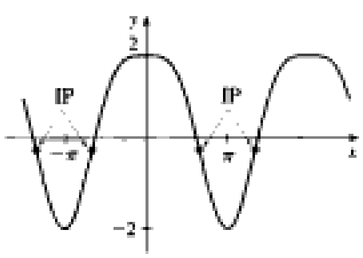


19. a) Croissante sur $](2n-1)\pi, 2n\pi[$, décroissante sur $]2n\pi, (2n+1)\pi[$

b) Maximums locaux $f(2n\pi) = 2$, minimums locaux $f((2n+1)\pi) = -2$

c) Concave sur $]2n\pi - \frac{2}{3}\pi, 2n\pi + \frac{2}{3}\pi[$, convexe sur les autres intervalles ; PI $(2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{2})$

d) Voyez le graphique.



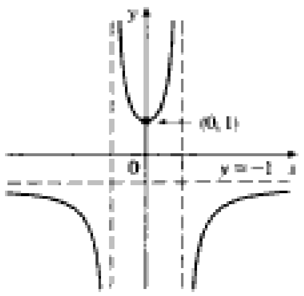
21. a) AV $x = \pm 1$, AH $y = -1$

b) Croissante sur $]0, 1[$, $]1, \infty[$; décroissante sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$

c) Minimum local $f(0) = 1$

d) Concave sur $]-\infty, -1[$, $]1, \infty[$; convexe sur $]-1, 1[$; pas de PI.

e) Voyez le graphique.



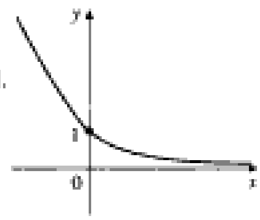
23. a) AH $y = 0$

b) Décroissante sur $]-\infty, \infty[$

c) Ni maximum local, ni minimum local.

d) Convexe sur $]-\infty, \infty[$; pas de PI.

e) Voyez le graphique.



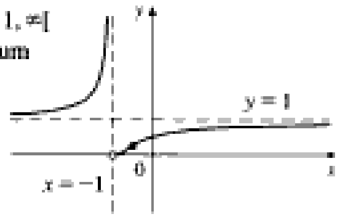
25. a) AH $y = 1$, AV $x = -1$

b) Croissante sur $]-\infty, -1[$, $]-1, \infty[$

c) Ni maximum local, ni minimum local.

d) Concave sur $]-\frac{1}{2}, \infty[$; convexe sur $]-\infty, -1[$, $]-1, -\frac{1}{2}[$; PI $(-\frac{1}{2}, 1/e^2)$

e) Voyez le graphique.



27. Concave sur $]-\infty; -2{,}1[$, $]0{,}25; 2[$; convexe sur $]-2{,}1; 0{,}25[$, $]1{,}9; \infty[$; PI $(-2{,}1; 380)$, $(0{,}25; 1{,}3)$, $(1{,}9; -92)$.

29. a) Maximum local et absolu $f(1) = \sqrt{2}$, pas de minimum.

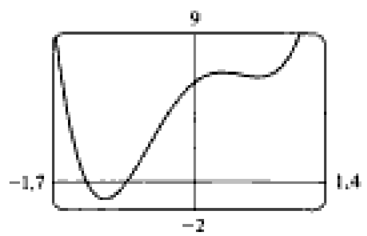
b) $(3 - \sqrt{17})/4$

31. Quand $t \approx 7{,}17$. **33.** Concave sur $]-\infty; 0{,}1[$, convexe sur $]0{,}1; \infty[$

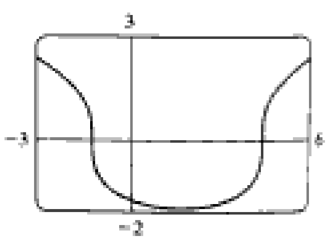
35. $f(x) = \frac{1}{9}(2x^3 + 3x^2 - 12x + 7)$ **43.** 17

Exercices 4.4 ■ page 300

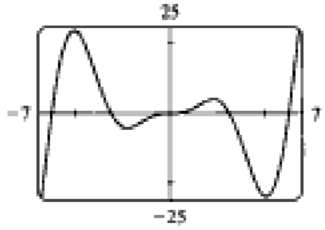
1. Croissante sur $]-1{,}1; 0{,}3[$, $]0{,}7; \infty[$; décroissante sur $]-\infty; -1{,}1[$, $]0{,}3; 0{,}7[$; maximum local $f(0{,}3) \approx 6{,}6$, minimums locaux $f(-1{,}1) \approx -1$, $f(0{,}7) \approx 6{,}3$; concave sur $]-0{,}5; 0{,}5[$, convexe sur $]-\infty; -0{,}5[$, $]0{,}5; \infty[$; PI $(-0{,}5; 2{,}5)$, $(0{,}5; 6{,}5)$.



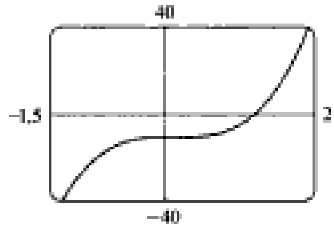
3. Croissante sur $]1{,}5; \infty[$, décroissante sur $]-\infty; 1{,}5[$; pas de maximum local, minimum $f(1{,}5) \approx -1{,}9$; concave sur $]-\infty; -1{,}2[$, $]4{,}2; \infty[$; convexe sur $]-1{,}2; 4{,}2[$; PI $(-1{,}2; 0)$, $(4{,}2; 0)$

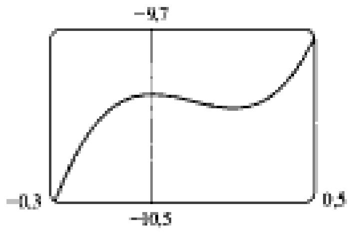


5. Croissante sur $]-7;-5,1[$, $]-2,3;2,3[$, $]5,1;7[$; décroissante sur $]-5,1;-2,3[$, $]2,3;5,1[$; maximums locaux $f(-5,1)\approx 24,1$, $f(2,3)\approx 3,9$; minimums locaux $f(-2,3)\approx -3,9$, $f(5,1)\approx -24,1$; concave sur $]-6,8;-4,0[$, $]-1,5;0[$, $]1,5;4,0[$, $]6,8;7[$; convexe sur $]-7;-6,8[$, $]-4,0;-1,5[$, $]0;1,5[$, $]4,0;6,8[$; PI $(-6,8;-24,4)$, $(-4,0;12,0)$, $(-1,5;-2,3)$, $(0,0)$, $(1,5;2,3)$, $(4,0;-12,0)$, $(6,8;24,4)$

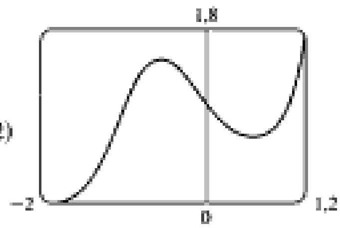


7. Croissante sur $]-\infty,0[$, $]\frac{1}{4},\infty[$; décroissante sur $]0,\frac{1}{4}[$; maximum local $f(0)=-10$, minimum $f(\frac{1}{4})=-\frac{161}{16}\approx -10,1$; concave sur $]-\infty,\frac{1}{8}[$; convexe sur $]\frac{1}{8},\infty[$; PI $(\frac{1}{8},-\frac{321}{32})$

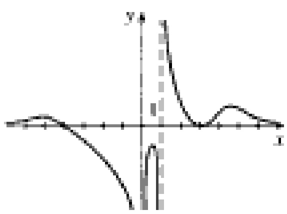


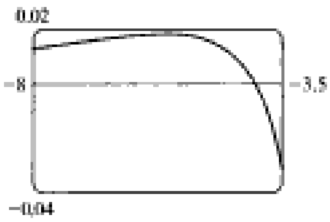


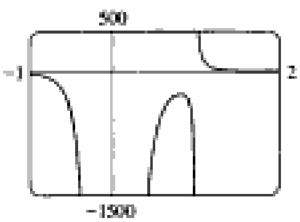
9. Maximum local $f(-1/\sqrt{3})=e^{2\sqrt{3}/9}\approx 1,5$; minimum local $f(1/\sqrt{3})=e^{-2\sqrt{3}/9}\approx 0,7$; PI $(-0,15;1,15)$, $(-1,09;0,82)$

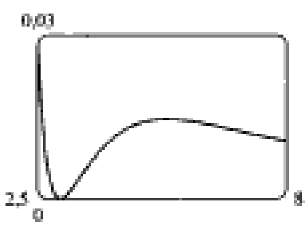


11. Maximums locaux $f(-5,6)\approx 0,018$, $f(0,82)\approx -281,5$, $f(5,2)\approx 0,0145$; minimum $f(3)=0$









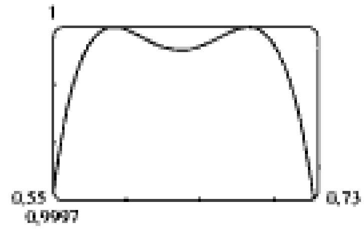
13. $f'(x)=-\dfrac{x(x+1)^2(x^3+18x^2-44x-16)}{(x-2)^3(x-4)^5}$,

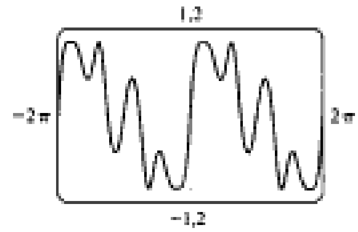
$f''(x)=$

$2\dfrac{(x+1)(x^6+36x^5+6x^4-628x^3+684x^2+672x+64)}{(x-2)^4(x-4)^6}$

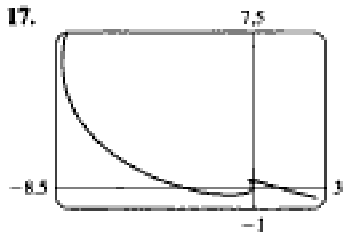
Convexe sur $]-\infty,-5[$, $]-1;-0,5[$, $]-0,1;2[$, $]2,4[$, $]4,\infty[$; concave sur $]-5;-1[$, $]-0,5;-0,1[$; PI $(-5;-0,005)$, $(-1;0)$, $(-0,5;0,00001)$, $(-0,1;0,0000066)$.

15. Maximums $f(0,59)\approx 1$, $f(0,68)\approx 1$, $f(1,96)\approx 1$; minimums $f(0,64)\approx 0,99996$, $f(1,46)\approx 0,49$, $f(2,73)\approx -0,51$; PI $(0,61;0,99998)$, $(0,66;0,99998)$, $(1,17;0,72)$, $(1,75;0,77)$, $(2,28;0,34)$.



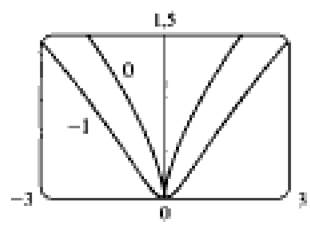


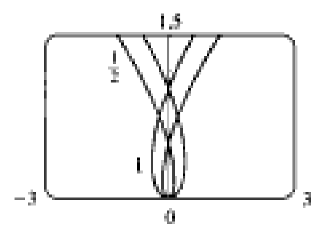
17.



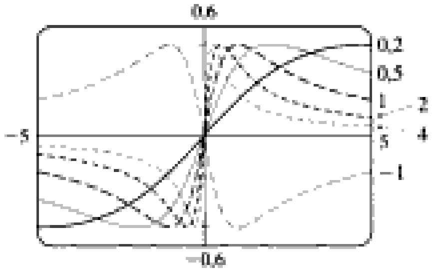
Tangentes verticales en $(0,0)$, $(-\frac{5}{16},\frac{1}{2})$, $(-8,6)$; tangentes horizontales en $(-(2\sqrt{3}+5)/9,-2\sqrt{3}/9)$, $((2\sqrt{3}-5)/9,2\sqrt{3}/9)$.

19. Lorsque $c=0$, il y a un point de rebroussement ; lorsque $c>0$, il y a une boucle dont la taille augmente lorsque c augmente et la courbe se recoupe elle-même en $(0,c)$; le point le plus à gauche est $(2c\sqrt{3c}/9,c/3)$, le plus à droite $(-2c\sqrt{3c}/9,c/3)$.

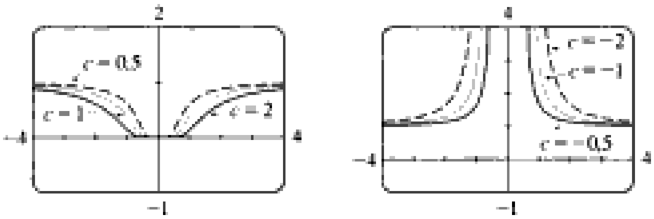




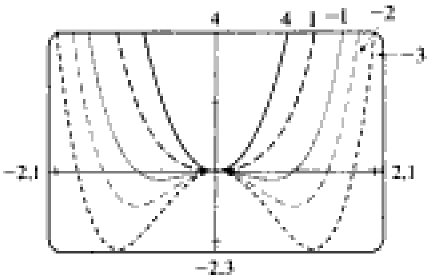
21. Lorsque $c > 0$, les valeurs extrêmes de la fonction sont toujours $\pm\frac{1}{2}$, mais les points extrêmes et le point d'inflexion se rapprochent de l'axe Oy lorsque c augmente.
$c = 0$ est une valeur de transition : lorsque c est remplacé par $-c$, la courbe est réfléchie par rapport à l'axe Ox.



23. Indépendemment de la valeur de c, il n'y a ni maximum, ni minimum. Pour $c < 0$, il y a une asymptote verticale en $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.
$c = 0$ est une valeur de transition en laquelle $f(x) = 1$ pour $x \neq 0$.
Pour $c > 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ et il y a deux points d'inflexion, qui s'écartent de l'axe Oy lorsque $c \to \infty$.



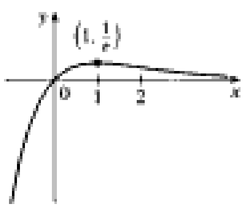
25. Lorsque $c \geqslant 0$, il n'y a pas de PI et une seule valeur extrême, l'origine. Pour $c < 0$, il y a un maximum à l'origine, deux minimums et deux PI, qui descendent et s'écartent de l'origine lorsque $c \to -\infty$.



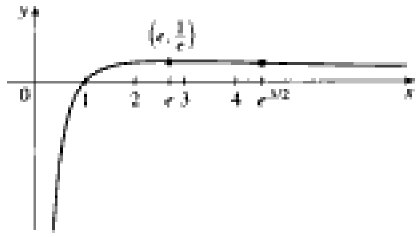
Exercices 4.5 ■ page 308

1. $\frac{1}{4}$ **3.** 1 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** ∞ **9.** $\frac{1}{2}$ **11.** 0 **13.** $\frac{3}{5}$
15. 0 **17.** 0 **19.** 0 **21.** 0 **23.** 1 **25.** 1
27. e^{-2} **29.** 1 **31.** 5 **33.** $\frac{1}{4}$

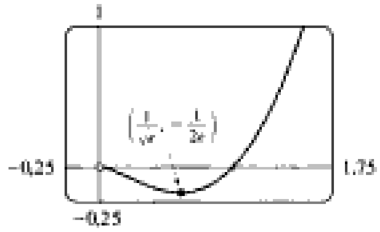
35. AH $y = 0$



37. AH $y = 0$, AV $x = 0$

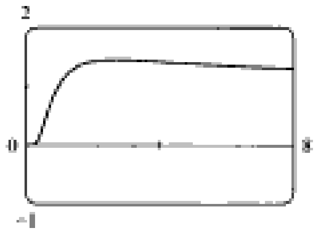


39. a)



b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
c) Minimum local $f(1/\sqrt{e}) = -1/(2e)$;
concave sur $(0, e^{-3/2})$; convexe sur $(e^{-3/2}, \infty)$

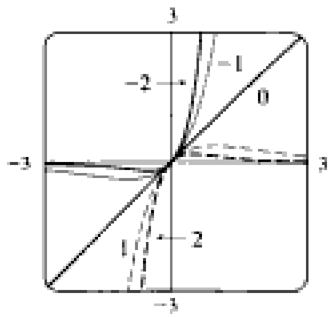
41. a)



b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$

c) Maximum local $f(e) = e^{1/e}$; PI en $x \approx 0{,}58$ et $4{,}37$.

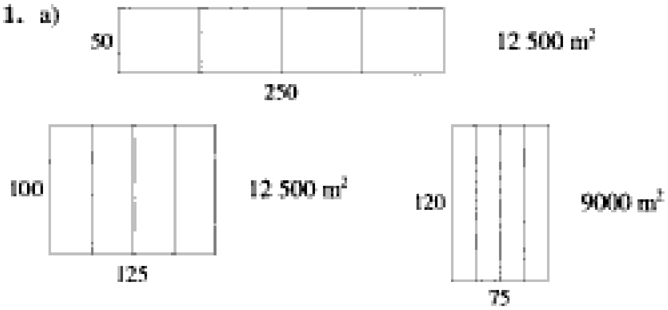
43. Pour $c > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Pour $c < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Lorsque $|c|$ augmente, les points de maximum et de minimum ainsi que les points d'inflexion se rapprochent de l'origine.



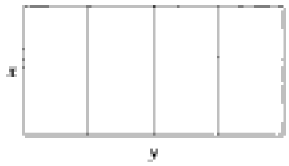
49. $\frac{16}{9}a$

Exercices 4.6 ■ page 316

1. a)



b)

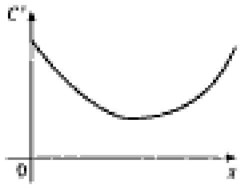


c) $A = xy$ d) $5x + 2y = 750$ e) $A = 375x - \frac{5}{2}x^2$
f) 14 062,5 m²
3. 4000 cm³ **7.** (1,2; −0,6) **9.** Le carré de côté $\sqrt{2}r$
11. 3 cm²
13. Largeur $60/(4 + \pi)$ m ; hauteur du rectangle $30/(4 + \pi)$ m.
15. a) Le carré avec tout le fil.
b) $40\sqrt{3}/(9 + 4\sqrt{3})$ m pour le carré.
17. $V = 2\pi R^3/(9\sqrt{3})$
19. a) $\frac{3}{2}s^2 \operatorname{cosec}\theta(\operatorname{cosec}\theta - \sqrt{3}\operatorname{cotg}\theta)$
b) Arccos $(1/\sqrt{3}) \approx 55°$ c) $6s[h + s/(2\sqrt{2})]$
21. $10\sqrt[3]{3}/(1 + \sqrt[3]{3})$ m de la source lumineuse la plus forte.
23. $y = -\frac{5}{2}x + 10$ **27.** $x = 6$ cm. **29.** 9,35 m
31. À une distance $5 - 2\sqrt{5}$ de A.
33. a) Environ 5,1 km de B.
b) C est proche de B ; C est proche de D ; $E_c/E_t = \sqrt{25 + x^2}/x$, où $x = |BC|$.
c) ≈ 1,07 ; il n'y a pas de telle valeur.
d) $\sqrt{41}/4 \approx 1,6$
35. a) $T_1 = D/c_1$, $T_2 = (2h\sec\theta)/c_1 + (D - 2h \operatorname{tg}\theta)/c_2$, $T_3 = \sqrt{4h^2 + D^2}/c_1$.
c) $c_1 \approx 3,85$, $c_2 \approx 7,66$, $h \approx 0,42$.

Exercices 4.7 ■ page 325

1. a) $C(0)$ représente les coûts fixes, qui sont encourus, même lorsque rien n'est produit.
b) Là où le coût marginal est minimum.

c)



3. 17,40 euros/unité ; le coût de production de la 101ᵉ unité est d'environ 17,4 euros.
5. a) 19 600 euros ; 19,60 euros ; 28 euros/unités. b) 400 unités
c) 16 euros/unité.
7. a) $c(x) = 3700/x + 5 - 0,04x + 0,0003x^2$, $C'(x) = 5 - 0,08x + 0,0009x^2$
b) Entre 208 et 209 unités. c) $c(209) \approx 27,45$ euros/unité.
d) 3,22 euros/unité
9. 333 unités **11.** a) Environ 200 m b) 192 m.
13. a) $p(x) = 19 - (x/3000)$ b) 9,50 euros
15. a) $p(x) = 550 - (x/10)$ b) 175 euros c) 100 euros.

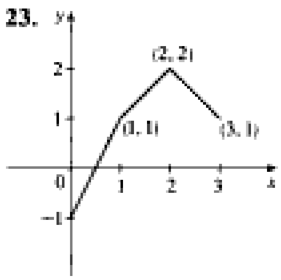
Exercices 4.8 ■ page 331

1. $x_2 \approx 2,3$, $x_3 \approx 3$ **3.** $\frac{4}{5}$ **5.** −0,6860
7. 2,16573677 **9.** 1,895494
11. −2,11490754, 0,25410169, 1,86080585
13. 0 ; 1,10914418 ; 3,69815367
15. −3,20614267 ; 1,37506470
17. 0,15438500 ; 0,84561500 **19.** b) 31,622777
25. (0,904557; 1,855277) **27.** 3,46 m **29.** 0,76286 %

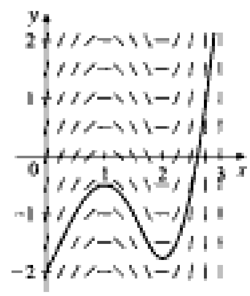
Exercices 4.9 ■ page 338

1. $4x^3 + 3x^2 - 5x + C$
3. $-3/(2x^4) + C_1$ si $x > 0$, $-3/(2x^4) + C_2$ si $x < 0$,
5. $(2t^{7/2}/7) + (4t^{5/2}/5) + C$
7. $\operatorname{tg} t + (t^3/3) + C_n$, $(2n - 1)\pi/2 < t < (2n + 1)\pi/2$
9. $x^2 + 5\operatorname{Arcsin} x + C$ **11.** $x^5 - (x^6/3) + 4$
13. $f(x) = (x^4/12) + (x^5/20) + Cx + D$
15. $f(x) = 2\ln(-x) + 7$ **17.** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$
19. $f(x) = 2\ln(-x) + (\ln 2)x - \ln 2$ **21.** 10

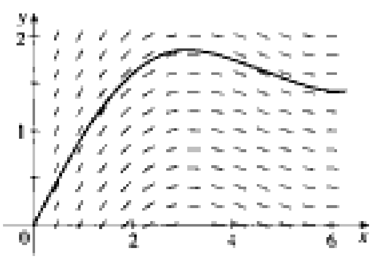
23.



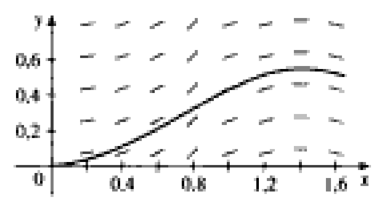
25.



27.



29.



31. $s(t) = 2t^{3/2} + 3$
33. a) $s(t) = 450 - 4,9t^2$ b) $\sqrt{450/4,9} \approx 9,58$ s
c) $-9,8\sqrt{450/4,9} \approx -93,9$ m/s d) Environ 9,09 s.

37. 66 m **39.** $\frac{10}{9}$ m/s^2 **41.** 742,08 euros.
45. a) 36,666 km b) 34,666 km c) 30,55 min
d) 88,666 km

Chapitre 4 Révision ■ page 340

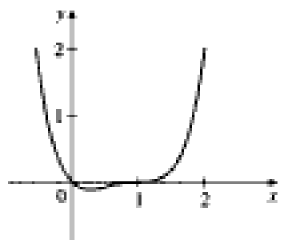
Vrai-Faux

1. Faux **3.** Faux **5.** Vrai **7.** Faux **9.** Vrai

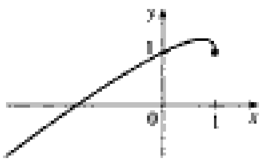
Exercices

1. Maximum local et absolu $f(-2) = 21$; minimum local $f(2) = -11$, minimum absolu $f(-5) = -60$.
3. Minimum local et absolu $f(\pi/4) = (\pi/4) - 1$, maximum absolu $f(\pi) = \pi$.

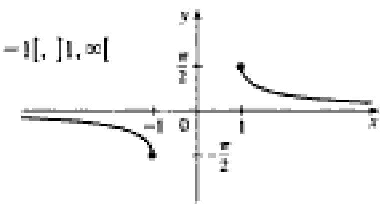
5. a) Aucun
b) Croissante sur $]\frac{1}{4}, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{4}[$
c) Minimum $f(\frac{1}{4}) = -\frac{27}{256}$
d) Concave sur $]\frac{1}{2}, 1[$; convexe sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$, $]1, \infty[$;
PI $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$, $(1, 0)$
e) Voyez le graphique.



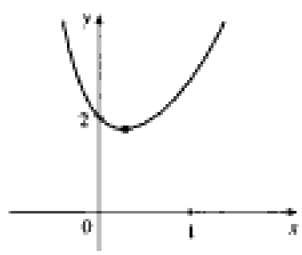
7. a) Aucun
b) Croissante sur $]-\infty, \frac{3}{4}[$, décroissante sur $]\frac{3}{4}, 1[$
c) Maximum $f(\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$
d) Concave sur $]-\infty, 1[$
e) Voyez le graphique.



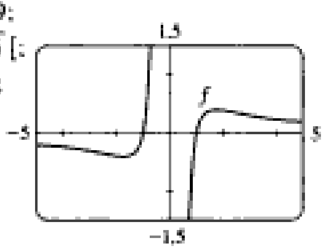
9. a) AH $y = 0$
b) Décroissante sur $]-\infty, -1[$, $]1, \infty[$
c) Aucun
d) Concave sur $]-\infty, -1[$, convexe sur $]1, \infty[$
e) Voyez le graphique.



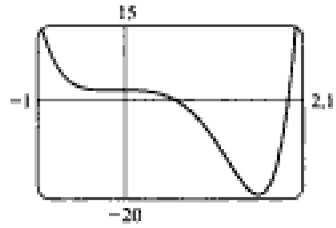
11. a) Aucun
b) Croissante sur $]\frac{1}{4}\ln 3, \infty[$, décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{4}\ln 3[$
c) Minimum $f(\frac{1}{4}\ln 3) = 3^{1/4} + 3^{-3/4}$
d) Convexe sur $]-\infty, \infty[$
e) Voyez le graphique.

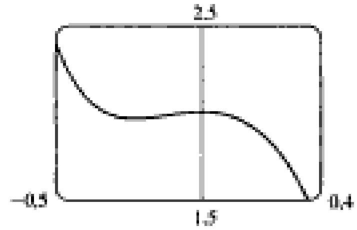


13. Croissante sur $]-\sqrt{3}, 0[$, $]0, \sqrt{3}[$; décroissante sur $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $]\sqrt{3}, \infty[$; maximum local $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}/9$, minimum $f(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}/9$;
Concave sur $]-\infty, -\sqrt{6}[$, $]0, \sqrt{6}[$; convexe sur $]-\sqrt{6}, 0[$, $]\sqrt{6}, \infty[$;
PI $(\sqrt{6}, 5\sqrt{6}/36)$, $(-\sqrt{6}, -5\sqrt{6}/36)$

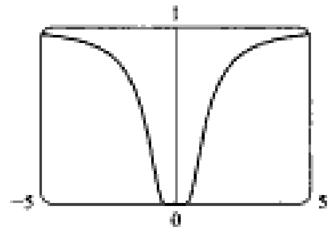


15. Croissante sur $]-0{,}2; 0[$, $]1{,}6; \infty[$; décroissante sur $]-\infty; -0{,}2[$, $]0; 1{,}6[$; maximum local $f(0) = 2$; minimums $f(-0{,}2) \approx 1{,}96$, $f(1{,}6) \approx -19{,}2$; concave sur $]-0{,}1; 1{,}2[$ convexe sur $]-\infty; -0{,}1[$, $]1{,}2; \infty[$; PI $(-0{,}1; 2)$, $(1{,}2; -12{,}1)$.



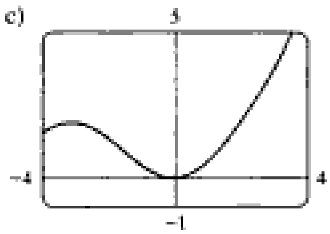


17. PI $(\pm\sqrt{2/3}, e^{-3/2})$



19. Maximum en $x = 0$, minimums en $x = \pm 0{,}87$, PI en $x \approx \pm 0{,}52$.
21. Pour $C > -1$, f est périodique de période 2π et atteint des maximums locaux en $2n\pi + \pi/2$, n entier. Pour $C \leqslant -1$, f n'a pas de graphique. Pour $-1 < C \leqslant 1$, f a des asymptotes verticales. Pour $C > 1$, f est continue sur $\mathbb{R}$. Lorsque C croît, f se déplace vers le haut et ses oscillations deviennent moins prononcées.
23. $a = -3$, $b = 7$ **25.** $-1/(2\pi)$ **27.** 0 **29.** $-\frac{1}{3}$
31. $\frac{1}{3}$ **33.** 120 m/h **35.** 2,28 m/s **39.** $3\sqrt{3}r^2$
41. $4/\sqrt{3}$ cm depuis D ; en C. **43.** $L = C$ **45.** 11,50 euros
47. $-2{,}063421$
49. $e^x - \ln|x| + C_1$ si $x < 0$, $e^x - \ln|x| + C_2$ si $x > 0$.
51. $f(x) = 2\text{Arctg}\, x - 1$
53. $f(x) = (x^5/20) + (x^3/6) + x - 1$
55. b) $0{,}1e^x - \cos x + 0{,}9$

c)



57. Non

61. b) Environ 10,6 cm sur 4,85 cm

c) $50/\sqrt{3}$ cm sur $50\sqrt{2/3}$ cm.

63. a) $6\sqrt{2} \approx 8,48$ m

b) $dI/dt = -43,2k(h-1)/[(h-1)^2 + 12^2]^{5/2}$ où k est une constante de proportionnalité.

Pleins feux sur la résolution de problèmes ■ page 345

5. $(-2, 4)$, $(2, -4)$ **7.** $\frac{4}{3}$ **11.** $(m/2, m^2/4)$

13. a) $-\operatorname{tg}\theta\left[\frac{1}{c}\frac{dc}{dt} + \frac{1}{b}\frac{db}{dt}\right]$

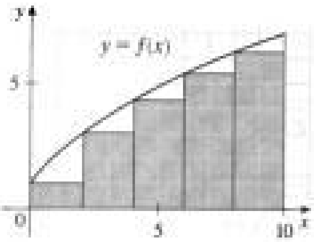
b) $$\frac{b\dfrac{db}{dt} + c\dfrac{dc}{dt} - \left(b\dfrac{dc}{dt} + c\dfrac{db}{dt}\right)\sec\theta}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta}}$$

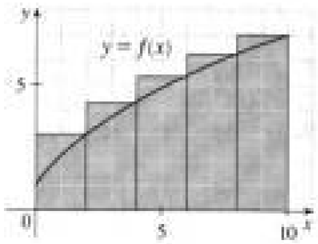
15. a) $x/(x^2+1)$ b) $\frac{1}{2}$ **19.** 11,204 cm^3/min

CHAPITRE 5

Exercices 5.1 ■ page 359

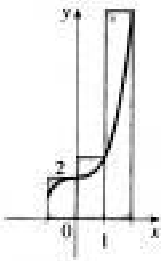
1. a) 40, 52



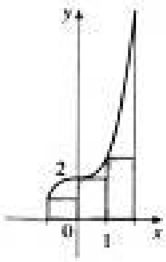


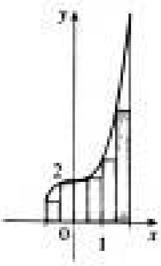
b) 43,2; 49,2

3. a) 15; 12,1875

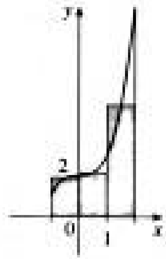


b) 6; 7,6875





c) 9,375; 9,65625 d) M_6



5. 1,9835 ; 1,9982 ; 1,9993 ; 2

7. a) gauche : 4,5148, 4,6165, 4,6366 ;
droite : 4,8148, 4,7165, 4,6966.

9. 10,55 m, 13,65 m **11.** 43 m

15. a) $\lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^6}\sum_{i=1}^{n} i^5$

b) $n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$ c) $\frac{32}{3}$

17. $\sin b$, 1

Exercices 5.2 ■ page 370

1. 0,25 **3.** a) 4 b) 6 c) 10 **5.** 153,1250

7. 1,8100 **9.** 1,81001414 ; 1,81007263 ; 1,81008347

11. $\int_0^{\pi} \cos x\,dx$ **13.** $\int_0^{1}(2x^2 - 5x)dx$ **15.** $\frac{4}{3}$

17. 3,75 **19.** $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{5\pi i}{n}\right)\frac{\pi}{n} = \frac{2}{5}$

21. a) 4 b) 10 c) -3 d) 2 **23.** 10

25. $3 + 9\pi/4$ **27.** 0 **29.** $\int_1^{12} f(x)dx$ **31.** $-0,8$

33. 3 **35.** $e^5 - e^3$

Exercices 5.3 ■ page 380

1. L'accroissement du poids (en kilos) de l'enfant entre 5 et 10 ans.

3. Le nombre de litres de pétrole qui se sont échappés durant les deux premières heures.

5. L'accroissement de la recette lorsque la production passe de 1000 à 5000 unités.

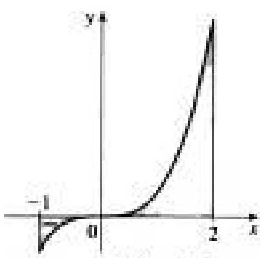
7. -12 **9.** $-2 + 1/e$ **11.** $\frac{16}{3}$ **13.** $6(3\sqrt{2} - 2)/5$

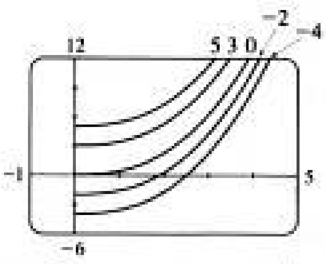
15. $\frac{29}{35}$ **17.** $(\sqrt{2} - 1)/2$ **19.** $2\sqrt{3}/3$ **21.** $\ln 2$

23. $2^8/\ln 2$ **25.** $\pi/2$ **27.** $\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{2}$ **29.** $\frac{28}{3}$

31. $\frac{243}{4}$ **33.** 2 **35.** 0 ; 1,32 ; 0,84

37. 3,75 **41.** $\frac{2}{5}x^{5/2} + C$





43. $4x - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{1}{3}x^3 + C$ **45.** $x^2 + \sec x + C$ **47.** $\frac{4}{3}$

49. a) $-\frac{3}{2}$ m b) $\frac{41}{6}$ m

51. a) $v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s b) $416\frac{2}{3}$ m

53. $46\frac{2}{3}$ kg **55.** 1,4 km **57.** 58 000 euros

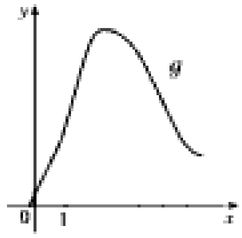
59. b) 40 % au plus ; $\frac{5}{36}$. **61.** 3

Exercices 5.4 ■ page 390

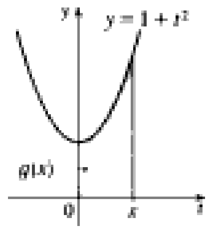
1. L'un défait ce que l'autre a fait. Voyez le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, page 388.

5. $2 \leqslant \int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx \leqslant 2e$

7. a) 0, 2, 5, 7, 3
b) $[0, 3]$ c) $x = 3$
d)



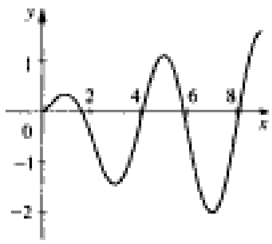
9.



$g'(x) = 1 + x^2$

11. $g'(x) = (x^2 - 1)^{20}$ **13.** $g'(u) = 1/(1 + u^4)$
15. $h'(x) = -\sin^4(1/x)/x^2$ **17.** $y' = -\sin(\mathrm{tg}^4 x)\sec^2 x$
19. $g'(x) = \dfrac{-2(2x - 1)}{2x + 1} + \dfrac{3(3x - 1)}{3x + 1}$ **21.** $\sqrt{257}$

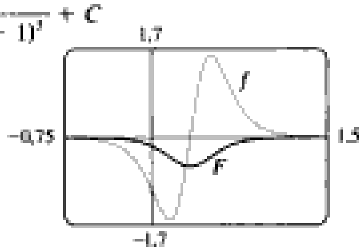
23. a) Maximums locaux en 1 et 5; minimums en 3 et 7
b) 9
c) $(\frac{1}{2}, 2)$, $(4, 6)$, $(8, 9)$
d) Voyez le graphique.



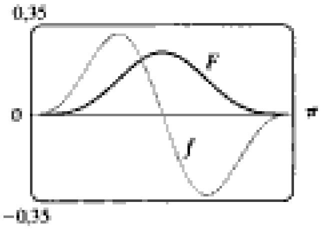
25. a) $-2\sqrt{n}$, $\sqrt{4n - 2}$, n un entier quelconque > 0.
b) $(0, 1)$, $(-\sqrt{4n - 1}, -\sqrt{4n - 3})$ et $(\sqrt{4n - 1}, \sqrt{4n + 1})$, n un entier quelconque > 0.
c) 0,7
27. $f(x) = \int_1^x (2^t/t)\,dt$ **29.** $f(x) = x^{3/2}$, $a = 9$
31. b) La dépense moyenne sur $[0, t]$.

Exercices 5.5 ■ page 400

1. $(x^2 - 1)^{100}/200 + C$ **3.** $\frac{1}{4}e^{4x} + C$
5. $-1/[2(x^2 + 6x)] + C$ **7.** $(\ln x)^3/3 + C$
9. $\frac{2}{3}(x - 1)^{3/2} + C$ **11.** $(2 + x^4)^{3/2}/6 + C$
13. $-2/[5(t + 1)^5] + C$ **15.** $(1 + e^x)^{11}/11 + C$
17. $\frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,3\theta + C$ **19.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + C$
21. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$
23. $\frac{1}{2}\ln|2x - 1| + C$ **25.** $\ln|\ln x| + C$
27. $x - e^{-x} + C$ **29.** $\frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x| + C$
31. $\mathrm{tg}^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$
33. $\dfrac{-1}{6(3x^2 - 2x + 1)^3} + C$



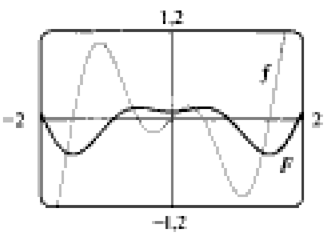
35. $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$



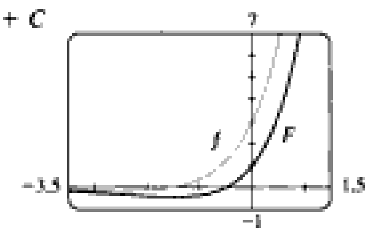
37. $\frac{1}{101}$ **39.** $\pi/8$ **41.** $\frac{16}{15}$ **43.** 0
45. $(4\sqrt{2}/3) - (5\sqrt{5}/12)$ **47.** 0 **49.** $\frac{1}{2}\ln 3$ **51.** 2
53. $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$ **55.** 6π
57. $\frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| + C$
59. $\frac{3}{10}\ln|2x - 1| - \frac{1}{15}\ln|x + 2| + \frac{1}{2}\ln|x| + C$
63. $-\sqrt{x^2 + 4}/(4x) + C$
65. $[5/(4\pi)][1 - \cos(2\pi t/5)]$ L **67.** 5

Exercices 5.6 ■ page 407

1. $(xe^{2x}/2) - (e^{2x}/4) + C$
3. $-\frac{1}{4}x\cos 4x + \frac{1}{16}\sin 4x + C$
5. $\frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C$
7. $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$
9. $\frac{1}{8}(\sin 2\theta - 2\theta\cos 2\theta) + C$ **11.** $t^3(3\ln t - 1)/9 + C$
13. $e^{2\theta}(2\sin 3\theta - 3\cos 3\theta)/13 + C$
15. $1 - 2/e$ **17.** $-\frac{1}{2}$ **19.** $(\pi - 12 + 6\sqrt{3})/12$
21. $2\ln 4 - \frac{3}{2}$ **23.** -1
25. $2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C$
27. $e^{x^2}[(x^4/2) - x^2 + 1] + C$
29. $(x\sin\pi x)/\pi + (\cos\pi x)/\pi^2 + C$



31. $(2x + 1)e^x + C$

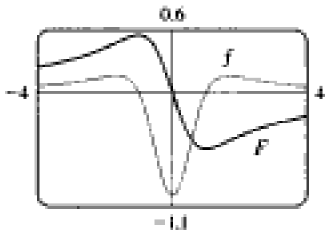


35. b) $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$ **39.** $x[(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 + 6\ln x - 6] + C$
41. $2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2)$ m

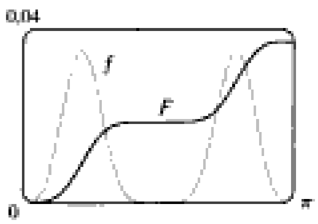
Exercices 5.7 ■ page 413

1. $\frac{1}{2}x^2 - x - 4\ln(x^2 + 9) + \frac{5}{3}\,\mathrm{Arctg}\,(x/3) + C$
3. $\frac{1}{25}e^{-3x}(-3\cos 4x + 4\sin 4x) + C$
5. $(-\sqrt{9x^2 - 1}/x) + 3\ln\left|3x + \sqrt{9x^2 - 1}\right| + C$
7. $\frac{1}{2}[x^2\,\mathrm{Arcsin}(x^2) + \sqrt{1 - x^4}] + C$
9. $\dfrac{x + 2}{2}\sqrt{5 - 4x - x^2} + \dfrac{9}{2}\,\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x + 2}{3} + C$

11. $\frac{1}{4}\operatorname{tg}x\sec^3x + \frac{3}{8}\operatorname{tg}x\sec x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \operatorname{tg}x| + C$
13. $\frac{1}{9}\sin^3x\,[3\ln(\sin x) - 1] + C$
15. $\frac{8}{15}$ **17.** $\frac{1}{5}\ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10} - 2}\right| + C$
19. $(1 + e^x)\ln(1 + e^x) - e^x + C$
21. $\sqrt{e^{2x} - 1} - \cos^{-1}(e^{-x}) + C$
25. $-\frac{1}{4}x(5 - x^2)^{3/2} + \frac{5}{8}x\sqrt{5 - x^2} + \frac{25}{8}\sin^{-1}(x/\sqrt{5}) + C$
27. $-\frac{1}{5}\sin^2x\cos^3x - \frac{2}{15}\cos^3x + C$
29. $\frac{1}{10}(1 + 2x)^{5/2} - \frac{1}{6}(1 + 2x)^{3/2} + C$
31. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x - \frac{1}{2}\ln(1 + \operatorname{tg}^2x) + C$
$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x - \ln|\sec x| + C$
33. $\dfrac{2^{x-1}\sqrt{2^{2x} - 1}}{\ln 2} - \dfrac{\ln(\sqrt{2^{2x} - 1} + 2^x)}{2\ln 2} + C$
35. $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1)$;
maximum en -1,
minimum en 1;
PI en $-1{,}7$, 0 et 1,7



37. $F(x) = -\frac{1}{10}\sin^3x\cos^7x - \frac{3}{80}\sin x\cos^7x + \frac{1}{160}\cos^5x\sin x + \frac{1}{128}\cos^3x\sin x + \frac{3}{256}\cos x\sin x + \frac{3}{256}x$



Exercices 5.8 ■ page 425

1. a) $G_2 = 6$, $D_2 = 12$, $M_2 \approx 9{,}8$
b) G_2 est une estimation par défaut, D_2 et M_2 par excès.
c) $T_2 = 9 < I$ d) $G_n < T_n < I < M_n < D_n$
3. a) $T_4 \approx 0{,}895759$ (par défaut)
b) $M_4 \approx 0{,}908907$ (par excès) $T_4 < I < M_4$
5. a) 0,746211 b) 0,747131 c) 0,746825
7. a) 0,132465 b) 0,132857 c) 0,132727
9. a) 0,409140 b) 0,388849 c) 0,395802
11. a) 1,098004 b) 1,098709 c) 1,109031
13. a) $T_{10} \approx 0{,}881839$, $M_{10} \approx 0{,}882202$
b) $|E_T| \leqslant 0{,}01\overline{3}$, $|E_M| \leqslant 0{,}00\overline{6}$
c) $n = 366$ pour T_n, $n = 259$ pour M_n
15. a) $T_{10} \approx 1{,}719713$, $E_T = -0{,}001432$;
$S_{10} \approx 1{,}718283$, $E_S = -0{,}000001$
b) $|E_T| \leqslant 0{,}002266$, $|E_S| \leqslant 0{,}0000016$
c) $n = 151$ pour T_n, $n = 107$ pour M_n, $n = 8$ pour S_n
17. a) 2,8 b) 7,954926518 c) 0,287 d) 7,954926521
e) L'erreur réelle est inférieure. f) 10,9
g) 7,953789422 h) 0,0592
i) L'erreur réelle est inférieure. j) $n \geqslant 50$

19.

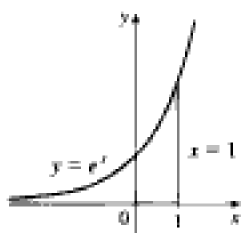
n	G_n	D_n	T_n	M_n
4	0,140625	0,390625	0,265625	0,242188
8	0,191406	0,316406	0,253906	0,248047
16	0,219727	0,282227	0,250977	0,249512

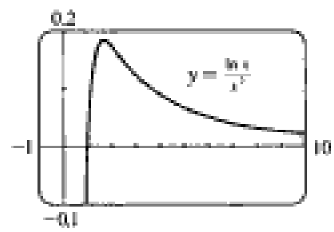
n	E_G	E_D	E_T	E_M
4	0,109375	−0,140625	−0,015625	0,007813
8	0,058594	−0,066406	−0,003906	0,001953
16	0,030273	−0,032227	−0,000977	0,000488

Les remarques sont les mêmes qu'après l'exemple 1.
21. a) 11,5 b) 12 c) $11{,}\overline{6}$ **23.** 8,57 km
25. $37{,}7\overline{3}$ dm/s **27.** 29,3 %

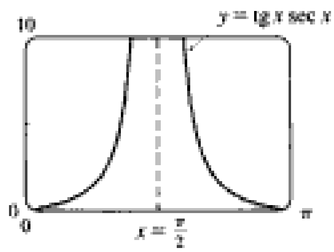
Exercices 5.9 ■ page 435

1. a) Intervalle infini b) Discontinuité infinie
c) Discontinuité infinie d) Intervalle infini
3. $\frac{1}{2} - 1/(2t^2)$; 0,495 ; 0,49995 ; 0,4999995 ; 0,5 **5.** 1
7. $\frac{3}{2}$ **9.** Divergente **11.** 0 **13.** Divergente
15. Divergente **17.** $e^2/4$ **19.** Divergente
21. Divergente **23.** $2\sqrt{3}$ **25.** Divergente
27. Divergente **29.** $\frac{2}{3}$ **31.** $-\frac{1}{4}$
33. e **35.** 1





37. Divergente

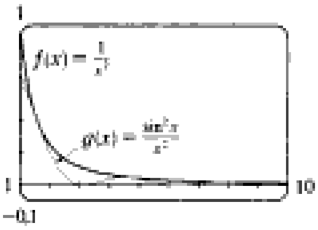


39. (a)

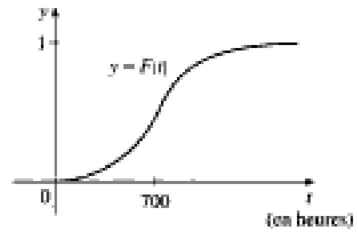
t	$\int_1^t [(\sin^2x)/x^2]\,dx$
2	0,447453
5	0,577101
10	0,621306
100	0,668479
1 000	0,672957
10 000	0,673390

L'intégrale semble convergente.

c)



41. Convergente **43.** Convergente **45.** Divergente
47. π **49.** $1/(1-p)$, $p < 1$
53. a)



b) La vitesse à laquelle $F(t)$ croît lorsque t croît.
c) 1 ; toutes les ampoules finissent par s'éteindre.
55. 8264,5 ans **59.** 1000

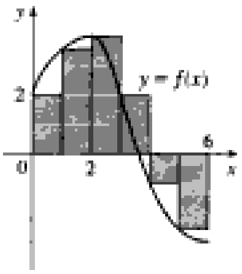
Chapitre 5 Révision ■ page 437

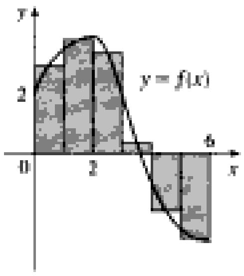
Vrai-Faux

1. Vrai **3.** Faux **5.** Vrai **7.** Vrai **9.** Vrai
11. Faux

Exercices

1. a) 8 b) 5,6





3. $\frac{1}{3} + \pi/4$ **5.** 3 **7.** $f = c$, $f' = b$, $\int_0^x f(t)\,dt = a$
9. $\frac{9}{10}$ **11.** $\frac{1}{2}\ln 2$ **13.** $\frac{1209}{28}$ **15.** 2
17. $(1/\pi)(e^{\pi} - 1)$ **19.** $x \sec x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C$
21. $\ln(e^x + 1) + C$ **23.** $\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$
25. $2e^{\sqrt{x}} + C$ **27.** $2\sqrt{1 + \sin x} + C$ **29.** $\frac{64}{5}$
31. $F'(x) = \sqrt{1 + x^4}$ **33.** $g'(x) = 3x^2/\sqrt{1 + x^9}$
35. $\frac{1}{2}\left[e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + \operatorname{Arcsin}(e^x)\right] + C$
37. $\frac{1}{4}(2x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} +$
$\frac{3}{8}\ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right| + C$
39. a) 1,090608 (surestimation)
b) 1,088840 (sous-estimation)
c) 1,089429 (on ne sait pas)
41. a) 0,0067 b) $0{,}00\overline{3}$
43. a) 3,8 b) 1,7867 ; 0,000646 c) $n \geq 30$
45. $\frac{1}{24}$ **47.** Divergente **49.** 2 **51.** Convergente
53. a) $29{,}1\overline{6}$ b) 29,5 **55.** 44,4 %
57. $Ce^{-x^2/(4kt)}\sqrt{4\pi kt}$ **59.** $f(x) = e^{2x}(2x + 1)/(1 - e^{-x})$

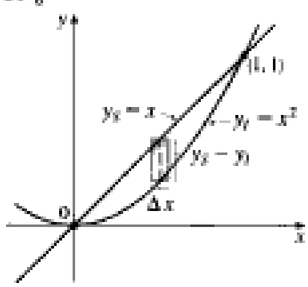
Pleins feux sur la résolution de problèmes ■ page 444

1. Environ 3,96 cm du centre. **3.** $\pi/2$ **5.** 1
7. e^{-2} **9.** N'existe pas. **11.** $[-1, 2]$
13. $\sqrt{1 + \sin^4 x}\cos x$ **15.** 0

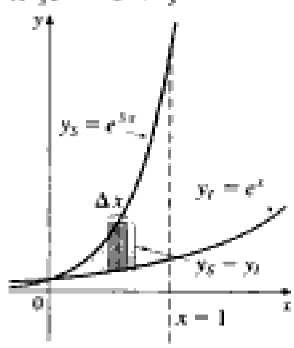
CHAPITRE 6

Exercices 6.1 ■ page 453

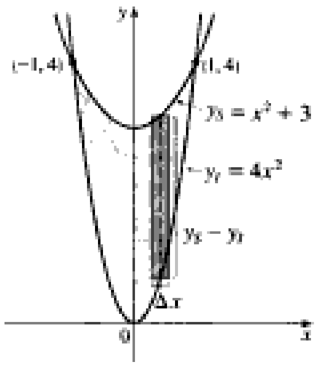
1. $\frac{20}{3}$ **3.** $\frac{4}{3}$
5. $\frac{1}{6}$



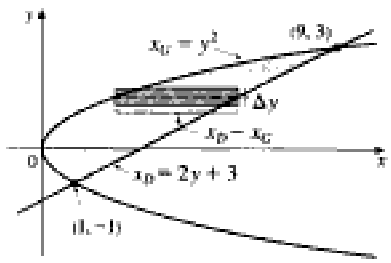
7. $\frac{1}{3}e^3 - e + \frac{2}{3}$



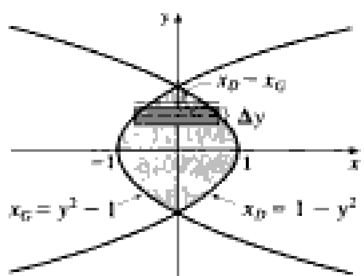
9. 4



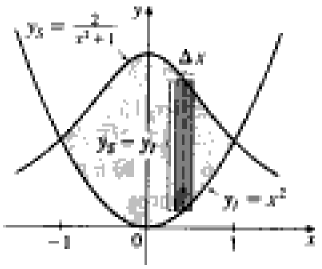
11. $\frac{32}{3}$



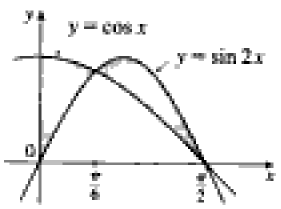
13. $\frac{8}{3}$



15. $\pi - \frac{2}{3}$



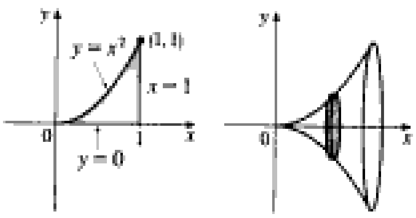
17. $-1{,}02$; $1{,}02$; $2{,}70$ **19.** 0; 0,70; 0,08 **21.** $\approx 22{,}22$ m
23. 84 m^2
25. $\frac{1}{2}$



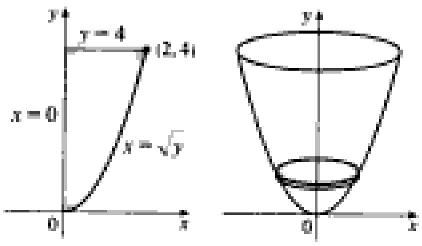
27. πab **29.** $(e^{\pi/2} - 1)/2$ **31.** $24\sqrt{3}/5$ **33.** ± 6
35. $4^{2/3}$ **37.** $f(t) = 3t^2$
41. $0 < m < 1$; $m - \ln m - 1$

Exercices 6.2 ■ page 453

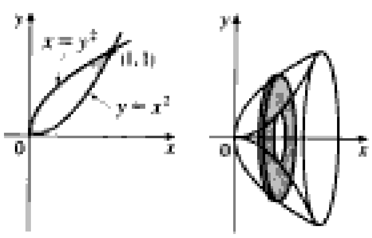
1. $\pi/5$



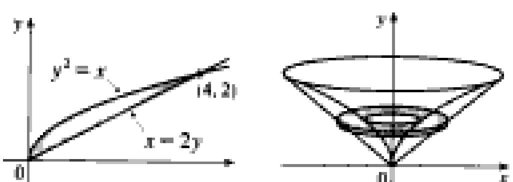
3. 8π



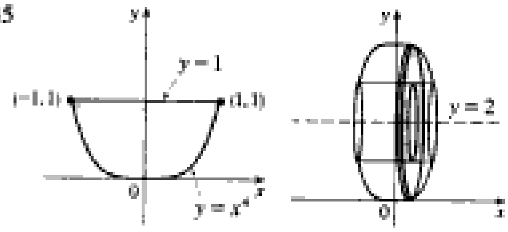
5. $3\pi/10$



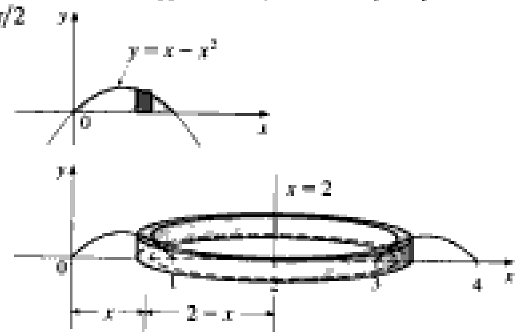
7. $64\pi/15$



9. $208\pi/45$

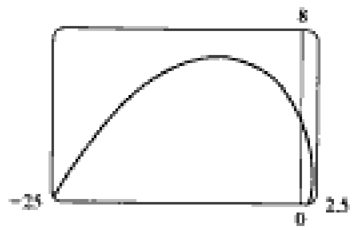


11. $832\pi/21$ **13.** 0; 0,747; 0,132 **15.** 1072 cm^3
17. $\pi r^2 h/3$ **19.** $\pi h^2[r - (h/3)]$ **21.** $2b^2h/3$
23. 10 cm^3 **25.** 24 **27.** 2 **29.** $\frac{1}{2}$
31. a) $8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$ b) $2\pi^2 r^2 R$ **33.** b) $\pi r^2 h$
35. $\frac{5}{12}\pi r^3$ **37.** $8\int_0^r \sqrt{R^2 - y^2}\,\sqrt{r^2 - y^2}\, dy$ **39.** $\pi/15$
41. $\pi/2$

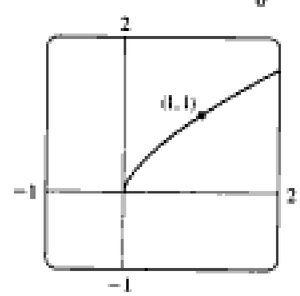


Exercices 6.3 ■ page 468

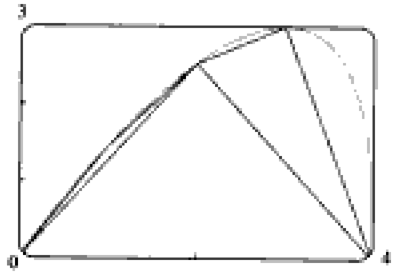
1. $4\sqrt{5}$
3. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$



5. $(13\sqrt{13} - 8)/27$

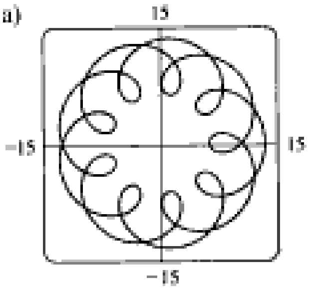


7. 1,548 **9.** 3,820
11. a), b)



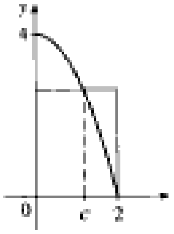
$L_1 = 4$,
$L_2 \approx 6{,}43$,
$L_4 \approx 7{,}50$

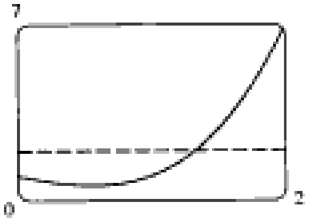
c) $\int_0^4 \sqrt{1 + [4(3-x)/(3(4-x)^{2/3})]^2}\,dx$ d) 7,7988
13. $(81 \ln 3)/512$ **15.** $\ln(\sqrt{2}+1)$ **17.** 29,36
21. a) $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$ b) ≈ 294



Exercices 6.4 ■ page 472

1. 0 **3.** $(e^2-1)/2$
5. a) $\frac{8}{3}$ b) $2/\sqrt{3}$ **7.** a) 2 b) $\approx 1{,}32$
c) c)





11. $(10 + 140/\pi)\,°C \approx 14{,}95\,°C$ **13.** 6 kg/m
15. $5/(4\pi) \approx 0{,}4$ L

Exercices 6.5 ■ page 482

1. $\frac{5030}{3}$ J **3.** 1,125 J
5. a) $\frac{25}{24} \approx 1{,}04$ J b) 10,8 cm
7. 625 J **9.** 142 500 J **11.** $\approx 2{,}45 \times 10^3$ J
13. a) $\approx 1{,}06 \times 10^6$ J b) 2 m
17. a) $Gm_1m_2[(1/a)-(1/b)]$ b) $\approx 8{,}5 \times 10^9$ J
19. $6{,}5 \times 10^6$ N **21.** $6{,}6 \times 10^3$ N
23. a) 29 430 N b) 264 870 N
c) 255 060 N d) 1 422 382,8 N
25. 40, 12, $(1, \frac{10}{3})$ **27.** $(1/(e-1), (e+1)/4)$
29. $(0, \pi/8)$ **31.** $\frac{4}{3}$, 0, $(0, \frac{2}{3})$ **33.** b) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

Exercices 6.6 ■ page 488

1. 14 516 000 euros **3.** 388 280 000 euros **5.** 316,29 euros
7. 4166,67 euros **9.** 112 500 euros **11.** $1{,}19 \times 10^{-4}$ cm³/s
13. $\frac{1}{9}$ L/s

Exercices 6.7 ■ page 494

1. a) $\int_{100}^{200} f(t)dt$ est la probabilité qu'une pile, prise au hasard, ait une durée de vie comprise entre 100 et 200 heures.
b) $\int_{200}^{\infty} f(t)dt$ représente la probabilité qu'une pile choisie au hasard ait une durée de vie d'au moins 200 heures.
3. a) $f(x) \geqslant 0$ quel que soit x et $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ b) 5
7. a) $e^{-4/2,5} \approx 0{,}20$ b) $1 - e^{-2/2,5} \approx 0{,}55$
c) Si vous n'êtes pas servi en moins de 10 minutes, vous recevez un steak haché gratuit.
9. $\approx 44{,}3\,\%$ **11.** $\approx 0{,}9545$ **13.** $2/\pi$, $1/\pi$

Chapitre 6 Révision ■ pagepage 496

Exercices
1. 108 **3.** a) 0,38 b) 0,87
5. a) $2\pi/15$ b) $\pi/6$ c) $8\pi/15$ **7.** $(-2, 3)$; $\frac{81}{20}$
9. 36 **11.** $125\sqrt{3}/3$ m³ **13.** $2(5\sqrt{5}-1)$
15. 3,2 J **17.** a) $1000\pi/6$ J b) $h \approx 0{,}615$ m
19. 2116,8 N **21.** 7166,67 euros **23.** $f(x)$
25. a) $1 - e^{-3/8} \approx 0{,}31$ b) $e^{-5/4} \approx 0{,}29$
c) $8 \ln 2 \approx 5{,}55$ min

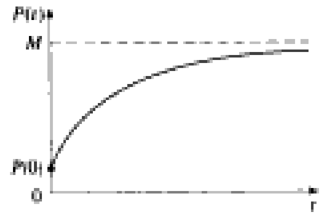
Pleins feux sur la résolution de problèmes ■ page 499

1. $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$
3. b) 0,2261 c) 0,6736 m
d) ■ $3/(128\pi) \approx 0{,}0075$ cm/s ■ $856\pi/9 \approx 5$ min
7. a) $P(z) = P_0 + g\int_0^z \rho(x)dx$
b) $(P_0 - \rho_0 gH)(\pi r^2) + \rho_0 gHe^{L/H}\int_{-r}^{r} e^{x/H}\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$
11. $\ln(\pi/2)$

CHAPITRE 7

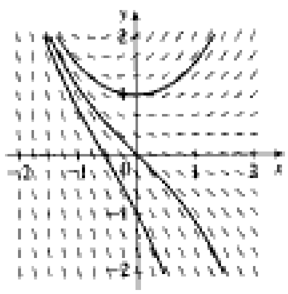
Exercices 7.1 ■ page 508

3. a) ± 3 **5.** b) et c)
7. a) Soit la solution est nulle, soit elle est décroissante.
c) $y = 0$ d) $y = 1/(x+2)$
9. a) $0 < P < 4200$ b) $P > 4200$ c) $P = 0$, $P = 4200$
11. a) Au début ; dP/dt est positive, puis décroît.
c)



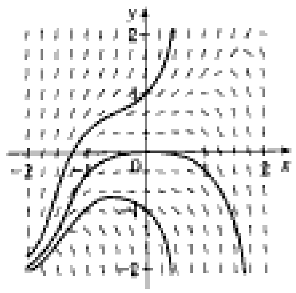
Exercices 7.2 ■ page 513

1.

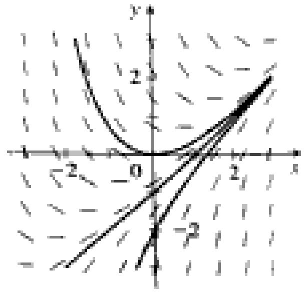


3. IV **5.** III

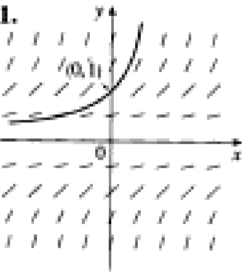
7.



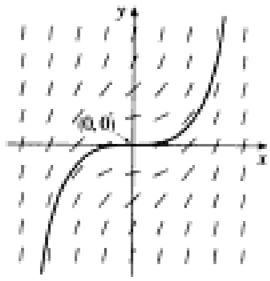
9.



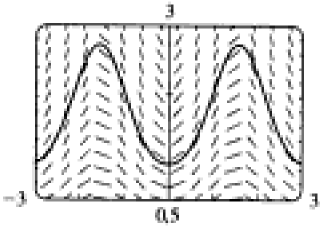
11.



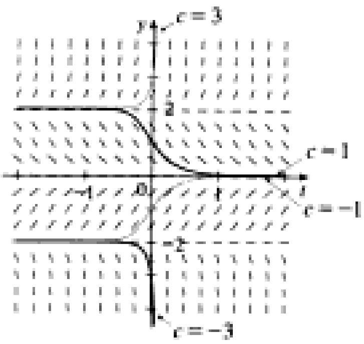
13.



15.

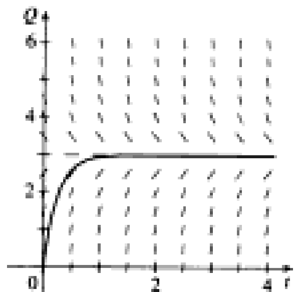


17.



$-2 \leq c \leq 2$; -2, 0, 2

19. a), d)

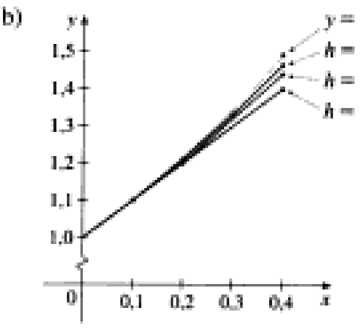


(b) 3 c) Oui ; $Q = 3$

Exercices 7.3 ■ page 517

1. a) 1,4 ; 1,44 ; 1,4641.

b)



Sous-estimations

c) 0,0918 ; 0,0518 ; 0,0277. L'erreur est elle aussi à peu près divisée par deux.

3. 2 ; 2,75 ; 3,5 ; 4,25. **5.** 1,8371

7. a) 3 ; 2,3928 ; 2,3701 ; 2,3681.

c) $-0,6321$; $-0,0249$; $-0,0022$; $-0,0002$. L'erreur est à chaque fois divisée approximativement par dix.

9. 2,77 C

Exercices 7.4 ■ page 524

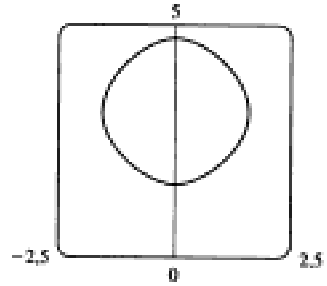
1. $y = -1/(x + C)$ ou $y = 0$ **3.** $x^2 - y^2 = C$

5. $u = -\ln(C - \frac{1}{2}e^{2t})$ **7.** $y = \text{tg}\,(x - 1)$

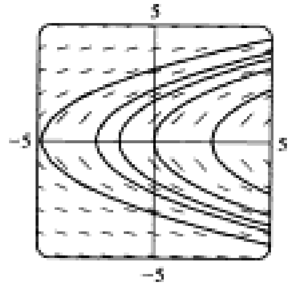
9. $x = \sqrt{2(t-1)e^t + 3}$ **11.** $u = 1 - \sqrt{t^2 + t + 4}$

13. $y = 7e^{x^4}$ **15.** $y = e^{1-\cos x}$

17. $\cos y = \cos x - 1$

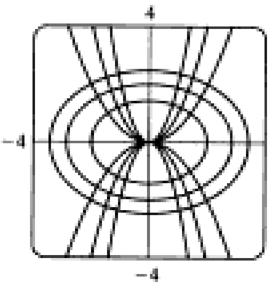


19. a), c)

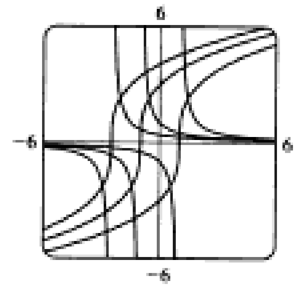


b) $y = \pm\sqrt{2(x + c)}$

21. $x^2 + 2y^2 = C$



23. $y^3 = 3(x + c)$



25. $Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$; 3 **27.** $P(t) = M - Me^{-kt}$; M

29. a) $C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k$

b) r/k ; la concentration tend vers r/k indépendemment de la valeur de C_0.

31. a) $15e^{-t/100}$ kg b) $15e^{-0,2} \approx 12,3$ kg **33.** g/k

35. a) $dA/dt = k\sqrt{A}(M - A)$

b) $A = M[(Ce^{\sqrt{M}kt} - 1)/(Ce^{\sqrt{M}kt} + 1)]^2$, où $C = (\sqrt{M} + \sqrt{A_0})/(\sqrt{M} - \sqrt{A_0})$ et $A_0 = A(0)$

[Si $A_0 = 0$, alors $C = 1$.]

37. b) $y(t) = (\sqrt{1,8} - \frac{\sqrt{5}}{400}t)^2$ c) $400\sqrt{1,8}/\sqrt{5}$ s ≈ 4 min

Exercices 7.5 ■ page 534

1. Environ 235

3. a) $500 \times 16^{t/3}$ b) $\approx 20\,159$ c) $(3 \ln 60)/\ln 16 \approx 4,4$ h

5. a) 1403 millions, 1746 millions b) 2208 millions

c) 3667 millions ; les guerres de la première moitié du siècle auxquelles vient s'ajouter l'acroissement de l'espérance de vie dans le seconde moitié.

7. a) $Ce^{-0,0005t}$ b) $-2000 \ln 0,9 \approx 211$ s

9. a) $50 \times 2^{-t/0,00014}$ b) $\approx 1,57 \times 10^{-20}$ mg c) $\approx 4,5 \times 10^{-5}$ s

11. ≈ 2500 ans. **13.** a) $dy/dt = ky$, $y(0) = 62$; $y(t) = 62e^{kt}$.

b) $\approx 57,57$°C c) $\approx 114,6$ min

15. a) $\approx 64,5$ kPa b) $\approx 39,9$ kPa

17. a) 3828,84 euros ; 3840,25 euros ; 3850,08 euros ; 3851,61 euros ; 3852,01 euros ; 3852,08 euros.

b) $dA/dt = 0,05A$, $A(0) = 3000$.

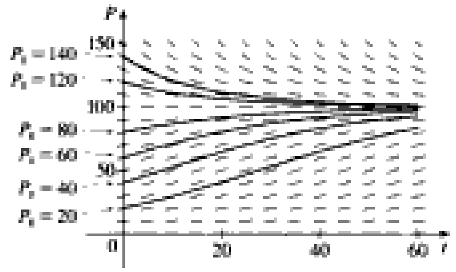
19. a) $P(t) = (m/k) + (P_0 - m/k)e^{kt}$ b) $m < kP_0$

c) $m = kP_0$, $m > kP_0$ d) En déclin.

Exercices 7.6 ■ page 544

1. a) 100 ; 0,05   b) Où P est proche de 0 ou 100 ; sur la droite $P = 50$; $0 < P_0 < 100$; $P_0 > 100$

c)



Les solutions tendent vers 100 ; certaines en croissant, d'autres en décroissant, certaines présentent un point d'inflexion, d'autres non ; les solutions avec $P_0 = 20$ et $P_0 = 40$ ont des points d'inflexion en $P = 50$.

d) $P = 0$, $P = 100$; les autres solutions s'écartent de $P = 0$ pour se rapprocher de $P = 100$.

3. a) $3{,}23 \times 10^7$ kg   b) $\approx 1{,}55$ années

5. a) $dP/dt = 0{,}00377P(1 - P/100)$

b) En milliards : 5,49 ; 7,81 ; 27,72.

c) En milliards : 5,48 ; 7,61 ; 22,41.

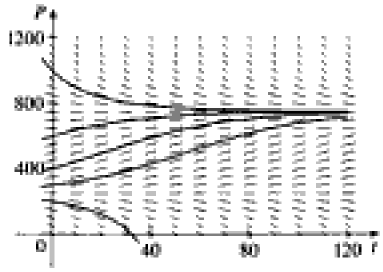
7. a) $dy/dt = ky(1 - y)$ b) $y = y_0/[y_0 + (1 - y_0)e^{-kt}]$

c) 15h36

11. a) Les poissons sont retirés à raison de 15 par semaine.

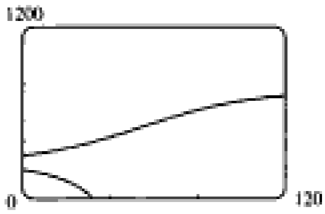
b) Voyez partie d).   c) $P = 250$, $P = 750$

d)

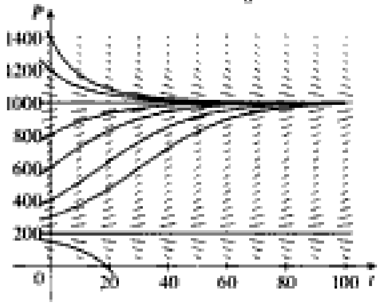


$0 < P_0 < 250$: $P \to 0$; $P_0 = 250$: $P \to 250$;
$P_0 > 250$: $P \to 750$

e) $P(t) = \dfrac{250 - 750ce^{t/25}}{1 - ce^{t/25}}$,
où $c = \frac{1}{11}, -\frac{1}{9}$



13. b)



$0 < P_0 < 200$: $P \to 0$; $P_0 = 200$: $P \to 200$;
$P_0 > 200$: $P \to 1000$

c) $P(t) = \dfrac{m(K - P_0) + K(P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}{K - P_0 + (P_0 - m)e^{(K-m)(k/K)t}}$

15. a) $P(t) = P_0e^{(k/r)[\sin(rt-\phi)+\sin\phi]}$

b) N'existe pas.

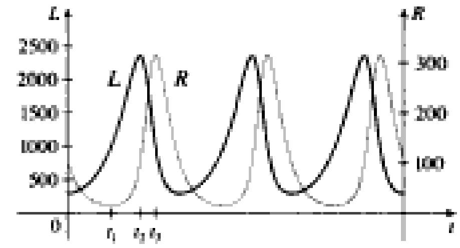
Exercices 7.7 ■ page 551

1. a) x = prédateurs, y = proies ; la croissance est limitée seulement par les prédateurs, qui ne se nourrissent que des proies.

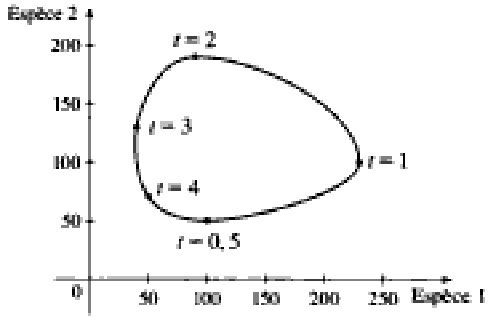
b) x = proies, y = prédateurs ; la croissance est limitée par la capacité maximale et par les prédateurs, qui ne se nourrissent que des proies.

3. a) La population de lapins se montent à environ 300 au départ, augmente jusqu'à 2400, ensuite revient à 300. La population de renards démarre à 100, tombe à 20 unités, croît jusqu'à 315, retombe à 100 et le cycle recommence.

b)



5.



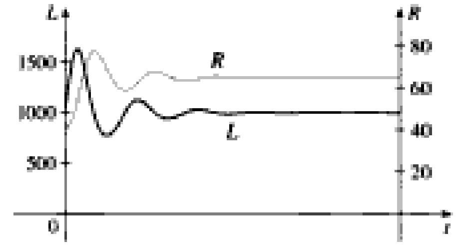
9. a) La population se stabilise à 5000.

b) ■ $R = 0, L = 0$: populations nulles.

■ $R = 0, L = 5000$: en l'absence de renards, la population des lapins est toujours de 5000.

■ $R = 64, L = 1000$: les deux populations restent stables.

d)



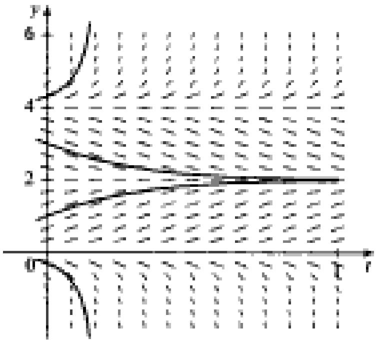
Chapitre 7 Révision ■ page 553

Vrai-Faux

1. Faux   **3.** Faux   **5.** Vrai

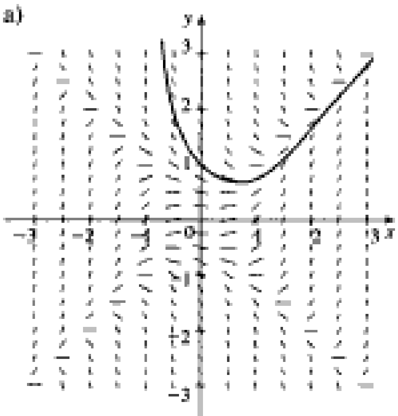
Exercices

1. a)



b) $0 \leqslant c \leqslant 4$; $y = 0$, $y = 2$, $y = 4$

3. a)



0,8

b) 0,7568

c) $y = x$ et $y = -x$; il y a un maximum ou un minimum local.

5. $y = ke^{x+x^2/3} - 2$ **7.** $y = \sqrt{(\ln x)^2 + 4}$

9. $y^2 - 2\ln|y| + x^2 = K$ **11.** a) $1000e^{(\ln 9)t/2} = 1000 \times 3^t$

b) 27000 c) $(\ln 2)/\ln 3 \approx 0{,}63$ h

13. a) C_0e^{-kt} b) ≈ 100 h

15. a) $L(t) = L_\infty - [L_\infty - L(0)]e^{-kt}$ b) $L(t) = 53 - 43e^{-0{,}2t}$

17. 15 jours **19.** a) Se stabilise à 200 000.

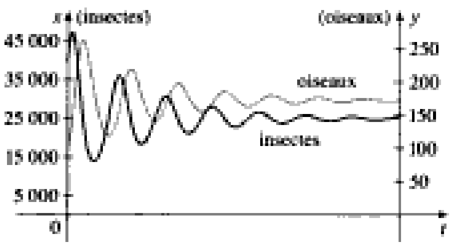
b) ■ $x = 0, y = 0$: population nulle

■ $x = 200\,000, y = 0$: en l'absence d'oiseaux, la population d'insectes est toujours 200 000.

■ $x = 25\,000, y = 175$: les deux populations sont stables.

c) Les populations se stabilisent à 25 000 insectes et 175 oiseaux.

d)



Pleins feux sur la résolution de problème ■ page 556

1. $f(x) = \pm 10e^x$

5. a) 9,3 h b) $2871\pi \approx 9020$ m^2 ; 593,5 m^2/h.

c) 4,8 h.

7. b) $f(x) = (x^2 - L^2)/(4L) - (L/2)\ln(x/L)$ c) Non

CHAPITRE 8

Exercices 8.1 ■ page 567

1. a) Une suite est une liste ordonnée de nombres. Elle peut être définie comme une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des entiers positifs.

b) Les termes a_n s'approchent de 8 à mesure que n grandit.

c) Les termes a_n deviennent arbitrairement grands lorsque n est suffisamment grand.

3. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}$; oui ; $\frac{1}{2}$. **5.** $a_n = 1/2^n$

7. $a_n = (n+2)/(n+3)^2$ **9.** 0 **11.** 1

13. Diverge (vers ∞). **15.** Diverge. **17.** Diverge (vers ∞).

19. 0 **21.** 0 **23.** 0 **25.** 0 **27.** Diverge

29. $\pi/4$ **31.** 0 **33.** a) Divergente b) Convergente

35. b) $(1+\sqrt{5})/2$ **37.** Décroissante **39.** Croissante

41. Elle est convergente en vertu du Théorème des suites monotones. $5 \leqslant L < 8$

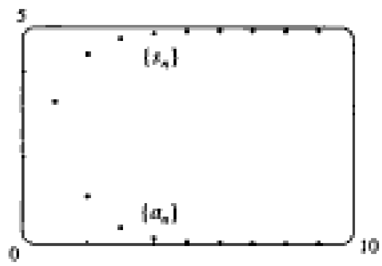
43. $(3+\sqrt{5})/2$ **45.** 62

Exercices 8.2 ■ page 577

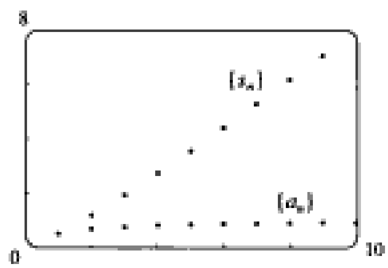
1. a) Une suite est une liste ordonnée de nombres tandis qu'une série est la *somme* d'une liste de nombres.

b) Une série est convergente lorsque la suite des sommes partielles est une suite convergente. Une série est divergente lorsque cette suite est divergente.

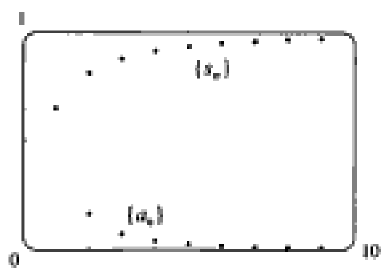
3. 3,33333; 4,44444; 4,81481; 4,93827; 4,97942; 4,99314; 4,99771; 4,99924; 4,99975; 4,99992
Convergente, somme = 5



5. 0,50000; 1,16667; 1,91667; 2,71667; 3,55000; 4,40714; 5,28214; 6,17103; 7,07103; 7,98012
Divergente (les termes ne tendent pas vers 0)



7. 0,64645; 0,80755; 0,87500; 0,91056; 0,93196; 0,94601; 0,95581; 0,96296; 0,96838; 0,97259
Convergente, somme = 1



9. a) Convergente b) Divergente **11.** [illegible] **13.** $\frac{1}{7}$

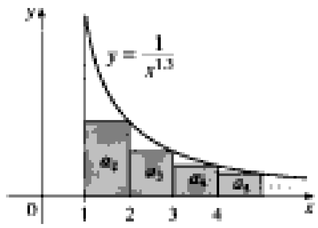
15. Divergente **17.** $\frac{17}{36}$ **19.** Divergente **21.** $\frac{3}{4}$

23. $\frac{1}{2}$ **25.** sin 1 **27.** Divergente **29.** $\frac{5}{9}$ **31.** $\frac{307}{999}$
33. $2 < x < 4$, $1/(4-x)$ **35.** $|x| > 1$, $x/(x-1)$
37. $\frac{1}{4}$ **39.** $a_1 = 0$, $a_n = 2/[n(n+1)]$ pour $n > 1$, somme $= 1$
41. a) $S_n = D(1-c^n)/(1-c)$ b) 5
43. $(\sqrt{3}-1)/2$ **45.** $1/[n(n+1)]$
47. La série est divergente.
51. $\{s_n\}$ est bornée et croissante.
53. a) $0\,;\ \frac{1}{9}\,;\ \frac{2}{9}\,;\ \frac{1}{3}\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{7}{9}\,;\ \frac{8}{9}\,;\ 1$
55. a) $\frac{1}{2}\,;\ \frac{5}{6}\,;\ \frac{23}{24}\,;\ \frac{119}{120}\,;\ [(n+1)!-1]/(n+1)!$ c) 1

Exercices 8.3 ■ page 588

Abréviations : C, convergent, D, divergent

1.

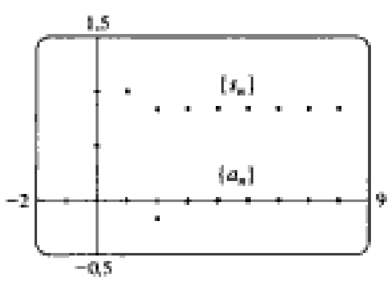


Convergente

3. a) Rien b) C
5. Série de Riemann ; série géométrique ; $b < -1$; $-1 < b < 1$
7. C **9.** D **11.** D **13.** C **15.** D **17.** C
19. D **21.** D **23.** $p > 1$
25. a) 1,54977, erreur $\leqslant 0{,}1$ b) 1,64522, erreur $\leqslant 0{,}005$
c) $n > 1000$
27. 2,6124 **29.** 0,567975, erreur $\leqslant 0{,}000\overline{3}$ **35.** Oui

Exercices 8.4 ■ page 595

1. a) Une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.
b) $0 < b_{n+1} \leqslant b_n$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ avec $b_n = |a_n|$.
c) $|R_n| \leqslant b_{n+1}$
3. C **5.** D **7.** C **9.** Sous-estimation **11.** $p > 0$
13. 7
15. 0,8415

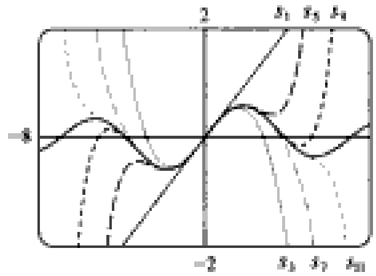


17. 0,6065 **19.** Non **21.** Non **23.** Oui **25.** Oui
27. Oui **29.** D **31.** a) et d)
35. a) $\frac{661}{960} \approx 0{,}68854$, erreur$< 0{,}00521$
b) $n \geqslant 11$, 0,693109

Exercices 8.5 ■ page 602

1. Une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, où x est une variable et où a et les c_n sont des constantes.
3. a) Oui b) Non **5.** 1, $[-1, 1[$ **7.** ∞, $]-\infty, \infty[$
9. 2, $]-2, 2]$ **11.** 2, $]-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$ **13.** 1, $[0, 2]$
15. 0,5, $[2{,}5\,;\,3{,}5[$ **17.** 0, $\{\frac{1}{2}\}$ **19.** k^k
21. a) $]-\infty, \infty[$

b), c)



23. $]-1, 1[$, $f(x) = (1+2x)/(1-x^2)$ **25.** 2

Exercices 8.6 ■ page 607

1. 10

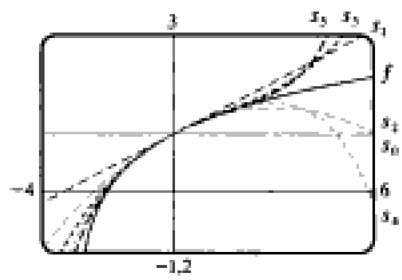
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $]-1, 1[$ **5.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{2n}$, $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

7. $-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$, $]-3, 3[$ **9.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$, $R = 1$

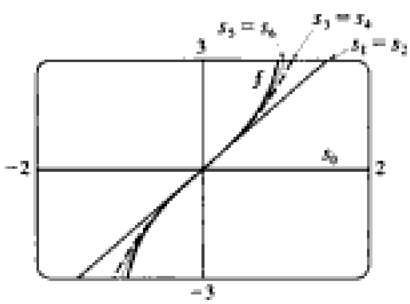
11. $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) x^n$, $R = 1$

13. $\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$, $R = 5$

15. $\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} x^n$, $R = 3$



17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$



19. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$ **21.** $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$
23. 0,199936 **25.** 0,000065 **27.** 0,09531
29. b) 0.920 **33.** $[-1, 1]$, $[-1, 1[$, $]-1, 1[$

Exercices 8.7 ■ page 618

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)x^n$, $R = 1$ **7.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n$, $R = \infty$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x-1)^n$, $R = 1$

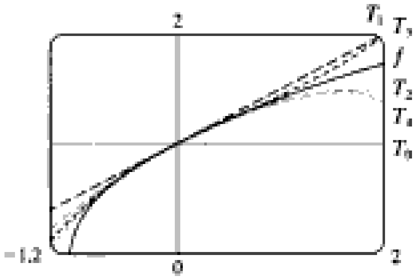
11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n-1)/2}(x-\pi/4)^n}{\sqrt{2}\,n!}$, $R = \infty$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$, $R = \infty$ **17.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n)!}$, $R = \infty$

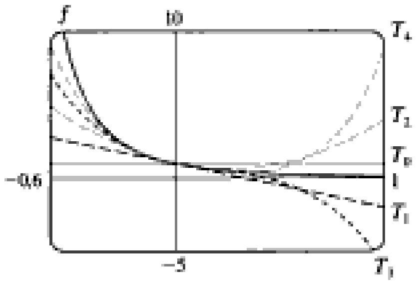
19. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$, $R = \infty$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

23. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n$, $R = 1$



25. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}(n+1)(n+2)x^n$, $R = 1$



27. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, 0,09531

29. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$

31. $C + x + \frac{x^4}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!\,(3n+1)} x^{3n+1}$

33. 0,310 **35.** 0,09998750 **37.** $\frac{1}{3}$ **39.** $\frac{1}{120}$

41. $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$ **43.** $-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ **45.** e^{-x^4}

47. $1/\sqrt{2}$ **49.** $e^x - 1$

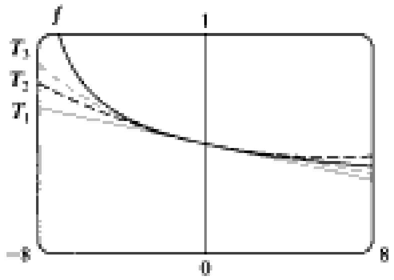
Exercices 8.8 ■ page 622

1. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n$, $R = 1$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)(n+3)2^n}{6} x^n$, $R = \frac{1}{2}$

5. $1 - \frac{x^4}{4} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n-5)}{4^n n!} x^{4n}$, $R = 1$

7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{24^n n!} x^n$, $R = 8$



9. a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

11. a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ b) 2

13. a) $1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^{2n}$

b) 99 225

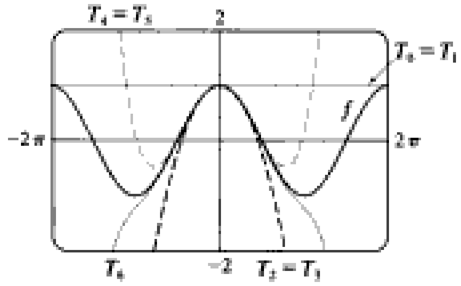
Exercices 8.9 ■ page 630

1. a) $T_0(x) = 1 = T_1(x)$, $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 = T_3(x)$,
$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = T_5(x)$,
$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$

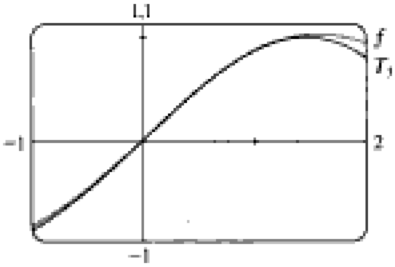
b)

x	f	T_1	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0,7071	1	0,6916	0,7074	0,7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	−0,2337	0,0200	−0,0009
π	−1	1	−3,9348	0,1239	−1,2114

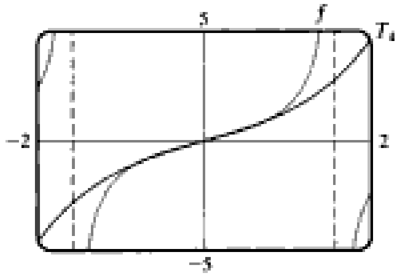
c) À mesure que n croit, $T_n(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$ sur un intervalle de plus en plus large.



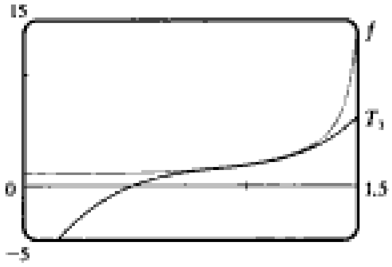
3. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$



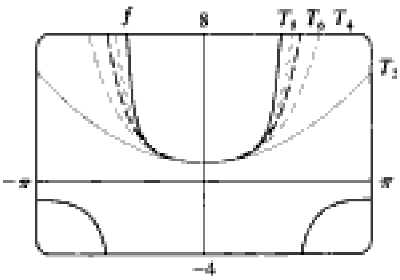
5. $x + \frac{1}{3}x^3$



7. $2 + 2\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 7\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{23\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$



9. $T_8(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8$



11. a) $1 + \frac{1}{2}x$ b) 0,00125

13. a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{24\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{1}{120\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$

b) 0,00033

15. a) $1 + x^2$ b) 0,00006 17. 0,57358 19. 3

21. $-1{,}037 < x < 1{,}037$ 23. 21 m, non

Exercices 8.10 ■ page 637

1. $\sum_{n=0}^{\infty} c_0 \frac{6^n}{n!} x^n = c_0 e^{6x}$ 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{3^n n!} x^{3n} = c_0 e^{x^3/3}$

5. $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{n!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-6)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

9. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \cdots \cdot (3n-1)^2}{(3n+1)!} x^{3n+1}$

Chapitre 8 Révision ■ page 637

Vrai-Faux

1. Faux 3. Faux 5. Faux 7. Faux 9. Vrai
11. Vrai 13. Faux 15. Vrai

Exercices

1. C, $\frac{1}{2}$ 3. D 5. D 7. C, e^{12}
9. D 11. C 13. D 15. C 17. C
19. 8 21. $\pi/4$ 23. $\frac{4111}{3330}$
25. 0,9721 27. 0,18976224, erreur $< 6{,}4 \times 10^{-7}$
31. 3, $[-3, 3]$ 33. 0,5, $[2{,}5; 3{,}5[$

35. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \cdots$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$$

37. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, 1 39. $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, 1

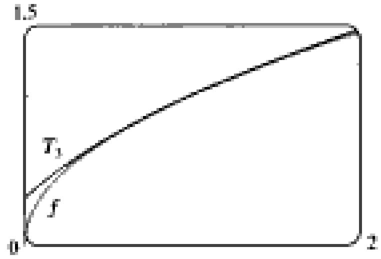
41. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+4}}{(2n+1)!}$, ∞

43. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{n!\,2^{6n+1}} x^n$, 16

45. $\ln|x| + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$

47. a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

b)



c) 0,000006

49. 1 51. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Pleins feux sur la résolution de problèmes ■ page 640

1. $15!/5! = 10\,897\,286\,400$

3. b) 0 si $x = 0$, $(1/x) - \operatorname{cotg} x$ si $x \neq n\pi$, n entier.

5. a) $s_n = 3 \cdot 4^n$, $l_n = 1/3^n$, $p_n = 4^n/3^{n-1}$ c) $2\sqrt{3}/5$

9. $]-1, 1[$, $(x^3 + 4x^2 + x)/(1 - x)^4$

ANNEXES

Exercices A ■ page A6

1. 18 **3.** $5 - \sqrt{5}$ **5.** $2 - x$

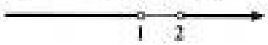
7. $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{pour } x \geqslant -1 \\ -x - 1 & \text{pour } x < -1 \end{cases}$ **9.** $x^2 + 1$

11. $]-2, \infty[$

13. $[-1, \infty[$

15. $]0, 1]$

17. $]-\infty, 1[\cup]2, \infty[$



19. $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

21. $]-\infty, 1]$

23. $]-1, 0[\cup]1, \infty[$

25. $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{4}, \infty[$

27. $10 \leqslant C \leqslant 35$

29. a) $T = 20 - 10h$, $0 \leqslant h \leqslant 12$

b) $-30\,°C \leqslant T \leqslant 20\,°C$ **31.** $2, -\frac{4}{3}$

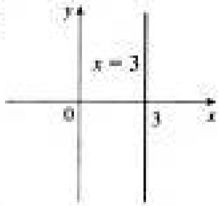
33. $]-3, 3[$ **35.** $]3, 5[$ **37.** $]-\infty, -7] \cup [-3, \infty[$

39. $[1{,}3; 1{,}7]$ **41.** $x \geqslant (a + b)c/(ab)$

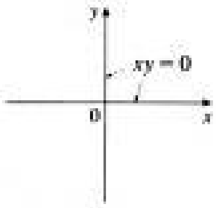
Exercices B ■ page A17

1. 5 **3.** $-\frac{9}{2}$

7.



9.

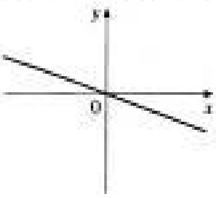


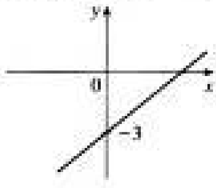
11. $y = 6x - 15$ **13.** $5x + y = 11$

15. $y = 3x - 2$ **17.** $y = 3x - 3$ **19.** $y = 5$

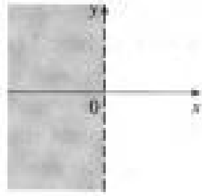
21. $x + 2y + 11 = 0$ **23.** $5x - 2y + 1 = 0$

25. $m = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ **27.** $m = \frac{3}{4}$, $b = -3$

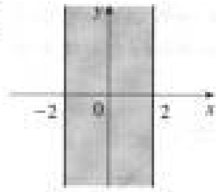




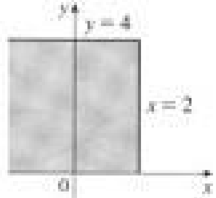
29.



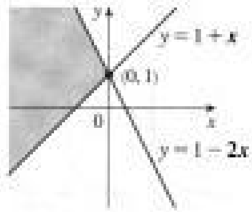
31.



33.



35.

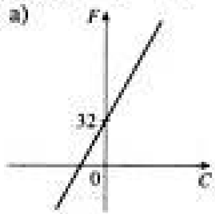


37. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ **39.** $(2, -5)$, 4

41. $(1, -2)$ **43.** b) $(4, 9)$

45. b) $4x - 3y - 24 = 0$

47. a)



b) Pente $= \frac{9}{5}$. Elle représente de combien varient les degrés Fahrenheit pour chaque degré Celsius. L'intersection avec l'axe $OF = 32$ représente la température en °F qui correspond à 0°C.

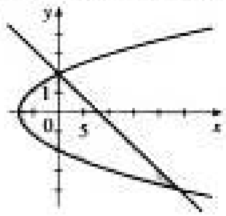
49. a) $T = \frac{5}{48}N + \frac{17}{2}$

b) La pente $= \frac{5}{48}$ représente le taux de variation de la température par rapport à la fréquence des chants.

c) Environ 24°C

51. a) $P = 10d + 103{,}425$ b) 59,6575 m

59.



Exercices C ■ page A30

1. a) $7\pi/6$ b) $\pi/20$ **3.** a) 720° b) −67,5°

5. 3π cm **7.** $\frac{2}{3}$ rad $= (120/\pi)°$

9. a)

b)

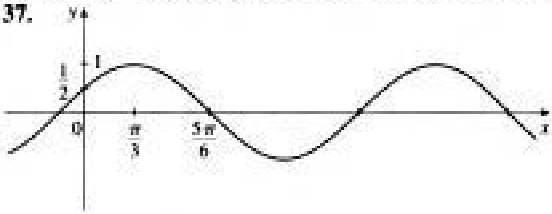
11. $\sin(3\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}(3\pi/4) = -1$, $\operatorname{cosec}(3\pi/4) = \sqrt{2}$, $\sec(3\pi/4) = -\sqrt{2}$, $\operatorname{cotg}(3\pi/4) = -1$

13. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{3}{4}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cotg}\theta = \frac{4}{3}$

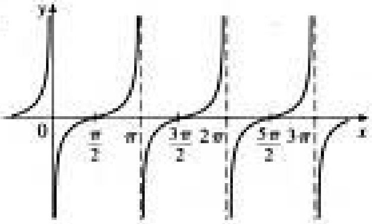
15. 5,73576 cm **17.** 24,62147 cm **27.** $(4 + 6\sqrt{2})/15$

29. $\pi/3$, $5\pi/3$ **31.** $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$, $3\pi/2$

33. $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$ et $5\pi/6 \leqslant x \leqslant 2\pi$
35. $0 \leqslant x < \pi/4$, $3\pi/4 < x < 5\pi/4$, $7\pi/4 < x \leqslant 2\pi$
37.



39.



41. a) $\pi/6$ b) $-\pi/4$ **43.** a) 0,7 b) $-\pi/4$
47. $[-\frac{2}{3}, 0]$, $[-\pi/2, \pi/2]$

Exercices D ■ page A38

1. $\frac{4}{7}$ (ou tout autre nombre strictement positif plus petit)
3. 0,6875 (ou tout autre nombre strictement positif plus petit)
5. 0,11 ; 0,012 (ou d'autres nombres strictement positifs plus petits)
11. a) $\sqrt{1000/\pi}$ cm b) Moins d'environ 0,0445 cm
c) Le rayon ; l'aire ; $\sqrt{1000/\pi}$; 1000 ; 5 ; $\approx 0{,}0445$
13. $N \geqslant 13$ **15.** a) $x > 100$
17. a) 0 b) 9, 11

Exercices F ■ page A50

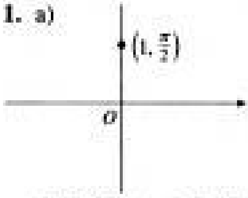
1. $\dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{x-2}$
3. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x-1}$ **5.** $1 + \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$
7. $\dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2}$ **9.** $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+2}$
11. $\dfrac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$
13. $\ln 3 + 3\ln 6 - 3\ln 4 = \ln \frac{81}{8}$
15. $2\ln 2 + \frac{1}{2}$ **17.** $4\ln 6 - 3\ln 5$
19. $2\ln|x| + 3\ln|x+2| + (1/x) + C$
21. $\ln\sqrt{3} - (\sqrt{3}\,\pi/18)$
23. $\ln(x-1)^2 + \ln\sqrt{x^2+1} - 3\operatorname{Arctg} x + C$
25. $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$
27. $\frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 3\operatorname{Arctg} x + \sqrt{2}\operatorname{Arctg}(x/\sqrt{2}) + C$
29. $-\frac{1}{2}\ln 3 \approx -0{,}55$ **31.** $\ln\frac{3}{2}$
33. a) $\dfrac{24\,110}{4879}\dfrac{1}{5x+2} - \dfrac{668}{323}\dfrac{1}{2x+1} - \dfrac{9438}{80\,155}\dfrac{1}{3x-7} + \dfrac{1}{260\,015}\dfrac{22\,098x + 48\,935}{x^2+x+5}$

b) $\dfrac{4822}{4879}\ln|5x+2| - \dfrac{334}{323}\ln|2x+1| - \dfrac{3146}{80\,155}\ln|3x-7| + \dfrac{11\,049}{260\,015}\ln(x^2+x+5) + \dfrac{75\,772}{260\,015\sqrt{19}}\operatorname{Arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{19}} + C$

Les logiciels de calculs formels omettent le signe de valeur absolue et la constante d'intégration.

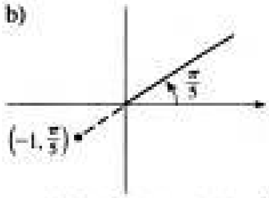
Exercices G.1 ■ page A59

1. a)



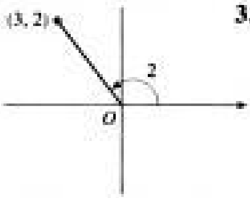
$(1, 5\pi/2)$, $(-1, 3\pi/2)$

b)



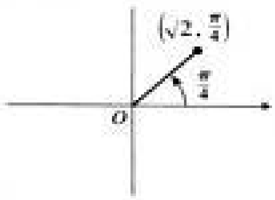
$(1, 6\pi/5)$, $(-1, 11\pi/5)$

c)



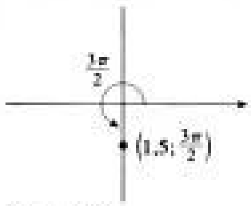
$(3, 2 + 2\pi)$, $(-3, 2 + \pi)$

3. a)



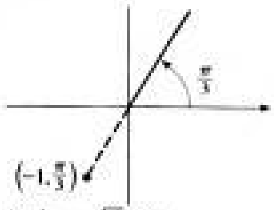
$(1, 1)$

b)



$(0; -1{,}5)$

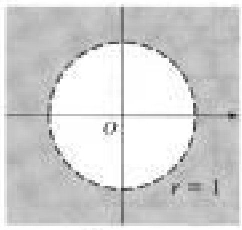
c)



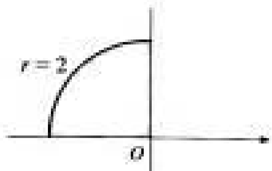
$(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2)$

5. a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$ b) $(4, 11\pi/6)$

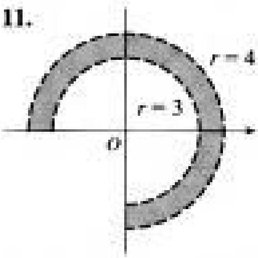
7.



9.

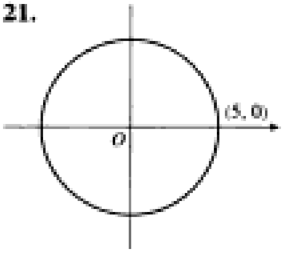


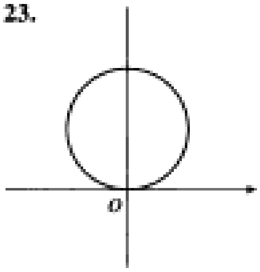
11.

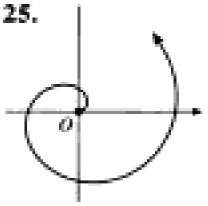


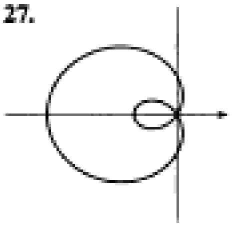
13. $y = 2$ **15.** $y^2 = 2x + 1$

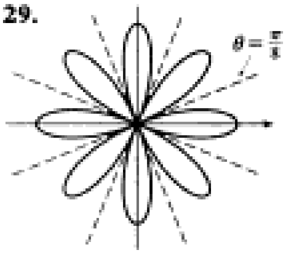
17. $r\sin\theta = 5$ **19.** $r = 5$

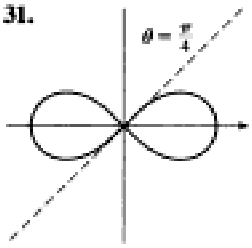
21.


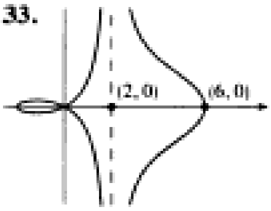
23.


25.


27.


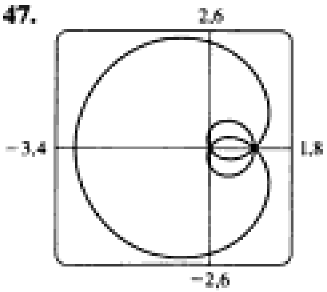
29.


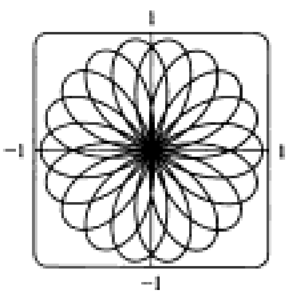
31.


33.


35. $1/\sqrt{3}$ **37.** $-2/\pi$

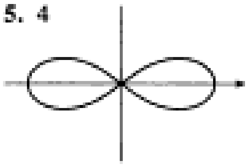
39. Horizontale en $(1, 3\pi/2)$, $(1, \pi/2)$, $(\frac{3}{2}, \alpha)$, $(\frac{3}{2}, \pi - \alpha)$, $(\frac{3}{2}, \pi + \alpha)$, $(\frac{3}{2}, 2\pi - \alpha)$, où $\alpha = \text{Arcsin } (1/\sqrt{6})$.
Verticale en $(1, 0)$, $(1, \pi)$, $(\frac{3}{2}, 3\pi/2 - \alpha)$, $(\frac{3}{2}, 3\pi/2 + \alpha)$, $(\frac{3}{2}, \pi/2 - \alpha)$, $(\frac{3}{2}, \pi/2 + \alpha)$.
41. Horizontale en $(\frac{3}{2}, \pi/3)$, $(\frac{3}{2}, 5\pi/3)$ et au pôle.
Verticale en $(2, 0)$, $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$, $(\frac{1}{2}, 4\pi/3)$.
43. Centre $(b/2, a/2)$, rayon $\sqrt{a^2 + b^2}/2$
45. a) Pour $c < -1$, la boucle commence en $\theta = \text{Arcsin } (-1/c)$ et finit en $\theta = \pi - \text{Arcsin } (-1/c)$; pour $c > 1$, elle commence en $\theta = \pi + \text{Arcsin } (1/c)$ et finit en $\theta = 2\pi - \text{Arcsin } (1/c)$.

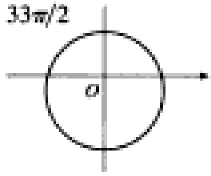
47.


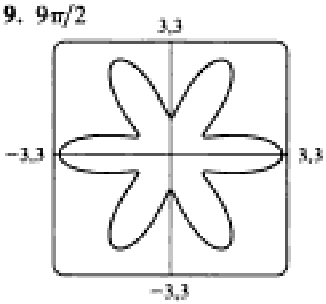
49.


51. Ils diffèrent d'une rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre d'un angle $\pi/6$, $\pi/3$ ou α autour de l'origine.
53. a) Une rosace à n lobes si n est impair et $2n$ lobes si n est pair.
b) Le nombre de lobes est toujours $2n$.
55. Pour $0 < a < 1$, la courbe est un ovale, qui développe une fossette lorsque $a \to 1^-$. Pour $a > 1$, la courbe se divise en deux morceaux dont l'un a une boucle.

Exercices G.2 ■ page A65

1. $\pi^3/6$ **3.** $(\pi/6) + (\sqrt{3}/4)$
5. 4


7. $33\pi/2$


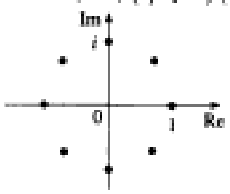
9. $9\pi/2$


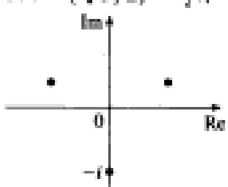
11. $\pi/20$
13. $\pi - (3\sqrt{3}/2)$
15. $(9\sqrt{3}/8) - (\pi/4)$
17. $(4\pi/3) + 2\sqrt{3}$
19. $(\pi - 2)/8$
21. $(\pi/2) - 1$
23. $(\pi + 3\sqrt{3})/4$

25. $(\frac{1}{2}, \pi/3)$, $(\frac{1}{2}, 5\pi/3)$ et le pôle.
27. $(\sqrt{3}/2, \pi/3)$, $(\sqrt{3}/2, 2\pi/3)$ et le pôle.
29. Intersection en $\theta \approx 0{,}89$ et $2{,}25$; aire $\approx 3{,}46$.
31. $\sqrt{1 + (\ln 2)^2}\,(4^\pi - 1)/\ln 2$
33. $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$ **35.** 2,422

Exercices H ■ page A75

1. $10 - i$ **3.** $13 - i$ **5.** $12 - 7i$ **7.** $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
9. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$ **15.** $3 - 4i$, 5 **17.** $4i$, 4
19. $\pm\frac{3}{2}i$ **21.** $4 \pm i$ **23.** $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$
25. $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)]$
27. $5\{\cos[\text{Arctg}(\frac{4}{3})] + i\sin[\text{Arctg}(\frac{4}{3})]\}$
29. $4[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)]$
31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i\sin(7\pi/12)]$, $(2\sqrt{2})\,[\cos(13\pi/12) + i\sin(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]$
33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$
37. ± 1, $\pm i$, $(1/\sqrt{2})(\pm 1 \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i$, $-i$





41. i **43.** $(-1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{2})i$ **45.** $-e^2$
47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$,
$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$

Index

G

H

I

ANALYSE
CONCEPTS ET CONTEXTES
Volume 1. Fonctions d'une variable

• STEWART •

La compréhension profonde des concepts, tel est l'objectif majeur de ce manuel. En conséquence, chaque concept est patiemment introduit et formulé **verbalement, visuellement, numériquement et algébriquement** avant que n'apparaisse sa définition **formelle**. Des exemples bien choisis préparent souvent l'énoncé des théorèmes pour justifier la pertinence de leurs hypothèses. L'apprentissage au **raisonnement** est soutenu par les démonstrations (parfois reportées en annexe pour ne pas perdre le fil du discours).

L'apprenant, devenu maître des concepts autant que des techniques, sera capable de choisir et d'utiliser les outils du calcul différentiel et intégral dans des **contextes** divers. L'apprentissage **actif,** de type exploratoire et heuristique, est favorisé par l'utilisation fréquente et à bon escient des **calculatrices graphiques et/ou logiciels de calcul symbolique**. Lors de chaque **résolution de problèmes**, l'accent est mis sur la méthode suivie ou l'activité de recherche mobilisée.

Les deux volumes de cet ouvrage s'adressent aux étudiants de premier cycle universitaire qui, quelle que soit leur orientation, y trouveront des applications, tant sont divers et nombreux les domaines abordés dans les exercices. Le premier volume s'adresse également aux étudiants des années terminales de l'enseignement secondaire.

Contenu : Des fonctions et des modèles/Les limites et les dérivées/Les règles de dérivation/Des applications de la dérivée/Les intégrales/Des applications de l'intégrale/Les équations différentielles/Les suites infinies et les séries.

9 782744 501180

STEWART1
ISBN 2-7445-0118-2